VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ



АНРИ ПУАНКАРЕ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

В ТРЕХ ТОМАХ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

академика Н. Н. БОГОЛЮБОВА
(главный редактор),

доктора физ.-матем. наук В. И. АРНОЛЬДА,

доктора физ.-матем. наук | И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО |



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1972

АНРИ ПУАНКАРЕ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

II

НОВЫЕ МЕТОДЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

ТОПОЛОГИЯ

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1972

УДК 521.1+513.83+511

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»

Серия основана академиком *С. И. Вавиловым*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Академик *И. Г. Петровский* (председатель),
академик *А. А. Имшенецкий*, академик *Б. А. Казанский*,
академик *Б. М. Кедров*, член-корреспондент АН СССР *Б. Н. Делоне*,
профессор *Ф. А. Петровский*, профессор *Л. С. Полак*,
профессор *Н. А. Фигуровский*, профессор *И. И. Шафрановский*

Анри Пуанкаре. Избранные труды в трех томах. Том II. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел. Изд-во «Наука», 1972 г.

В настоящую книгу входит третий том «Новых методов небесной механики», а также вторая часть мемуара «О проблеме трех тел и об уравнениях динамики», послужившего основой создания «Новых методов небесной механики».

Кроме того, в книгу включены классические работы А. Пуанкаре по топологии и мемуары «О геодезических линиях на выпуклых поверхностях» и «Об одной геометрической теореме», которые примыкают и к «Новым методам небесной механики» и к топологическим работам А. Пуанкаре.

В настоящий том входят также арифметические работы А. Пуанкаре «О тернарных и кватернарных кубических формах» и «Об арифметических свойствах алгебраических кривых».

Редактор второго тома *В. И. Арнольд*

Составитель *И. Б. Погребысский*

2-6-2

Подписное издание

ОТ РЕДАКЦИИ

Во втором томе собрания трудов А. Пуанкаре заканчивается публикация «Новых методов небесной механики». Помещенный здесь третий и последний том этого труда переведен с французского В. К. Абалакиным, перевод отредактирован и прокомментирован Г. А. Мерманом.

Первоисточником «Новых методов небесной механики» были исследования, изложенные в обширном мемуаре 1889 г. «О проблеме трех тел и об уравнениях динамики», едва ли не наиболее известной работе А. Пуанкаре. Представлялось нецелесообразным дать этот мемуар целиком, так как многое (главным образом, из его первой части) вошло в «Новые методы небесной механики» либо почти без изменений, либо в настолько расширенном виде, что прежняя трактовка потеряла свое значение. Но мемуар 1889 г. интересен не только для ознакомления с генезисом основных идей Пуанкаре — в нем немало поучительного и для самого внимательного читателя «Новых методов небесной механики». Поэтому здесь дана в наибольшей мере сохранившая актуальность вторая часть мемуара, снабженная необходимым введением и примечаниями. Перевод выполнен А. А. Бряндинской, отредактирован И. Б. Погребысским.

В настоящем томе помещена также серия замечательных работ А. Пуанкаре по топологии, работ, с которых начинается история топологии как самостоятельной математической дисциплины. Основной мемуар (Analysis situs), первое, четвертое и пятое дополнения к нему переведены А. Н. Боголюбовым, второе и третье дополнения — А. В. Чернавским. А. В. Чернавский провел также общую редакцию этого раздела и прокомментировал входящие в него работы.

Еще две работы Пуанкаре, примыкающие как к топологическому циклу его исследований, так и к работам по небесной механике, вошли в этот том. С мемуаром «О геодезических линиях на выпуклых поверхностях» мы находимся у истоков вариационного исчисления «в целом», а работа, посвященная «последней геометрической теореме Пуанкаре», дала им-

пульсы для различных исследований по динамическим системам, начиная с Д. Д. Биркгофа и вплоть до наших дней. Обе работы замечательны по богатству и разнообразию применяемых в них средств, хотя в последней Пуанкаре, как известно, не удалось добиться полного обоснования найденного им результата.

Переведены эти работы А. Н. Боголюбовым, отредактированы переводы И. Б. Погребысским.

В настоящий том включены также две арифметические работы Пуанкаре «О тернарных и кватернарных кубических формах» и «Об арифметических свойствах алгебраических кривых» (перевод Ю. Н. Сударева, комментарий и редакция Ю. И. Манина). Первая работа интересна тем, что ряд ее результатов остается не понятым до конца с современной точки зрения. Вторая послужила основой большого количества дальнейших исследований и оказала большое влияние на развитие арифметических методов алгебраической геометрии.

Подстрочные примечания, помеченные Р. Г., принадлежат Р. Гарнье (R. Garnier), А. Ш. — А. Шателе (A. Châtelet), Ф. Ш. — Ф. Шателе (F. Châtelet), А. Н. — А. Нерону (A. Neron), Ж. Л. — Ж. Лере (J. Leray), редакторам французского издания собрания сочинений Пуанкаре.

Редакция этого собрания трудов А. Пуанкаре считает своим приятным долгом выразить благодарность академику П. С. Александрову, предоставившему ей для публикации свою речь «Пуанкаре и топология», произнесенную на посвященном столетию со дня рождения А. Пуанкаре заседании Международного математического конгресса 1954 г.



НОВЫЕ МЕТОДЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

III

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ.
ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОГО РОДА.
ДВОЯКО-АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

LES MÉTHODES NOUVELLES DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE

III

INVARIANTS INTÉGRAUX.
SOLUTIONS PÉRIODIQUES DU DEUXIÈME GENRE.
SOLUTIONS DOUBLEMENT ASYMPTOTIQUES

Глава XXII

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ [1]

Установившееся движение потока

233. Для того чтобы пояснить происхождение и смысл понятия интегральных инвариантов, я полагаю полезным начать с изучения частного примера, заимствованного из одного физического приложения.

Рассмотрим какой-нибудь поток, и пусть u, v, w — три компоненты скорости молекулы, имеющей в момент t координаты x, y, z.

Мы будем считать u, v, w функциями от t, x, y, z и предположим, что эти функции заданы.

Если u, v, w не зависят от t и зависят только от x, y, z, то говорят, что движение потока *установившееся*. Мы предположим, что это условие выполнено.

Тогда траектория любой молекулы потока является кривой, определенной дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}. \tag{1}$$

Если бы мы умели интегрировать эти уравнения, то нашли бы с их помощью

$$x=\varphi_1(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0),$$
$$y=\varphi_2(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0),$$
$$z=\varphi_3(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0),$$

так что x, y, z были бы выражены в функции времени t и их начальных значений x_0, y_0, z_0.

Зная начальное положение молекулы, мы определили бы с их помощью таким образом положение этой же молекулы в момент t.

Рассмотрим молекулы жидкости, множество которых образует в начальный момент некоторую фигуру F_0; когда эти молекулы сместятся, их множество образует новую фигуру, которая будет деформироваться непрерывным образом, и в момент t множество рассматриваемых молекул образует новую фигуру F.

Мы предположим, что движение потока непрерывно, т. е. что u, v, w — непрерывные функции от x, y, z; тогда между фигурами F_0 и F существуют некоторые соотношения, очевидность которых следует из непрерывности.

Если фигура F_0 является непрерывной кривой или поверхностью, то фигура F будет непрерывной кривой или поверхностью.

Если фигура F_0 представляет собой односвязный объем, то фигура F будет односвязным объемом.

Если фигура F_0 — замкнутая кривая или поверхность, то такой же будет фигура F.

Исследуем, в частности, случай жидкости; именно тот случай, когда жидкость несжимаема, т. е. когда объем жидкой массы не изменяется.

Предположим тогда, что фигура F_0 — объем; по истечении времени t жидкая масса, которая заполняла этот объем, займет другой объем, который будет не чем иным, как фигурой F.

Объем жидкой массы не должен был измениться; следовательно, F_0 и F имеют один и тот же объем, что можно записать так:

$$\int\int\int dxdydz = \int\int\int dx_0dy_0dz_0; \tag{2}$$

первый интеграл распространен на объем F, а второй — на объем F_0.

Мы скажем тогда, что интеграл

$$\int\int\int dxdydz$$

есть *интегральный инвариант*.

Известно, что условие несжимаемости может быть выражено уравнением

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0. \tag{3}$$

Оба уравнения (2) и (3), следовательно, эквивалентны

Обратимся к случаю газа, т. е. к случаю, когда объем текучей массы переменен; тогда неизменной остается масса, так что если через ρ обозначить плотность газа, будем иметь

$$\int\int\int \rho dxdydz = \int\int\int \rho_0 dx_0dy_0dz_0. \tag{4}$$

Первый интеграл распространен на объем F, второй — на объем F_0. Другими словами, интеграл

$$\int\int\int \rho dxdydz$$

есть интегральный инвариант.

В этом случае, так как движение установившееся, уравнение нераз рывности записывается в виде

$$\frac{d(\rho u)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} + \frac{d(\rho w)}{dz} = 0. \tag{5}$$

Следовательно, условия (4) и (5) опять эквивалентны.

234. Второй пример нам доставляет теория вихрей Гельмгольца. Предположим, что фигура F_0 — замкнутая кривая; то же будет и для фигуры F.

Предположим, что поток, сжимаемый или несжимаемый, имеет постоянную температуру и подвержен только влиянию сил, допускающих потенциал; тогда для того чтобы движение оставалось установившимся, необходимо, чтобы u, v, w удовлетворяли определенным условиям, которые здесь нет надобности развивать.

Предположим эти условия выполненными.

Рассмотрим при этом предположении интеграл

$$\int (udx + vdy + wdz).$$

Как мы знаем из теоремы Гельмгольца, этот интеграл будет иметь одно и то же значение вдоль кривой F и вдоль кривой F_0.

Другими словами, этот интеграл есть интегральный инвариант.

Определение интегральных инвариантов

235. В примерах, которые были только что указаны мною, мы легко приходим, по самой природе вопроса, к рассмотрению интегральных инвариантов.

Но ясно, что можно применить эти инварианты, обобщая их определение, в гораздо более распространенных случаях, когда им нельзя было бы больше приписывать столь же простой физический смысл.

Рассмотрим дифференциальные уравнения вида

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = dt, \tag{1}$$

где X, Y, Z — заданные функции от x, y, z.

Если бы мы умели интегрировать эти уравнения, то с их помощью были бы найдены x, y, z в функции от t и их начальных значений x_0, y_0, z_0.

Если мы будем рассматривать t как время, а x, y, z — как координаты движущейся точки M в пространстве, то уравнения (1) определят законы движения этой движущейся точки.

Те же уравнения после интегрирования определили бы нам положение движущейся точки M в момент t, если известно ее начальное положение M_0, координаты которого суть x_0, y_0, z_0.

Если рассматриваются точки, движущиеся по одному и тому же закону, множество которых образует в начальный момент фигуру F_0, то множество этих же точек образует в момент t другую фигуру F, которая будет линией, поверхностью или объемом в зависимости от того, будет ли сама фигура F_0 линией, поверхностью или объемом.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int (Adx + Bdy + Cdz), \tag{2}$$

где A, B, C — известные функции от x, y, z; может случиться, что если F_0 есть линия, этот интеграл (2), распространенный на все элементы линии F, будет постоянной, не зависящей от времени, и равной, следовательно, значению того же интеграла, распространенного на все элементы линии F_0.

Предположим теперь, что F и F_0 — поверхности, и рассмотрим двойной интеграл

$$\int\int (A'dydz + B'dxdz + C'dxdy), \tag{3}$$

где A', B', C' —функции от x, y, z. Может случиться, что этот интеграл имеет одно и то же значение как при распространении его на все элементы поверхности F, так и на все элементы поверхности F_0.

Вообразим теперь, что F и F_0 — объемы, и рассмотрим тройной интеграл

$$\int\int\int Mdxdydz, \tag{4}$$

где M — функция от x, y, z; может случиться, что он имеет одно и то же значение для F и для F_0.

В этих различных случаях мы скажем, что интегралы (2), (3) и (4) являются *интегральными инвариантами.*

Иногда может случиться, что интеграл (2) будет иметь одно и то же значение для линий F и F_0 только тогда, когда эти две кривые замкнуты; или же что двойной интеграл (3) будет иметь одно и то же значение для поверхностей F и F_0 только тогда, когда эти две поверхности замкнуты.

Тогда мы скажем, что (2) является интегральным инвариантом *относительно замкнутых кривых* и что (3) — интегральный инвариант *относительно замкнутых поверхностей.*

236. Использованное нами геометрическое представление не играет, очевидно, никакой существенной роли; мы можем оставить его в стороне, и ничто не помешает более распространить предыдущие определения на случаи, когда число переменных больше трех.

Рассмотрим тогда уравнения

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt, \tag{1}$$

где X_1, $X_2, \ldots, X_n$ — заданные функции от x_1, $x_2, \ldots, x_n$; если бы мы умели их интегрировать, мы нашли бы x_1, x_2, $\ldots$, x_n как функции от t и их начальных значений x_1^0, $x_2^0, \ldots, x_n^0$. Чтобы сохранить ту же терминологию, мы можем назвать точкой M систему значений x_1, $x_2, \ldots, x_n$, а точкой M_0 — систему значений x_1^0, $x_2^0, \ldots, x_n^0$.

Рассмотрим множество точек M_0, образующих многообразие F_0, и множество соответствующих точек M, образующих другое многообразие F *.

Мы предположим, что F_0 и F — непрерывные многообразия p измерений, где $p \leqslant n$.

Рассмотрим тогда интеграл порядка p

$$\int \sum A d\omega, \tag{2}$$

где A — функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а $d\omega$ — произведение p дифференциалов, взятых среди n дифференциалов

$$dx_1, \; dx_2, \; \ldots, \; dx_n.$$

Может оказаться, что этот интеграл имеет одно и то же значение для двух многообразий F и F_0. Тогда мы скажем, что это — *интегральный инвариант.*

Может случиться также, что этот интеграл принимает одно и то же значение для двух многообразий F и F_0, но *только при условии, что эти два многообразия замкнуты.* Тогда это — интегральный инвариант относительно замкнутых многообразий.

Можно еще вообразить другие виды интегральных инвариантов. Допустим, например, что $p=1$ и что F и F_0 сводятся к линиям; может случиться, что интеграл

$$\int (A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_n dx_n) = \int \sum A_i dx_i$$

имеет одно и то же значение для F и F_0 и есть интегральный инвариант; но может также случиться, что интеграл

$$\int \sqrt{\sum B_i dx_i^2 + 2\sum C_{i,k} dx_i dx_k},$$

где B, C, так же как и A, — суть функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$; может случиться, говорю я, что этот интеграл принимает одно и то же значение для F и F_0, и было бы легко вообразить себе другие аналогичные примеры.

Число p будет называться *порядком интегрального инварианта.*

---

* Слово «многообразие» теперь достаточно употребительно, чтобы я не считал необходимым напоминать его определение. Таким образом обозначают всякое непрерывное множество точек (или систему значений): так же, как и в пространстве трех измерений, любая поверхность является многообразием двух измерений, а любая линия — многообразием одного измерения.

Связь инвариантов с интегралами

237. Возьмем снова систему

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}=dt. \tag{1}$$

Если бы мы умели ее интегрировать, мы смогли бы образовать все ее интегральные инварианты.

Действительно, если бы интегрирование было выполнено, можно было представить результат в форме

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1,\\ y_2 &= C_2,\\ &\ldots\ldots\\ y_{n-1} &= C_{n-1},\\ z &= t + C_n, \end{aligned} \tag{2}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, y и z — заданные функции от x.

Заменим переменные, принимая за новые переменные y и z вместо x.

Рассмотрим теперь какой-нибудь интегральный инвариант; этот инвариант должен содержать под знаком $\int$ (который будет повторен p раз, если инвариант имеет порядок p) некоторое выражение, функцию от x и их дифференциалов dx. После замены переменных это выражение станет функцией от y, z и их дифференциалов dy и dz.

Чтобы перейти от точки фигуры F_0 к соответствующей точке фигуры F, следует, не меняя y, заменить z на $z+t$. Следовательно, при переходе от бесконечно малой дуги F_0 к соответствующей дуге F дифференциалы dy и dz не изменяются (в самом деле, величина t, прибавляемая к z, одна и та же для обоих концов дуги); наконец, если рассмотреть бесконечно малую фигуру F_0 любого числа измерений и соответствующую фигуру F, то произведение дифференциалов dy и dz (количество которых равно числу измерений F_0 и F) также не изменится, если перейдем от одной фигуры к другой.

Короче говоря, для того чтобы некоторое выражение было интегральным инвариантом, необходимо и достаточно, чтобы величина z не входила в него; y, dy и dz могут входить в него любым образом.

Рассмотрим выражение того же вида, что и выражение, которое мы рассмотрели в предыдущем параграфе

$$\int \sum A\,d\omega; \tag{3}$$

это выражение представляет интеграл порядка p, A — функция от x_1, $x_2, \ldots, x_n$, $d\omega$ — произведение p дифференциалов, взятых из числа n дифференциалов

$$dx_1,\ dx_2,\ \ldots,\ dx_n.$$

Мы хотим узнать, является ли это выражение интегральным инвариантом; производя замену переменных, указанную выше, приведем выражение (3) к виду

$$\int \sum B d\omega',$$

где B — функция от y и z, $d\omega'$ — произведение p дифференциалов, взятых из числа n дифференциалов

$$dy_1,\ dy_2,\ \ldots,\ dy_{n-1},\ dz.$$

Чтобы выражение (3) было интегральным инвариантом, необходимо и достаточно, чтобы все B были независимы от z и зависели только от y.

Рассмотрим снова, как и в предыдущем параграфе, выражение

$$\int \sqrt{\sum B_i dx_i^2 + 2\sum C_{i,k} dx_i dx_k}, \tag{4}$$

где B_i и $C_{i,k}$ суть функции от x.

После замены переменных это выражение примет вид

$$\int \sqrt{\sum B'_i dx_i'^2 + 2\sum C'_{i,k} dx'_i dx'_k};$$

положил для бо́льшей симметрии в обозначениях

$$x'_i = y_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1); \qquad x'_n = z.$$

Чтобы выражение (4) было интегральным инвариантом, необходимо и достаточно, чтобы все B'_i и $C'_{i,k}$ были независимы от z и зависели только от y.

Относительные инварианты

238. Мы можем попытаться теперь образовать относительные интегральные инварианты на замкнутых многообразиях. Предположим сначала, что $p=1$, и разыщем условие того, что интеграл

$$\int (A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_n dx_n) \tag{1}$$

является интегральным инвариантом относительно замкнутых линий.

Совершим замену переменных, указанную выше, тогда наш интеграл примет вид

$$\int (B_1 dy_1 + B_2 dy_2 + \ldots + B_{n-1} dy_{n-1} + B_n dz),$$

что я могу записать, возвращаясь к более симметричным обозначениям, введенным в конце предыдущего пункта, в виде

$$\int \sum B_i dx'_i. \tag{1bis}$$

Этот интеграл, распространенный на замкнутое одномерное многообразие, т. е. на замкнутую линию, может быть преобразован, согласно теореме Стокса, в двойной интеграл, распространенный на незамкнутое многообразие двух измерений, т. е. на незамкнутую поверхность; имеем

$$\int \sum B_i dx'_i = \int \sum \left(\frac{dB_i}{dx'_k} - \frac{dB_k}{dx'_i}\right) dx'_i dx'_k. \tag{2}$$

Но интеграл в правой части (2) должен быть абсолютным интегральным инвариантом, а не только инвариантом относительно замкнутых многообразий.

Итак, мы заключаем следующее:

Чтобы интеграл (1) был интегральным инвариантом относительно замкнутых линий, *необходимо и достаточно, чтобы все биномы*

$$\frac{dB_i}{dx'_k} - \frac{dB_k}{dx'_i}$$

не зависели от z.

Точно так же пусть

$$\int \sum A d\omega \tag{3}$$

будет интегральным выражением порядка p того же вида, что и в предыдущих пунктах; мы хотим узнать, является ли это выражение интегральным инвариантом относительно замкнутых многообразий порядка p.

Мы предполагаем, что этот интеграл распространен на какое-то замкнутое многообразие порядка p; тогда теорема, аналогичная теореме Стокса, покажет нам, что он может быть преобразован в интеграл порядка $p+1$, распространенный на любое многообразие, замкнутое или незамкнутое, порядка $p+1$. Преобразованный интеграл записывается в виде

$$\int \sum \sum_k \pm \frac{dA}{dx_k} dx_k d\omega. \tag{4}$$

Знак $+$ берется, если p — четное, и поочередно знак $+$ и знак $-$, если p — нечетное. [Я отсылаю за бо́льшими подробностями к своему

мемуару о вычетах двойных интегралов (Acta Mathematica, том 7) и к моему мемуару, опубликованному в юбилейном выпуске Журнала Политехнической школы (Journal de l'École Polytechnique), посвященном столетию журнала [2].]

Необходимое и достаточное условие того, чтобы (3) было интегральным инвариантом порядка p относительно замкнутых многообразий, заключается в том, чтобы (4) было *абсолютным* интегральным инвариантом порядка $p+1$.

239. Возьмем снова выражение (1) из предыдущего пункта и предположим, что оно является относительным инвариантом, скажем, интегральным инвариантом относительно замкнутых линий.

Приведем его к виду (1bis) нашей заменой переменных.

Пусть M_0 есть точка F_0, а

$$y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, z$$

— ее координаты (в новых переменных).

Пусть M — соответствующая точка F, а

$$y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, z+t$$

— ее координаты.

B_k будут функциями от y и z, но я выделю z, записывая B_k в виде

$$B_k(z).$$

Тогда, если линия F_0 замкнута, мы будем иметь

$$\int \sum B_k(z+t)\,dx'_k = \int \sum B_k(z)\,dx'_k;$$

это означает, что выражение

$$\sum [B_k(z+t) - B_k(z)]\,dx'_k \tag{3}$$

есть полный дифференциал, который я полагаю равным dV; функция V будет зависеть не только от y и z, но еще и от t. При $t=0$ она должна свестись к постоянной.

Если мы предположим t бесконечно малым и обозначим через $B'_k(z)$ производную от $B_k(z)$ по z, то выражение (3) приведется к

$$\sum [tB'_k(z)]\,dx'_k.$$

Тогда выражение

$$\sum B'_k(z)\,dx'_k \tag{4}$$

есть полный дифференциал, который я полагаю равным dU. Функция U, определенная таким образом, будет зависеть от y и z, но не будет более зависеть от t. Я снова выделю z, записав $U(z)$; тогда получается

$$\frac{dV}{dt} = \int \sum B'_k(z+t)\, dx'_k = \int dU(z+t) = U(z+t) + f(t),$$

где $f(t)$ — произвольная функция от t. Но функцию $U(z)$ можно рассматривать как производную по z от некоторой другой функции $W(z)$, зависящей также от y, и мы получим

$$\frac{d}{dt} W(z+t) = U(z+t).$$

Так как, с другой стороны, V должна при $t=0$ свестись к постоянной, то окончательно придем к заключению

$$V = W(z+t) - W(z) + \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ означает произвольную функцию только от t, которую, впрочем, можно было бы положить равной нулю, не ограничивая существенно общности.

Тогда находим

$$B_k(z) = \frac{d}{dx'_k} W(z) + C_k,$$

где C_k не зависит от z, так что выражение (1bis) приводится к виду

$$\int dW + \int \sum C_k dx'_k,$$

где первый интеграл есть интеграл от полного дифференциала, а второй — абсолютный интегральный инвариант.

240. Рассмотрим таким же образом относительный инвариант порядка выше первого; пусть

$$\int \sum A d\omega$$

есть этот инвариант, который после замены переменных перейдет в

$$\int \sum B d\omega'.$$

Интеграл

$$\int \sum [B(z+t) - B(z)]\, d\omega' = J \qquad (1)$$

должен быть нулем, каково бы ни было замкнутое многообразие порядка p, на которое он распространен.

Следовательно, он должен удовлетворять определенным «условиям интегрируемости», аналогичным тем, которые выражают, что дифференциал первого порядка есть полный дифференциал.

Рассмотрим теперь многообразие V p измерений, но незамкнутое и ограниченное многообразием v $p-1$ измерения, которое будет служить ему границей.

Интеграл (1), распространенный на многообразие V, не будет нулем, но если его вычислить для других аналогичных многообразий V', V'', . . ., имеющих ту же границу v, найдем одно и то же значение, т. е. что значение интеграла (1) зависит только от границы v.

Он равен интегралу порядка $p-1$

$$J = \oint \sum C d\omega'', \tag{2}$$

распространенному на многообразие v, где $d\omega''$ означает любое произведение $p-1$ дифференциалов, причем C есть функция от y, z и t.

Очевидно, интеграл (2) есть функция от t, зависящая, кроме того, от многообразия v.

Рассмотрим его производную по t; мы будем иметь

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \frac{dC}{dt} d\omega'' = \int \sum B'(z+t)\, d\omega'.$$

Эта производная, как это показывает ее последнее выражение, не меняется, если заменим t на $t-h$ и одновременно преобразуем V (или v), заменяя всюду z на $z+h$.

Отсюда заключаем, что J имеет следующий вид:

$$J = \int \sum D(z+t)\, d\omega'' - \int \sum D(z)\, d\omega'',$$

где $D(z)$ — функция от x, y, z.

Интеграл

$$\int \sum D(z)\, d\omega'' \tag{3}$$

порядка $p-1$, однако его легко можно преобразовать в интеграл порядка p; достаточно применить преобразование, которое позволило нам в п. 238 перейти от интеграла (3) к интегралу (4), и обратное преобразованию, при помощи которого мы в настоящем пункте перешли от интеграла (1) к интегралу (2).

Интеграл (3), распространенный на многообразие v, равен поэтому интегралу порядка p

$$\int \sum E(z)\, d\omega', \tag{4}$$

распространенному на многообразие V.

По аналогии с терминологией, принятой для однократных интегралов, мы скажем, что интеграл (4) есть интеграл от полного дифференциала. И действительно:

1) он равен нулю для всякого замкнутого многообразия;

2) он приводи́м к интегралу меньшего порядка.

Установив это, будем иметь

$$J=\int\sum E(z+t)\,d\omega'-\int\sum E(z)\,d\omega',$$

где интегралы распространены на многообразие V.

Но это равенство может быть записано еще в виде

$$\int\sum[B(z+t)-E(z+t)]\,d\omega'=\int\sum[B(z)-E(z)]\,d\omega',$$

и оно верно для любого многообразия V.

Это значит, что

$$\int\sum[B(z)-E(z)]\,d\omega'$$

есть абсолютный интегральный инвариант.

Итак, мы приходим к следующему результату.

Всякий относительный интегральный инвариант есть сумма интеграла от полного дифференциала и абсолютного интегрального инварианта.

241. Мы видели в п. 238, каким образом из относительного инварианта порядка p можно вывести абсолютный инвариант порядка $p+1$.

Очевидно, та же процедура применима к абсолютным инвариантам, так что можно было бы попытаться применить ее шаг за шагом и последовательно построить инварианты порядка $p+2$, $p+3$, ...

Однако мы скоро остановились бы на этом пути.

Действительно, имеется случай, когда процедура, о которой идет речь, является иллюзорной, а именно, когда инвариант, который мы хотим преобразовать, является интегралом от полного дифференциала.

Интегральный инвариант, к которому привело бы преобразование, был бы тогда тождественно равен нулю.

Если теперь преобразовать инвариант порядка p, то получится инвариант порядка $p+1$, но этот инвариант есть интеграл от полного дифференциала, так что если мы захотим его снова преобразовать, то придем в результате к тождественному нулю.

Связь инвариантов с уравнением в вариациях

242. Возьмем снова систему

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}=dt. \qquad (1)$$

Мы можем составить соответствующие уравнения в вариациях в том смысле, как они были определены в начале главы IV.

Для того чтобы составить эти уравнения, заменяем в уравнениях (1) x_i на $x_i + \xi_i$ и пренебрегаем квадратами ξ_i; таким образом находим систему линейных уравнений

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \frac{dX_k}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX_k}{dx_2}\xi_2 + \ldots + \frac{dX_k}{dx_n}\xi_n. \tag{2}$$

Между интегралами уравнений (2) и интегральными инвариантами уравнений (1) имеется внутренняя связь, которую легко заметить.

Пусть

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \text{const}$$

— какой-либо интеграл уравнений (2). Это будет однородная функция относительно ξ и, кроме того, зависящая каким-либо образом от x. Я всегда смогу предположить, что эта функция F однородна относительно ξ степени 1, ибо если бы это было не так, то стоит лишь возвысить F в подходящую степень, чтобы найти однородную функцию степени 1.

Рассмотрим теперь выражение

$$\int F(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n); \tag{3}$$

я говорю, что это интегральный инвариант системы (1).

Я замечаю сначала, что величина под знаком интеграла

$$F(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$$

есть бесконечно малая первого порядка, поскольку величины $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ — бесконечно малые первого порядка, и что F — однородная функция первого порядка относительно этих количеств.

Интеграл (3), следовательно, конечен.

Установив это, допустим сначала, что фигура F_0 сводится к бесконечно малой линии, концы которой имеют следующие координаты:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$
$$x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, \ldots, x_n + \xi_n.$$

Интеграл (3) сведется к единственному элементу и, следовательно, будет равен

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

Это выражение, будучи интегралом уравнений (2), останется постоянным и будет иметь одно и то же значение для линии F_0 и для линии F.

Если теперь линия F_0 и, следовательно, линия F конечны, мы разбиваем линию F_0 на бесконечно малые части. Интеграл (3), распространенный на одну из этих бесконечно малых частей линии F_0, будет равен ин-

гралу (3), распространенному на соответствующую бесконечно малую часть линии F. Интеграл, распространенный целиком на всю линию F_0, будет равен интегралу (3), распространенному целиком на всю линию F.

Итак, интеграл (3) есть интегральный инвариант, что и требовалось доказать.

Обратно, допустим, что (3) — интегральный инвариант первого порядка; я говорю, что

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

будет интегралом уравнений (2).

Действительно, интеграл (3) должен быть одним и тем же для линии F_0 и для линии F, каковы бы ни были эти линии, и, в частности, если F_0 сводится к бесконечно малому элементу, концы которого имеют координаты

$$x_i \text{ и } x_i + \xi_i.$$

Тогда интеграл (3) сводится, как мы это уже видели, к

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n). \tag{4}$$

Поскольку интеграл есть инвариант, это выражение (4) должно быть постоянным.

Итак, это есть интеграл уравнений (2), что и требовалось доказать.

243. Посмотрим теперь, чему соответствуют инварианты порядка выше первого.

Рассмотрим какие-нибудь два частных решения уравнений (2); пусть

$$\begin{gathered} \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \\ \xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n' \end{gathered} \tag{5}$$

— эти два решения.

Могут существовать функции

$$F(x_i, \xi_i, \xi_i'),$$

которые одновременно зависят от x_i, ξ_i и ξ_i' и которые сводятся, каковы бы ни были выбранные два решения, к постоянным, не зависящим от времени.

Другими словами, функция F будет интегралом системы

$$\begin{gathered} \frac{d\xi_k}{dt} = \frac{dX_k}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX_k}{dx_2}\xi_2 + \ldots + \frac{dX_k}{dx_n}\xi_n, \\ \frac{d\xi_k'}{dt} = \frac{dX_k}{dx_1}\xi_1' + \frac{dX_k}{dx_2}\xi_2' + \ldots + \frac{dX_k}{dx_n}\xi_n', \end{gathered} \tag{6}$$

которой удовлетворяют ξ_i и ξ_i'.

Сделаем более частную гипотезу и предположим, что F имеет вид

$$\sum A_{ik}(\xi_i\xi'_k - \xi_k\xi'_i),$$

где A_{ik} — функции только от x.

Тогда я утверждаю, что двойной интеграл

$$J = \int \sum A_{ik} dx_i dx_k$$

есть интегральный инвариант уравнений (1).

Предположим, в самом деле, что фигура F_0 сводится к бесконечно малому параллелограмму, координаты вершин которого имеют значения

$$x_i, \quad x_i + \xi_i, \quad x_i + \xi'_i, \quad x_i + \xi_i + \xi'_i,$$

взятые при $t=0$.

Фигура F также будет подобна бесконечно малому параллелограмму, координаты вершин которого имеют значения

$$x_i, \quad x_i + \xi_i, \quad x_i + \xi'_i, \quad x_i + \xi_i + \xi'_i,$$

взятые при $t=t$.

Интеграл J сводится к единственному элементу, значение которого в точности равно

$$\sum A_{ik}(\xi_i\xi'_k - \xi_k\xi'_i),$$

и, так как это выражение по предположению есть интеграл системы (6), то он будет иметь одно и то же значение для обеих фигур F и F_0.

Предположим теперь, что F и F_0 — две конечные поверхности; разложим F_0 на бесконечно малые параллелограммы, каждому из которых будет соответствовать элементарный параллелограмм на F. Значение J одно и то же для каждого элемента на F_0 и для соответствующего элемента на F; следовательно, оно опять одинаково для всей поверхности F_0 и для всей поверхности F.

Итак, интеграл J есть интегральный инвариант.

Обратное утверждение можно было бы доказать так же, как и в предыдущем пункте.

244. Очевидно, эта теорема является общей и применима к инвариантам порядка выше второго. Сформулируем ее еще раз для инвариантов

третьего порядка. Рассмотрим три частных решения уравнений (2), ξ_i, ξ'_i, ξ''_i; эти три решения должны удовлетворять системе

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_k}{dt} &= \sum \frac{dX_k}{dx_i}\xi_i, \\ \frac{d\xi'_k}{dt} &= \sum \frac{dX_k}{dx_i}\xi'_i, \\ \frac{d\xi''_k}{dt} &= \sum \frac{dX_k}{dx_i}\xi''_i. \end{aligned} \tag{7}$$

Если система (7) допускает интеграл вида

$$\sum A_{i,k,l} \begin{vmatrix} \xi_i & \xi'_i & \xi''_i \\ \xi_k & \xi'_k & \xi''_k \\ \xi_l & \xi'_l & \xi''_l \end{vmatrix}, \tag{8}$$

где коэффициенты A — функции от x, то тройной интеграл

$$\int \sum A_{i,k,l}\, dx_i dx_k dx_l \tag{9}$$

будет интегральным инвариантом уравнений (1), и наоборот [3].

Преобразование инвариантов

245. Так как инварианты приводятся таким образом к интегралам уравнения в вариациях, то легко найти очень большое число способов. которые позволяют преобразовывать эти инварианты.

Если известно некоторое число интегральных инвариантов уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \tag{1}$$

то из каждого из них выведем интеграл уравнений в вариациях

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \sum \frac{dX_k}{dx_i}\xi_i. \tag{2}$$

Комбинируя между собой эти различные интегралы, получим новый интеграл уравнений (2), откуда выведем новый инвариант уравнений (1).

Начнем с изучения случая инвариантов первого порядка.

Пусть

$$\Phi_1,\ \Phi_2,\ \ldots,\ \Phi_p$$

— некоторое число интегралов уравнений (1), причем эти интегралы будут функциями только от x_i.

Пусть теперь

$$\int F_1(dx_i),\ \int F_2(dx_i),\ \ldots,\ \int F_q(dx_i)$$

— q интегральных инвариантов первого порядка тех же уравнений (1).

Функции под знаком интеграла

$$F_1(dx_i),\ F_2(dx_i),\ \ldots,\ F_q(dx_i)$$

зависят от x_i и их дифференциалов dx_i. Они могут зависеть от x_i любым образом; однако относительно дифференциалов

$$dx_1,\ dx_2, \ldots,\ dx_n$$

они должны быть однородными первой степени.

Тогда

$$F_1(\xi_i),\ F_2(\xi_i),\ \ldots,\ F_q(\xi_i)$$

будут интегралами уравнений (2) и будут однородными первой степени относительно ξ_i.

Пусть теперь

$$\Theta(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \ldots,\ \Phi_p;\ F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_q) = \Theta[\Phi_k,\ F_l]$$

— функция от Φ и F, зависящая от Φ любым образом, но однородная первой степени относительно F.

Тогда функция

$$\Theta[\Phi_k,\ F_l(\xi_i)]$$

будет новым интегралом уравнений (2); кроме того, она будет однородной функцией первой степени относительно ξ_i.

Отсюда следует, что

$$\int \Theta[\Phi_k,\ F_l(dx_i)]$$

— интегральный инвариант первого порядка уравнений (1).

Можно было бы прийти столь же легко к тому же результату, преобразуя инварианты заменой переменных п. 237.

Например,

$$\int (F_1 + F_2 + \ldots + F_q)$$

и

$$\int \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_q^2}$$

будут интегральными инвариантами.

246. Эти же вычисления можно применить к инвариантам более высокого порядка.

Пусть снова

$$\Phi_1,\ \Phi_2,\ \ldots,\ \Phi_p$$

p интегралов уравнений (1) и

$$\int F_1(dx_i dx_k),\ \int F_2(dx_i dx_k),\ \ldots,\ \int F_q(dx_i dx_k)$$

— q интегральных инвариантов второго порядка. F будут функциями x_i и произведений дифференциалов

$$dx_i dx_k.$$

Они будут однородными первой степени относительно этих произведений.

Тогда

$$F_l(\xi_i\xi'_k - \xi_k\xi'_i)$$

будут интегралами системы (6) п. 243.

Если теперь

$$\Theta[\Phi_\mu,\ F_l]$$

есть какая-либо функция от Φ и F, однородная первой степени относительно F, то выражение

$$\Theta[\Phi_k,\ F_l(\xi_i\xi'_k - \xi'_i\xi_k)]$$

будет интегралом тех же уравнений (6); кроме того, оно будет однородным первой степени относительно определителей

$$\xi_k\xi'_i - \xi'_k\xi_i.$$

Отсюда следует, что двойной интеграл

$$\int \Theta[\Phi_\mu,\ F_l(dx_i dx_k)]$$

будет интегральным инвариантом второго порядка уравнений (1).

247. Таким образом, мы имеем средство, зная несколько инвариантов одного и того же порядка, комбинировать их так, чтобы получить другие инварианты того же порядка.

Тот же способ позволяет, если известно несколько инвариантов одного и того же порядка, получить новые инварианты другого порядка.

Пусть, например,

$$\int F_1(dx_i),\ \int F_2(dx_i)$$

— два интегральных инварианта первого порядка; я предполагаю, и это есть наиболее общий случай, что F_1 и F_2 — линейные и однородные функции от дифференциалов dx_i.

Выражения

$$F_1(\xi_i),\ F_2(\xi_i)$$

будут однородными функциями первого порядка относительно ξ_i и они будут интегралами уравнений (2).

Аналогично

$$F_1(\xi'_i),\ F_2(\xi'_i)$$

будут интегралами уравнений (6).

Отсюда вытекает, что

$$F_1(\xi_i)F_2(\xi'_k) - F_1(\xi'_i)F_2(\xi_k) \tag{10}$$

будет интегралом системы (6).

Так как F_1 и F_2 линейны относительно ξ_i, то будем иметь

$$F_1(\xi_i + \xi'_i) = F_1(\xi_i) + F_1(\xi'_i);$$
$$F_2(\xi_i + \xi'_i) = F_2(\xi_i) + F_2(\xi'_i).$$

Отсюда следует, что выражение (10), которое, кроме того, меняет знак при перестановке ξ_i и ξ'_i, не изменяется при замене ξ_i на $\xi_i + \xi'_i$.

Отсюда мы делаем вывод, что это выражение (10) — линейная и однородная функция от определителей

$$\xi_i\xi'_k - \xi_k\xi'_i,$$

причем коэффициенты зависят только от x, но не от ξ и ξ'.

Следовательно, из выражения (10) можно вывести интегральный инвариант второго порядка уравнений (1).

Пусть теперь

$$\int F_1(dx_i),\ \int F_2(dx_i dx_k)$$

— два интегральных инварианта уравнений (1), один — первого порядка, а другой — второго. Я предположу, что F_1 и F_2 — линейные и однородные функции: первая — относительно n дифференциалов dx_i, вторая — относительно $n(n-1)/2$ произведений

$$dx_i dx_k.$$

Функции

$$F_1(\xi_i),\ F_2(\xi_i\xi'_k - \xi_k\xi'_i)$$

будут интегралами системы (6).

Выражение

$$F_1(\xi_i)F_2(\xi'_i\xi''_k - \xi'_k\xi''_i) + F_1(\xi'_i)F_2(\xi''_i\xi_k - \xi''_k\xi_i) + F_1(\xi''_i)F_2(\xi_i\xi'_k - \xi_k\xi'_i) \quad (11)$$

будет интегралом системы (7).

С другой стороны, легко проверить, что оно будет линейным и однородным относительно определителей

$$\begin{vmatrix} \xi_i & \xi'_i & \xi''_i \\ \xi_k & \xi'_k & \xi''_k \\ \xi_l & \xi'_l & \xi''_l \end{vmatrix}.$$

Поэтому из него можно вывести интегральный инвариант третьего порядка.

Пусть теперь

$$\int F_1(dx_i dx_k),\ \int F_2(dx_i dx_k)$$

— два инварианта второго порядка уравнений (1).

Мы выведем из них два интеграла уравнений (6), а именно:

$$F_1(\xi_i\xi'_k - \xi_k\xi'_i),\ F_2(\xi_i\xi'_k - \xi_k\xi'_i),$$

что я смогу записать для краткости

$$F_1(\xi\xi'),\ F_2(\xi\xi').$$

Тогда выражение

$$F_1(\xi\xi')F_2(\xi''\xi''') + F_1(\xi''\xi''')F_2(\xi\xi') + F_1(\xi\xi'')F_2(\xi'''\xi') + F_1(\xi'''\xi')F_2(\xi\xi'') +$$
$$+ F_1(\xi\xi''')F_2(\xi'\xi'') + F_1(\xi'\xi'')F_2(\xi\xi''') \quad (12)$$

будет интегралом системы, полученной присоединением к уравнениям (7) уравнений

$$\frac{d\xi'''_k}{dt} = \sum \frac{dX_k}{dx_i}\xi'''_i.$$

Сверх того, это будет линейная и однородная функция относительно определителей, составленных из четырех величин ξ_i и соответствующих величин ξ'_i, ξ''_i, ξ'''_i.

Я продолжаю предполагать, разумеется, что F_1 и F_2 однородны и линейны относительно произведений $dx_i dx_k$.

Следовательно, из выражения (12) можно вывести интегральный инвариант четвертого порядка.

Следует отметить, что этот инвариант не становится тождественным нулем, если предположить, что

$$F_1 = F_2.$$

Тогда выражение (12), деленное на два, сводится к

$$F_1(\xi\xi')\,F_1(\xi''\xi''') + F_1(\xi\xi'')\,F_1(\xi'''\xi') + F_1(\xi\xi''')\,F_1(\xi'\xi'').$$

Поэтому из инварианта второго порядка всегда можно вывести инвариант четвертого порядка; тем же способом из него получим инвариант шестого порядка; и вообще, получим из него инвариант порядка $2p$ (где $2p$ — любое четное число).

248. Пусть вообще

$$\int F_1, \int F_2$$

— два любых инварианта уравнений (1), первый — порядка p, второй — порядка q.

Я предполагаю, что F_1 и F_2 — линейные и однородные функции, первая — относительно произведений p дифференциалов dx, вторая — относительно произведений q дифференциалов.

Пусть

$$\xi_i^{(1)},\ \xi_i^{(2)},\ \ldots,\ \xi_i^{(p+q)}$$

суть $p+q$ решений уравнений (2). Эти решения будут удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi_k^{(\mu)}}{dt} = \sum \frac{dX_k}{dx_i}\,\xi_i^{(\mu)} \tag{13}$$

$$(i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad \mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ p+q).$$

Тогда пусть F_1' означает результат замены в F_1 каждого произведения p дифференциалов соответствующим определителем, образованным при помощи p решений

$$\xi_i^{(1)},\ \xi_i^{(2)}, \ldots, \xi_i^{(p)}.$$

Пусть также F_2' означает результат замены в F_2 каждого произведения q дифференциалов соответствующим определителем, образованным при помощи q решений

$$\xi_i^{(p+1)},\ \xi_i^{(p+2)},\ \ldots,\ \xi_i^{(p+q)}.$$

Тогда произведение

$$F_1'F_2'$$

будет интегралом системы (13).

При этих предположениях подвергнем $p+q$ букв

$$\xi_i^{(1)},\ \xi_i^{(2)},\ \ldots,\ \xi_i^{(p+q)}$$

какой-либо перестановке. Произведение $F_1'F_2'$ перейдет в

$$F_1''F_2''$$

и это снова будет интегралом системы (13).

Мы приписываем этому произведению знак $+$, если перестановка принадлежит четной группе, т. е. если она приводится к четному числу перестановок между двумя буквами. Наоборот, мы приписываем произведению знак —, если перестановка не принадлежит к четной группе, т. е. если она приводится к нечетному числу перестановок между двумя буквами.

Во всех случаях выражение

$$\pm F_1''F_2'' \tag{14}$$

будет интегралом системы (13).

Мы имеем $(p+q)!$ возможных перестановок, следовательно, получим $(p+q)!$ выражений, аналогичных (14). Однако среди них будем иметь только

$$\frac{(p+q)!}{p!q!}$$

различных, ибо выражение (14) не меняется, если переставлять между собой только p букв, входящих в F_1'', и с другой стороны, только q букв между собой, которые входят в F_2''.

Составим теперь сумму всех выражений (14). Опять получим интеграл системы (13). Но этот интеграл будет линейным и однородным относительно определителей порядка $p+q$, которые можно составить из букв

$$\xi_i^{(1)},\ \xi_i^{(2)},\ \ldots,\ \xi_i^{(p+q)}.$$

Следовательно, из него можно вывести инвариант порядка $p+q$ уравнений (1).

Если $p=q$ и F_1 тождественно с F_2, то инвариант, полученный таким образом, будет тождественным нулем, если p — нечетное; но он не будет таковым, если p — четное, как я объяснил это в конце предыдущего параграфа.

Другие соотношения между инвариантами и интегралами

249. Посмотрим теперь, каким образом, зная некоторое число инвариантов, можно вывести один или несколько интегралов.

Сперва я предполагаю, что известны два инварианта n-го порядка

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

и

$$\int M' dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

где M и M' — функции от x; я утверждаю, что отношение M'/M будет интегралом уравнений (1).

Действительно, рассмотрим уравнения в вариациях (2), и пусть

$$\xi_i^{(1)},\ \xi_i^{(2)},\ \ldots,\ \xi_i^{(n)}$$

— n любых линейно независимых решений этих уравнений.

Эти n решений будут удовлетворять системе дифференциальных уравнений, аналогичной системам (6) и (7), которую я буду называть системой S.

Пусть Δ — определитель, образованный при помощи n^2 букв $\xi_i^{(k)}$. Тогда

$$M\Delta \text{ и } M'\Delta$$

будут интегралами системы S; следовательно, то же будет и для отношения

$$\frac{M'}{M},$$

и так как это отношение зависит только от x и не зависит от ξ, то оно будет интегралом уравнений (1).

Тот же результат можно доказать другим способом.

Совершим замену переменных п. 237. Наши два интегральных инварианта превратятся в

$$\int MJ dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1} dz$$

и

$$\int M'J dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1} dz,$$

где J означает якобиан, или функциональный определитель старых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ относительно новых переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, z$.

Согласно п. 237, MJ и $M'J$ должны зависеть только от

$$y_1, y_2, \ldots, y_{n-1};$$

следовательно, то же имеет место и для отношения M'/M, а так как всякая функция от y_i есть интеграл уравнений (1), то это отношение — интеграл уравнений (1), что и требовалось доказать.

250. Можно видоизменять эту методику несколькими способами. Пусть, например,

$$\int F_1(dx_i),\ \int F_2(dx_i),\ \ldots,\ \int F_p(dx_i)$$

— p линейных инвариантов первого порядка. Предположим, что мы имеем тождественно

$$F_1 = M_2F_2 + M_3F_3 + \ldots + M_pF_p,$$

где M_i зависят только от x, но не от дифференциалов dx.

Я говорю, что M_i, если $p \leqslant n+1$, будут интегралами уравнений (1).

Действительно, пусть $A_{i,\,k}$ — коэффициент при dx_k в F_i; мы должны будем иметь

$$A_{1,\,k} = M_2A_{2,\,k} + M_3A_{3,\,k} + \ldots + M_pA_{p,\,k}.$$

Совершим замену переменных п. 237; наши инварианты перейдут в

$$\int F'_1(dx'_i),\ \int F'_2(dx'_i),\ \ldots,\ \int F'_p(dx'_i).$$

Если, кроме того, положим

$$F'_i = \sum A'_{i,\,k}dx'_k,$$

то получим

$$A'_{1,\,k} = M_2A'_{2,\,k} + M_3A'_{3,\,k} + \ldots + M_pA'_{p,\,k}.$$

Мы будем иметь здесь n линейных уравнений, из которых сможем найти M_i, лишь бы только было $p \leqslant n+1$.

Но коэффициенты $A_{i,\,k}$, согласно п. 237, зависят только от y, но не от z; следовательно, то же будет и для M_i, а это значит, что M_i — интегралы уравнений (1).

251. Пусть теперь

$$F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

— интеграл; ясно, что

$$\int \left(\frac{dF}{dx_1}\,dx_1 + \frac{dF}{dx_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{dF}{dx_n}\,dx_n\right)$$

будет интегральным инвариантом первого порядка.

Тогда можно поставить себе следующий вопрос:

Рассмотрим интегральный инвариант первого порядка

$$\int (A_1dx_1 + A_2dx_2 + \ldots + A_ndx_n)$$

и предположим, что величина под знаком интеграла есть полный дифференциал; какое соотношение будет между интегралом от этого полного дифференциала и интегралами уравнений (1)?

Чтобы отдать себе в этом отчет, совершим замену переменных п. 237; наш инвариант перейдет в

$$\int dU = \int (B_1 dy_1 + B_2 dy_2 + \ldots + B_{n-1} dy_{n-1} + C dz).$$

Коэффициенты B и C должны зависеть от y, но не от z.

Если выражение dU есть полный дифференциал, то функция U должна будет, следовательно, иметь вид

$$U = U_0 + zU_1,$$

где U_0 и U_1 — интегралы уравнений (1). Тогда будем иметь

$$\frac{dU}{dt} = U_1.$$

Но мы имеем, если вернуться к старым переменным x_i,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dx_1} X_1 + \frac{dU}{dx_2} X_2 + \ldots + \frac{dU}{dx_n} X_n.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dU}{dx_1} X_1 + \frac{dU}{dx_2} X_2 + \ldots + \frac{dU}{dx_n} X_n$$

есть интеграл уравнений (1). Если это выражение равно нулю, то имеем

$$U_1 = 0, \quad U = U_0,$$

и U есть интеграл уравнений (1).

252. Можно было бы умножить число примеров этого рода; я приведу из них лишь один.

Рассмотрим инвариант первого порядка вида

$$\int \sqrt{\sum B_i dx_i^2 + 2 \sum C_{i,k} dx_i dx_k} = \int \sqrt{\Phi}.$$

Пусть Δ — дискриминант квадратичной формы Φ.

Совершим замену переменных п. 237; наш инвариант перейдет в

$$\int \sqrt{\sum B'_i dx'^2_i + 2 \sum C'_{i,k} dx'_i dx'_k} = \int \sqrt{\Phi'}.$$

Пусть Δ' — дискриминант квадратичной формы Φ'.

Пусть J — якобиан, или функциональный определитель x относительно x'; будем иметь

$$\Delta' = \Delta J^2.$$

Кроме того, очевидно, что Δ' будет (как и коэффициенты B' и C') интегралом уравнений (1).

Пусть теперь дан инвариант n-го порядка

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

После замены переменных п. 237 он станет

$$\int MJ dx'_1 dx'_2 \ldots dx'_n,$$

и MJ должно быть интегралом уравнений (1).

Отсюда я заключаю, что

$$\frac{\Delta'}{M^2 J^2},$$

т. е.

$$\frac{\Delta}{M^2}$$

должно быть интегралом уравнений (1).

Замены переменных

253. При любой замене переменных x_i, не затрагивающей переменной t, которая представляет время, необходимо только применить к интегральным инвариантам обычные правила замены переменных в простых или кратных определенных интегралах. Мы уже делали это несколько раз.

Однако замена переменной t представляет бо́льшую трудность.

A priori могло бы даже показаться, что это преобразование не должно вести ни к какому результату.

И действительно: рассмотрим систему

$$dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}. \tag{1}$$

Введем новую переменную t_1, определяемую соотношением

$$\frac{dt}{dt_1} = Z,$$

где Z — заданная функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Система (1) превратится в

$$dt_1 = \frac{dx_1}{ZX_1} = \frac{dx_2}{ZX_2} = \ldots = \frac{dx_n}{ZX_n}. \tag{2}$$

Предположим, что начальные значения x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 представляют собой координаты некоторой точки M_0 пространства n измерений.

Если движение этой точки определяется уравнениями (1), где t представляет время, то эта точка в момент $t = \tau$ придет в M.

Если движение, напротив, определяется уравнениями (2), где t_1 представляет время, то точка M_0 в момент $t_1 = \tau$ придет в M'.

Рассмотрим теперь фигуру F_0, занятую в нулевой момент различными точками M_0.

Если движение и деформация этой фигуры определяются уравнениями (1), то в момент $t = \tau$ она превратится в новую фигуру F.

Если движение определяется уравнениями (2), то фигура F_0 в момент $t_1 = \tau$ превратится в новую фигуру F', отличную от F.

F' не только будет отличной от F, но она не будет также совпадать, вообще говоря, с каким-либо из положений, занимаемых F в момент, отличный от момента $t = \tau$.

Поэтому кажется, что параметры проблемы основательно изменены, и мы не должны ожидать, чтобы из инвариантов (1) можно было вывести инварианты (2).

Вот что, однако, происходит с инвариантами порядка n.

Совершим замену переменных п. 237; система (1) превратится в

$$dt = \frac{dy_1}{0} = \frac{dy_2}{0} = \ldots = \frac{dy_{n-1}}{0} = \frac{dz}{1}, \tag{1bis}$$

а система (2) — в

$$dt_1 = \frac{dy_1}{0} = \frac{dy_2}{0} = \ldots = \frac{dy_{n-1}}{0} = \frac{dz}{Z}, \tag{2bis}$$

где предполагается, что Z должна быть выражена в функции от y и z.

Теперь положим

$$z_1 = \int \frac{dz}{Z},$$

где интегрирование выполняется по z (y рассматриваются как постоянные), а нижний предел может зависеть от y.

Система (2) примет вид

$$dt_1 = \frac{dy_1}{0} = \frac{dy_2}{0} = \ldots = \frac{dy_{n-1}}{0} = \frac{dz_1}{1} \tag{2ter}$$

и будет иметь ту же форму, что и (1bis).

Пусть тогда

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

есть инвариант n-го порядка уравнений (1); при помощи замены переменных п. 237 он станет

$$\int MJ dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1} dz,$$

где J — якобиан x относительно y и z, MJ должно быть функцией от y.

Тогда

$$\int MJ dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1} dz_1$$

будет инвариантом уравнений (2ter);

$$\int \frac{MJ}{Z} dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1} dz$$

будет инвариантом уравнений (2bis), и, наконец,

$$\int \frac{M}{Z} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

будет инвариантом уравнений (2).

Различные замечания

253bis. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dx_i = X_i dt \qquad (1)$$

и их уравнения в вариациях

$$d\xi_i = \Xi_i dt. \qquad (2)$$

Предположим, что уравнения (1) допускают интегральный инвариант первого порядка

$$\int \sum A_i dx_i;$$

выражение $\sum A_i \xi_i$ будет интегралом уравнений (2).

С другой стороны, эти уравнения (2) будут допускать в качестве решения

$$\xi_i = \varepsilon X_i,$$

где ε — любая бесконечно малая постоянная [4].

Действительно, пусть

$$x_i = \varphi_i(t)$$

есть какое-либо решение уравнений (1); если ε — очень малая постоянная, то

$$x_i = \varphi_i(t+\varepsilon) = \varphi_i(t) + \varepsilon \frac{dx_i}{dt}$$

опять будет решением уравнений (1), и

$$\xi_i = \varphi_i(t+\varepsilon) - \varphi_i(t) = \varepsilon \frac{dx_i}{dt} = \varepsilon X_i$$

будет решением уравнений (2).

Отсюда следует, что

$$\sum A_i \xi_i = \varepsilon \sum A_i X_i$$

должно быть постоянно.

Следовательно, $\Sigma A_i X_i$ является интегралом уравнений (1).

Предположим теперь, что уравнения (1) допускают интегральный инвариант второго порядка

$$\int\int \sum A_{i,k} dx_i dx_k .$$

Тогда

$$\sum A_{i,k} (\xi_i \xi'_k - \xi_k \xi'_i)$$

будет интегралом уравнений (2) и уравнений (2bis), которые выводим из (2), заменяя ξ_i на ξ'_i.

Положим

$$\xi'_i = \varepsilon X_i,$$

где ε — постоянная. Это позволительно, так как $\xi'_i = \varepsilon X_i$ — решение (2bis).

Тогда

$$\sum A_{i,k} (\xi_i X_k - X_i \xi_k)$$

будет интегралом (2); это показывает, что

$$\int \sum A_{i,k} (X_k dx_i - X_i dx_k)$$

— интегральный инвариант первого порядка уравнений (1).

Итак, этот способ позволяет найти инвариант порядка $n-1$, когда известен инвариант порядка n; иногда эта методика может быть иллю-

зорной, так как инвариант, полученный таким образом, может быть тождественным нулем.

Рассмотрим теперь инвариант следующего вида:

$$\int \sum (A_i + tB_i)\,dx_i,$$

где A_i и B_i — функции от x; в дальнейшем мы встретимся с инвариантами этого вида.

Тогда

$$\sum (A_i + tB_i)\,\xi_i$$

будет интегралом уравнений (2); отсюда следует, что выражение

$$\sum (A_i + tB_i)\,X_i$$

должно быть постоянным.

Пусть для краткости

$$\Phi = \sum A_i X_i;\quad \Phi_1 = \sum B_i X_i;$$

выражение

$$\Phi + t\Phi_1$$

должно быть постоянным, что влечет за собой условие

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + t\,\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \Phi_1 = 0$$

или же

$$\sum \frac{d\Phi}{dx_i} X_i + \Phi_1 + t \sum \frac{d\Phi_1}{dx_i} X_i = 0, \tag{3}$$

где X_i, A_i, B_i — функции от x. Следовательно, то же относится и к

$$\Phi,\ \Phi_1,\ \sum \frac{d\Phi}{dx_i} X_i,\ \sum \frac{d\Phi_1}{dx_i} X_i.$$

Следовательно, тождество (3) будет выполняться только, если имеем тождественно

$$\sum \frac{d\Phi_1}{dx_i} X_i = 0$$

и

$$\sum \frac{d\Phi}{dx_i} X_i + \Phi_1 = 0.$$

Первое из этих соотношений показывает нам, что Φ_1 — интеграл уравнений (1).

253ter. Пусть

$$\Phi = \text{const}$$

есть интеграл уравнений (2); функция Φ должна быть некоторой формой, т. е. целым и однородным полиномом относительно ξ_i, коэффициенты которого как-то зависят, кроме того, от x_i

Пусть m — степень этого полинома. Выражение

$$\int \sqrt[m]{\Phi'}$$

(где Φ' есть не что иное, как Φ, где ξ_i заменены дифференциалами dx_i), как я утверждаю, будет интегральным инвариантом уравнений (1).

При этих предположениях пусть I означает какой-нибудь инвариант формы Φ.

Совершим замену переменных п. 237; уравнения (1) этого пункта примут вид

$$\frac{dy_i}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 1, \tag{1bis}$$

и, если обозначить через η_i и ζ вариации y_i и z, то уравнения в вариациях системы (1bis) приведутся к

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

В этих новых переменных Φ превратится в форму Φ_0, целую, однородную и степени m относительно η_i и ζ; коэффициенты могут быть любыми функциями от y_i, но, согласно теореме п. 237, поскольку мы имеем дело с интегральным инвариантом, эти коэффициенты не могут зависеть от z.

Величины x_i являются функциями от y и z, и мы выводим отсюда следующие соотношения между вариациями:

$$\xi_i = \sum \frac{dx_i}{dy_k} \eta_k + \frac{dx_i}{dz} \zeta. \tag{4}$$

Следовательно, ξ являются линейными функциями от η и ζ, и определитель линейных уравнений (4) будет не чем иным, как якобианом x относительно y и z, якобианом, который я обозначаю через J.

Таким образом, мы переходим от формы Φ к форме Φ_0 посредством линейной подстановки (4), определитель которой равен J.

Пусть I_0 — инвариант Φ_0, который соответствует инварианту I формы Φ; мы будем иметь

$$I = I_0 J^p,$$

где p — степень инварианта.

Но I_0 — функция коэффициентов Φ_0 и, следовательно, функция y, не зависящая от z; следовательно, это — интеграл уравнений (1).

Пусть M — последний множитель уравнений (1), так что мы имеем

$$\sum \frac{dMX_i}{dx_i} = 0$$

и

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

— интегральный инвариант порядка n.

Мы видели в п. 252, что MJ будет интегралом уравнений (1). Следовательно,

$$I_0 (MJ)^p = IM^p$$

будет интегралом уравнений (1). Следовательно, каждому инварианту формы Ф соответствует интеграл этих уравнений.

Пусть теперь C — некоторый ковариант формы **Ф** степени p относительно коэффициентов формы Ф и q — относительно переменных ξ.

Если C_0 — соответствующий ковариант Φ_0, то будем иметь

$$C = C_0 J^p.$$

Коэффициенты C_0 являются функциями коэффициентов Φ_0, следовательно, они не зависят от z; это же будет и для коэффициентов

$$C_0 (MJ)^p = CM^p;$$

следовательно, CM^p является интегралом уравнений (2); следовательно,

$$\int \sqrt[q]{C' M^p},$$

где C' есть не что иное, как C, где ξ_i заменены на dx_i, — интегральный инвариант уравнений (1).

Итак, вот средство для построения большого числа интегральных инвариантов; заслуживает внимания частный случай, когда p равно нулю (т. е. случай инвариантов или ковариантов, называемых абсолютными); если C, например, есть абсолютный ковариант Ф, то

$$\int \sqrt[q]{C'},$$

будет интегральным инвариантом уравнений (1). Следовательно, можно образовать новый интегральный инвариант, не зная последнего множителя M.

Та же методика применяется к интегральным инвариантам высшего порядка. Пусть, например,

$$\int \sum A_{i,k} dx_i dx_k$$

— интегральный инвариант второго порядка.

С этим интегральным инвариантом связана билинейная форма

$$\Phi = \sum A_{i,k} (\xi_i \xi'_k - \xi_k \xi'_i),$$

которая является интегралом уравнений (2) и (2bis).

Всякий инвариант или ковариант этой формы, умноженный на подходящую степень M, будет интегралом уравнений (2), (2bis) и, следовательно, породит новый интегральный инвариант.

Таким же образом, если имеется система интегральных инвариантов, мы выведем из нее систему форм, подобных Φ, которые будут интегралами уравнений (2), (2bis). Всякому инварианту этой системы форм будет соответствовать интеграл уравнений (1); всякому коварианту этой системы форм будет соответствовать интегральный инвариант уравнений (1).

Пусть, например, F и F_1 — две квадратичные формы относительно ξ; F' и F'_1 — то, чем они становятся, если заменить в них ξ_i на dx_i.

Предположим, что F и F_1 — интегралы уравнений (2) и что, следовательно,

$$\int \sqrt{F'}, \quad \int \sqrt{F'_1}$$

— интегральные инварианты системы (1).

Рассмотрим форму

$$F - \lambda F_1,$$

где λ — неопределенный множитель. Приравняв дискриминант этой формы нулю, мы получим алгебраическое уравнение степени n относительно λ, корни которого будут, очевидно, абсолютными инвариантами системы форм F, F_1. Следовательно, они будут интегралами уравнений (1).

Но это не все; пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — эти корни, тогда F и F_1 могут быть представлены в виде

$$F = \lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 + \ldots + \lambda_n A_n^2,$$
$$F_1 = A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2,$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — линейные формы, которые можно определить чисто алгебраическими операциями. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можно рассматривать как коварианты нулевой степени системы F, F_1, так что

$$\int A'_1, \int A'_2, \ldots, \int A'_n$$

— интегральные инварианты уравнений (1), если обозначить через A'_i результат замены в A_i переменных ξ_i дифференциалами dx_i.

Однако существует исключение, если уравнение относительно λ имеет кратные корни. Если, например, λ_1 равно λ_2, то нельзя утверждать более, что

$$\int A_1', \quad \int A_2'$$

— интегральные инварианты, а только что

$$\int \sqrt{A_1'^2 + A_2'^2}$$

— интегральный инвариант.

Пусть теперь

$$\int \sum A_{i,k} dx_i dx_k, \quad \int \sum B_{i,k} dx_i dx_k$$

— два интегральных инварианта второго порядка.

Две билинейные формы

$$\Phi = \sum A_{i,k} (\xi_i \xi_k' - \xi_k \xi_i'),$$
$$\Phi_1 = \sum B_{i,k} (\xi_i \xi_k' - \xi_k \xi_i')$$

будут интегралами (2) и (2bis).

Самый интересный случай тот, когда n четно; пусть, следовательно, $n=2m$.

Рассмотрим форму

$$\Phi - \lambda \Phi_1$$

и приравняем ее определитель нулю. Мы получим алгебраическое уравнение относительно λ степени $n=2m$; но левая часть этого уравнения есть полный квадрат, так что оно приводится к уравнению порядка m. Его m корней

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$$

будут по той же причине, что и выше, интегралами уравнений (1).

Теперь можно представить Φ и Φ_1 в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i (P_i Q_i' - Q_i P_i'),$$
$$\Phi_1 = \sum (P_i Q_i' - Q_i P_i'),$$

где P_i и Q_i — $2m$ линейных полиномов относительно ξ, а P_i' и Q_i' — те же полиномы, в которых ξ заменены на ξ'.

Тогда выражения

$$P_1Q_1' - Q_1P_1'; \quad P_2Q_2' - Q_2P_2'; \ \ldots; \quad P_mQ_m' - Q_mP_m'$$

будут ковариантами системы Φ, Φ_1 и, следовательно, интегралами уравнений (2), (2bis), которым будут соответствовать интегральные инварианты.

Если уравнение относительно λ имеет кратные корни, то будет иметь место исключение.

Если имеем, например,

$$\lambda_1 = \lambda_2,$$

то уже нельзя утверждать, что два выражения

$$P_1Q_1' - P_1'Q_1, \quad P_2Q_2' - P_2'Q_2$$

— интегралы уравнений (2), (2bis), но только что их сумма

$$P_1Q_1' - P_1'Q_1 + P_2Q_2' - P_2'Q_2$$

— интеграл уравнений (2), (2bis).

Глава XXIII

ПОСТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТОВ

Применение последнего множителя

254. Прежде всего, имеется интегральный инвариант, который образуется очень легко, когда известен последний множитель дифференциальных уравнений.

Пусть

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt \tag{1}$$

— наши дифференциальные уравнения.

Предположим, что существует такая функция M от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что имеем тождественно

$$\frac{d(MX_1)}{dx_1} + \frac{d(MX_2)}{dx_2} + \ldots + \frac{d(MX_n)}{dx_n} = 0.$$

Эту функцию M называют последним множителем.

В таком случае я утверждаю, что интеграл порядка n

$$J = \int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

есть интегральный инвариант. Действительно, допустим, что мы проинтегрировали уравнения (1), выразив $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в функции от t и n постоянных интегрирования

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n;$$

интеграл J примет вид

$$J = \int M\Delta d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n,$$

где Δ — якобиан, или функциональный определитель переменных x относительно α; тогда получим

$$\frac{dJ}{dt} = \int \frac{dM\Delta}{dt} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n.$$

Но

$$\frac{dM\Delta}{dt} = M\frac{d\Delta}{dt} + \Delta\frac{dM}{dt},$$

$$\frac{dM}{dt} = \sum X_i \frac{dM}{dx_i}.$$

С другой стороны,

$$\Delta = \left| \frac{dx_1}{d\alpha_1} \frac{dx_2}{d\alpha_1} \cdots \frac{dx_n}{d\alpha_1} \right|.$$

Я записываю только первую строку этого определителя; остальные получаются заменой α_1 на $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$.

Следовательно, $\Delta + dt\frac{d\Delta}{dt}$ должно быть якобианом

$$x_i + dt\frac{dx_i}{dt} = x_i + X_i dt$$

относительно постоянных α; он будет равен произведению якобиана от x_i относительно α, т. е. Δ, на якобиан $x_i + X_i dt$ относительно переменных x_i, который я обозначу через D; я записываю

$$\Delta + dt\frac{d\Delta}{dt} = \Delta \cdot D.$$

Но якобиан D легко составить; элементы главной диагонали конечны, элементы, принадлежащие i-й строке и i-му столбцу, записываются в виде

$$1 + dt\frac{dX_i}{dx_i}.$$

Остальные элементы бесконечно малы; элементы, принадлежащие i-й строке и k-му столбцу ($i \neq k$), записываются в виде

$$dt\frac{dX_i}{dx_k}.$$

Отсюда следует, что если пренебречь членами порядка dt^2, получим

$$D = 1 + dt\sum\frac{dX_i}{dx_i},$$

откуда

$$\frac{d\Delta}{dt} = \Delta\sum\frac{dX_i}{dx_i} \quad [5].$$

Отсюда заключаем

$$\frac{dM\Delta}{dt} = \Delta\sum X_i\frac{dM}{dx_i} + \Delta\sum M\frac{dX_i}{dx_i} = \Delta\sum\frac{d(MX_i)}{dx_i} = 0,$$

откуда, наконец,

$$\frac{dJ}{dt} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Уравнения динамики

255. В случае уравнений динамики легко составить большое число интегральных инвариантов. Действительно, мы научились в п. 56 и следующих составлять некоторое число интегралов уравнения в вариациях, а в предыдущей главе мы узнали, каким образом из них получить интегральные инварианты.

Первым интегралом (уравнение (3), т. I, стр. 147) является следующий:

$$\eta_1'\xi_1 - \xi_1'\eta_1 + \eta_2'\xi_2 - \xi_2'\eta_2 + \ldots = \text{const}.$$

Из него получается следующий интегральный инвариант:

$$J_1 = \int (dx_1dy_1 + dx_2dy_2 + \ldots + dx_ndy_n).$$

Он второго порядка и очень важен для последующего. Немного далее (также на стр. 147, т. I) я получаю второй интеграл, который записываю в виде

$$\sum \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_i' & \xi_i'' & \xi_i''' \\ \eta_i & \eta_i' & \eta_i'' & \eta_i''' \\ \xi_k & \xi_k' & \xi_k'' & \xi_k''' \\ \eta_k & \eta_k' & \eta_k'' & \eta_k''' \end{vmatrix} = \text{const}.$$

Интегральный инвариант, который я вывожу из него, — четвертого порядка и записывается так:

$$J_2 = \int \sum dx_idy_idx_kdy_k.$$

Суммирование, указанное знаком Σ, распространено на $n(n-1)/2$ сочетаний индексов i и k.

Аналогично, интеграл

$$J_3 = \int \sum dx_idy_idx_kdy_kdx_ldy_l,$$

где суммирование распространяется на $n(n-1)(n-2)/6$ сочетаний трех индексов i, k и l, опять будет инвариантом, и т. д.

Таким образом, мы получаем n интегральных инвариантов, если мы имеем n пар сопряженных переменных; один из этих инвариантов J_1 —

второго порядка, J_2 — четвертого, J_3 — шестого, . . . , последний J_n — порядка $2n$.

Однако не следует думать, что эти инварианты все различны. Действительно, в конце п. 247 я сказал, что всегда можно вывести из одного инварианта второго порядка один инвариант четвертого порядка, один инвариант шестого порядка и так далее. Инварианты $J_1, J_2, \ldots, J_n$, которые я только что определил, — не что иное, как инварианты, которые можно вывести подобным образом из первого из них.

Эти инварианты можно связать с рассуждениями из другой области; в начале стр. 149 тома I я показал, как можно вывести теорему Пуассона из интеграла (3) на стр. 147, или, что сводится к тому же, из интегрального инварианта J_1.

Оперируя таким же образом с инвариантом J_2, мы нашли бы теорему, аналогичную теореме Пуассона.

Пусть

$$\Phi,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3$$

— четыре интеграла уравнений динамики.

Пусть

$$\Delta_{i,k}$$

— якобиан этих четырех интегралов относительно

$$x_i,\ y_i,\ x_k,\ y_k.$$

Выражение

$$\sum \Delta_{i,k},$$

где суммирование распространено на все сочетания индексов i, k, будет опять интегралом.

Мы пришли бы к аналогичной теореме, исходя из какого-нибудь из инвариантов $J_3, J_4, \ldots, J_n$.

Но согласно сделанному мною только что замечанию, все эти теоремы фактически не отличаются от теоремы Пуассона.

Однако среди этих инвариантов имеется один, которому следует придать большее значение, — это последний из них

$$J_n = \int dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \ldots dx_n dy_n.$$

Его можно было бы получить по способу, изложенному в предыдущем пункте; действительно, известно, что уравнения динамики допускают в качестве последнего множителя единицу.

256. Теперь я предполагаю, что x означают прямоугольные координаты n точек в пространстве, и возвращаюсь к обозначениям стр. 149 I тома.

Мы нашли (стр. 150) следующий интеграл уравнений в вариациях

$$\sum \frac{y\eta}{m} - \sum \frac{dV}{dx}\xi = \mathrm{const}.$$

Соответствующий интегральный инвариант записывается в виде

$$\int \sum \left(\frac{ydy}{m} - \frac{dV}{dx}dx\right).$$

Аналогично, интегралу

$$\sum \eta_{1,i} = \mathrm{const}$$

соответствует инвариант

$$\int (dy_{1,1} + dy_{1,2} + \ldots + dy_{1,n});$$

интегралу

$$\sum_i (x_{1,i}\eta_{2,i} - y_{1,i}\xi_{2,i} - x_{2,i}\eta_{1,i} + y_{2,i}\xi_{1,i}) = \mathrm{const}$$

соответствует инвариант

$$\int \sum (x_{1,i}dy_{2,i} - y_{1,i}dx_{2,i} - x_{2,i}dy_{1,i} + y_{2,i}dx_{1,i}).$$

Однако все эти инварианты не представляют большого интереса, так как их можно непосредственно вывести из интегралов живых сил, центра масс и площадей.

Этого нельзя сказать о последующем инварианте, который существует, если функция V является однородной относительно переменных x.

Мы видели в п. 56, что если V — однородная функция степени -1, то уравнения в вариациях допускают интеграл

$$\sum (2x_{k,i}\eta_{k,i} + y_{k,i}\xi_{k,i}) = 3t\left[\sum\left(\frac{y_{k,i}\eta_{k,i}}{m_i} - \frac{dV}{dx_{k,i}}\xi_{k,i}\right)\right] + \mathrm{const},$$

или, опуская индексы,

$$\sum (2x\eta + y\xi) = 3t\sum\left(\frac{y\eta}{m} - \frac{dV}{dx}\xi\right) + \mathrm{const}.$$

Вообще, если V — однородная функция степени p, то тем же способом получим следующий интеграл:

$$\sum (2x\eta - py\xi) = (2-p)\,t\sum\left(\frac{y\eta}{m} - \frac{dV}{dx}\xi\right) + \mathrm{const},$$

откуда имеем интегральный инвариант

$$J = \int \sum (2xdy - pydx) + (p-2)\,t\int \sum\left(\frac{ydy}{m} - \frac{dV}{dx}dx\right)$$

— инвариант совершенно особого характера, поскольку он зависит от времени.

Второй интеграл можно записать в виде

$$\int d\sum\left(\frac{y^2}{2m}-V\right),$$

следовательно, это интеграл от полного дифференциала, и легко видеть, что

$$\sum\left(\frac{y^2}{2m}-V\right)$$

— не что иное, как постоянная живых сил, которую я обозначу через C.

Инвариант J — первого порядка; следовательно, это интеграл, взятый вдоль дуги некоторой кривой.

Пусть C_0 и C_1 — значения постоянной живых сил на двух концах этой дуги.

Эта дуга представляет собой фигуру, обозначенную нами в предыдущей главе через F_0; когда эта фигура деформируется, превращаясь в F, то, как я объяснил в предыдущей главе, C_0 и C_1 не изменяются.

Отсюда вытекает, что мы имеем

$$J=\int\sum(2xdy-pydx)+(p-2)\,t\,(C_1-C_0).$$

Интеграл

$$\int\sum(2xdy-pydx)$$

не останется, следовательно, постоянным, когда фигура F (которая сводится здесь к дуге кривой) деформируется; но его изменения пропорциональны времени.

Интеграл этот постоянен, если оба конца дуги соответствуют одному и тому же значению постоянной живых сил.

В частности, он также постоянен, если дуга кривой замкнута. Следовательно, этот интеграл есть то, что я назвал в предыдущей главе относительным инвариантом.

Но если предположить дугу кривой замкнутой, то под знаком интеграла можно добавить любой полный дифференциал, не меняя величины интеграла; например, прибавить

$$\sum(xdy+ydx)$$

с любым постоянным коэффициентом.

Таким образом, интегралы

$$\int \sum y dx, \quad \int \sum x dy$$

— также относительные инварианты.

В п. 238 мы видели, что из относительного инварианта первого порядка можно вывести абсолютный инвариант второго порядка. Инвариант второго порядка, получаемый таким образом, есть не что иное, как

$$J_1 = \int \sum dx dy,$$

который мы изучили выше.

Существует случай, когда выражение

$$\sum (2x dy - p y dx),$$

которое входит под знак интеграла, становится полным дифференциалом. Это случай, когда $p = -2$, который имел бы место, если бы притяжение, вместо того чтобы подчиняться закону Ньютона, действовало обратно пропорционально кубу расстояния.

Тогда

$$\int \sum (2x dy - p y dx) = \sum 2xy.$$

Следовательно, $\sum 2xy$ есть полином первой степени относительно времени, и поскольку

$$\sum 2xy = \sum 2mx \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \sum mx^2,$$

то выражение $\sum mx^2$ — полином второй степени относительно времени.

Это результат, к которому пришел Якоби в начале своих «Лекций по динамике».

Но, вообще

$$\sum (2x dy - p y dx)$$

не есть полный дифференциал.

В частном случае ньютонова притяжения наш инвариант принимает вид

$$\int \sum (2x dy + y dx) - 3t (C_1 - C_0).$$

Интегральные инварианты и характеристические показатели

257. Можно задаться вопросом, существуют ли другие алгебраические интегральные инварианты кроме тех, которые мы только что образовали.

Можно было бы применить либо метод Брунса, либо метод, который я использовал в главах IV и V; действительно, интегральные инварианты соответствуют, как мы это видели, интегралам уравнений в вариациях, и к этим уравнениям можно было бы применить те же методы, что и к самим уравнениям движения.

Но, может быть, лучше стоит видоизменить эти методы, по крайней мере, по форме.

Пусть дана какая-нибудь система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \tag{1}$$

и их уравнения в вариациях

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum \frac{dX_i}{dx_k} \xi_k. \tag{2}$$

Ищем сперва интегральные инварианты первого порядка вида

$$\int (B_1 dx_1 + B_2 dx_2 + \ldots + B_n dx_n), \tag{3}$$

где выражение под знаком интеграла линейно относительно дифференциалов dx и где B — алгебраические функции от x.

Эти инварианты соответствуют линейным интегралам уравнений (2).

Итак, каковы условия, чтобы уравнения (2) допускали интегралы, линейные относительно ξ и алгебраические относительно x?

Предположим, что переменным x даются значения, которые соответствуют периодическому решению с периодом T. Тогда коэффициенты уравнений (2) будут известными функциями от t, периодическими с периодом T, и из них найдется общее решение уравнений (2) следующего вида:

$$\xi_i = \sum_k A_k e^{\alpha_k t} \psi_{i,k}, \tag{4}$$

где $\psi_{i,k}$ — периодические функции от t, α_k — характеристические показатели, A_k — постоянные интегрирования.

Затем мы сможем разрешить линейные уравнения (4) относительно неизвестных $A_k e^{\alpha_k t}$ и найдем

$$A_k e^{\alpha_k t} = \sum_i \xi_i \theta_{i,k}, \tag{5}$$

где $\theta_{i,k}$ — периодические функции от t.

Следовательно, между ξ будет иметься n соотношений вида (5) и, кроме них, никаких других.

Если уравнения (1) и (2) допускают q *различных* интегралов, линейных относительно ξ и алгебраических относительно x, то может случиться, что какие-либо из этих q интегралов перестанут быть различными, если заменить в них переменные x значениями, которые соответствуют одному из периодических решений уравнений (1).

Каким же образом это может произойти?

Пусть

$$H_i = B_{1,i}\xi_1 + B_{2,i}\xi_2 + \ldots + B_{n,i}\xi_n = \text{const} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q)$$

— эти q линейных интегралов, где B будут алгебраическими функциями от x, которые будут соответствовать q интегральным инвариантам вида (3).

Они различны, т. е. между ними не существует тождественных соотношений вида

$$\beta_1 H_1 + \beta_2 H_2 + \ldots + \beta_q H_q = 0, \tag{6}$$

где коэффициенты β — постоянные, а также соотношений вида

$$\psi_1 H_1 + \psi_2 H_2 + \ldots + \psi_q H_q = 0, \tag{6bis}$$

где ψ — интегралы уравнений (1).

Возможно ли тогда, чтобы между ними выполнялось соотношение вида

$$\varphi_1 H_1 + \varphi_2 H_2 + \ldots + \varphi_q H_q = 0, \tag{6ter}$$

где φ — произвольные функции только от x?

Согласно п. 250, если бы подобное соотношение имело место, то отношения функций φ должны были быть интегралами уравнений (1).

Следовательно, мы имели бы

$$\frac{\varphi_1}{\psi_1} = \frac{\varphi_2}{\psi_2} = \ldots = \frac{\varphi_q}{\psi_q},$$

где ψ — интегралы, и, следовательно,

$$\psi_1 H_1 + \psi_2 H_2 + \ldots + \psi_q H_q = 0,$$

что противоречит предположению.

Итак, между H_i не может существовать тождественного соотношения вида (6ter).

Однако если x даны значения, которые соответствуют частному решению, периодическому или непериодическому, то может случиться, что левая часть (6) тождественно обращается в нуль.

Тогда мы найдем, что уравнение (6), которое не удовлетворяется тождественно, каковы бы ни были x, будет удовлетворяться, когда x будут

заменены подходящим образом выбранными функциями от t, а именно, теми из этих функций, которые соответствуют частному решению.

Я назову особым всякое частное решение, для которого возникнет это обстоятельство.

При этом могут представиться два случая:

Либо все периодические решения уравнений (1) особые.

Либо не все они особые.

258. Рассмотрим особое решение S.

Пусть

$$\beta_1 B_{k,1} + \beta_2 B_{k,2} + \ldots + \beta_q B_{k,q} = B_k,$$

откуда

$$B_1 \xi_1 + B_2 \xi_2 + \ldots + B_n \xi_n = \beta_1 H_1 + \beta_2 H_2 + \ldots + \beta_q H_q.$$

Поскольку соотношение (6) не выполняется тождественно, то не имеют место тождества

$$B_1 = B_2 = \ldots = B_n = 0, \tag{7}$$

но так как соотношение (6) должно быть выполнено для решения S, то эти соотношения (7) (согласно нашему предположению — алгебраические) должны удовлетворяться значениями x, которые соответствуют решению S.

Пусть теперь

$$B'_i = X_1 \frac{dB_i}{dx_1} + X_2 \frac{dB_i}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dB_i}{dx_n},$$

затем

$$B''_i = X_1 \frac{dB'_i}{dx_1} + X_2 \frac{dB'_i}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dB'_i}{dx_n}, \ \ldots .$$

Очевидно, решение S должно удовлетворять соотношениям

$$B'_i = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{7bis}$$

затем соотношениям

$$B''_i = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{7ter}$$

и так далее.

Итак, мы составим последовательно соотношения (7), (7bis), (7ter) и т. д. и остановимся тогда, когда придем к системе соотношений, которые являются только следствиями соотношений, образованных ранее.

Соотношения (7), (7bis), (7ter) и т. д. будут алгебраическими согласно нашим предположениям, и их совокупность образует то, что я назвал в п. 11 системой инвариантных соотношений.

Следовательно, если система дифференциальных уравнений допускает особое периодическое решение, то она будет допускать систему инвариантных алгебраических соотношений.

Вероятно, задача трех тел не допускает инвариантных алгебраических соотношений, отличных от тех, которые уже известны. Однако я еще не в состоянии доказать это.

Допустим, что мы имеем несколько особых решений; для каждого из них должно быть

$$\beta_1 B_{i,1} + \beta_2 B_{i,2} + \ldots + \beta_q B_{i,q} = 0. \tag{8}$$

Только постоянные β могут не быть одинаковыми для двух различных особых решений. Следовательно, не очевидно, что эти два особых решения должны удовлетворять одной и той же системе инвариантных соотношений. Тем не менее, как мы сейчас докажем, это имеет место.

Допустим для определенности, что $q=4$; последовательность рассуждений была бы такой же в случае $q>4$. Рассмотрим n соотношений

$$\beta_1 B_{i,1} + \beta_2 B_{i,2} + \beta_3 B_{i,3} + \beta_4 B_{i,4} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{17}$$

Образуем таблицу T из $4n$ коэффициентов B; все определители, составленные при помощи четырех столбцов этой таблицы, должны быть равны нулю.

Если они обращаются в нуль не тождественно, то мы найдем таким образом одно или несколько соотношений, которым должны удовлетворять все особые решения, куда войдут только x и не войдут неопределенные коэффициенты β.

Если же они равны нулю тождественно, то рассмотрим тройку из соотношений (17); мы выведем из них

$$\frac{M_1}{\beta_1} = \frac{M_2}{\beta_2} = \frac{M_3}{\beta_3} = \frac{M_4}{\beta_4},$$

где M — миноры первого порядка таблицы T.

Следовательно, мы будем иметь

$$M_1 H_1 + M_2 H_2 + M_3 H_3 + M_4 H_4 = 0. \tag{18}$$

Это соотношение (18) должно быть тождественным, ибо коэффициентом при ξ_k является один из определителей таблицы T, которые, как я предполагаю, тождественно равны нулю.

Следовательно, мы получили бы здесь соотношение вида (6ter), что противоречит нашему предположению, по крайней мере, если не допускать, что все M равны тождественно нулю.

Если все миноры первого порядка таблицы T тождественно равны нулю, то составим миноры второго порядка.

Пусть M_1', M_2', M_3' — три из этих миноров, полученные выбором в таблице трех каких-либо столбцов и вычеркиванием в ней строк 1 и 4 для M_1', 2 и 4 — для M_2', 3 и 4 — для M_3'.

Мы получим

$$M_1'H_1 + M_2'H_2 + M_3'H_3 = 0. \tag{19}$$

Это соотношение также должно быть тождественным, ибо коэффициентом при ξ_k в левой части является один из миноров первого порядка из T, которые все, как я предполагаю, тождественно равны нулю.

Следовательно, это снова было бы соотношением вида (6ter), по крайней мере, если не предполагать, что все миноры второго порядка M' тождественно равны нулю.

Если же это так, то придем к тождеству

$$B_{i,2}H_1 - B_{i,1}H_2 = 0,$$

что снова является соотношением вида (6ter).

Следовательно, не может случиться, чтобы все определители из таблицы T тождественно обращались в нуль. Поэтому мы будем иметь, по крайней мере, одно соотношение (и, следовательно, систему инвариантных соотношений), которому должны будут удовлетворять все особые решения уравнений (1).

Можно было бы немедленно заключить, что все решения уравнений (1) не могут быть особыми.

Однако это не все; мы можем расширить наше определение особых решений.

Мы определили только что особые решения относительно q интегралов H_i уравнений (2), линейных относительно ξ и соответствующих q инвариантам (линейным и первого порядка) уравнений (1).

Мы могли бы определить абсолютно таким же образом особые решения относительно любых q интегралов

$$H_1, H_2, \ldots, H_q$$

уравнений (2) и уравнений (2bis), полученных заменой ξ на ξ'.

Эти интегралы должны быть однородными одной и той же степени как относительно ξ, так и относительно ξ'; это будут целые полиномы относительно этих переменных; однако они не обязательно линейны относительно ξ; следовательно, они могут соответствовать интегральным инвариантам высшего порядка или интегральным инвариантам первого порядка, но нелинейным.

Кроме того, интегралы должны быть различными, т. е. они не должны тождественно удовлетворять соотношениям вида (6), (6bis) или (6ter).

Я скажу тогда, что частное решение S — особое, если для значений x, которые соответствуют этому решению, удовлетворяется соотношение (6).

Тогда мы будем иметь

$$H_i = \sum B_{k,i}A_k,$$

где A_k — одночлен, образованный произведением определенного числа сомножителей $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n$, возведенных в подходящую степень, а $B_{k,i}$ — алгебраические функции от x.

Кроме того, мы положим, как и выше,

$$B_i = \beta_1 B_{i,1} + \beta_2 B_{i,2} + \ldots + \beta_q B_{i,q}$$

и нам ничего не нужно будет изменять в предыдущих рассуждениях. Мы придем к тому же заключению.

Все особые решения относительно q интегралов H_i удовлетворяют одной и той же системе инвариантных алгебраических соотношений.

Эти результаты также верны, если рассмотреть интегралы следующего вида:

$$H_i = B_{1,i}\xi_1 + B_{2,i}\xi_2 + \ldots + B_{n,i}\xi_n + B_{n+1,i}t\xi_1 + B_{n+2,i}t\xi_2 + \ldots + B_{2n,i}t\xi_n.$$

Определение особых решений относительно этих интегралов будет опять тем же, и особые решения будут удовлетворять той же системе инвариантных алгебраических соотношений.

Нужно было бы лишь повторить предыдущее доказательство, ничего в нем не изменяя. Только коэффициенты при величинах $B_{k,i}$, которые играли бы в этом доказательстве ту же роль, что и ξ_i, могли быть либо ξ_i, либо произведениями ξ_i и ξ'_i, либо произведениями вида $t\xi_i$.

259. Я не хочу входить здесь в подробности тех соображений, которые заставляют меня считать правдоподобным, что в случае задачи трех тел все периодические решения не могут быть особыми.

Это увело бы слишком далеко от темы; я вернусь к этому позже; но пока я временно допущу это предположение, обращая внимание лишь на то, насколько маловероятно, чтобы все периодические решения задачи трех тел удовлетворяли одной системе инвариантных соотношений, что было бы необходимым согласно предыдущему пункту, для того, чтобы они могли быть особыми. Примем снова обозначения и нумерацию уравнений п. 257.

Если уравнения (1) и (2) допускают q различных интегралов, линейных относительно ξ и алгебраических относительно x, то эти q интегралов продолжают оставаться различными, когда x в них заменяются теми значениями, которые соответствуют неособому периодическому решению.

Записывая, что эти q интегралов равны постоянным, и заменяя в уравнениях, полученных таким путем, величины x значениями, соответствующими некоторому периодическому решению, мы получим q уравнений вида (5), в которых, однако, показатель α_k будет нулем. Значит, эти q уравнений должны находиться среди уравнений (5). Следовательно, для того чтобы уравнения (1) допускали q различных интегральных инвариантов, линейных относительно x, необходимо, чтобы для всякого неособого периодического решения q характеристических показателей α_k были нулями.

Поищем теперь интегральные инварианты вида

$$\int \sqrt{\sum A_i dx_i^2 + 2B_{i,k} dx_i dx_k} = \int \sqrt{F(dx_i)}. \tag{7}$$

Эти инварианты будут соответствовать интегралам уравнений (1) и (2), квадратичным относительно ξ. В самом деле, инварианту (7) будет соответствовать интеграл

$$F(\xi_i) = \mathrm{const},$$

который должен быть квадратичным относительно ξ и алгебраическим относительно x. Заменим в этом уравнении x теми значениями, которые соответствуют некоторому неособому периодическому решению; мы придем к

$$F^*(\xi_i) = \mathrm{const}, \tag{8}$$

где F^* — однородный квадратичный полином относительно ξ, коэффициенты которого суть периодические функции от t.

Все уравнения вида (8) должны выводиться из уравнений (5), а именно следующим образом.

В случае какой-либо проблемы динамики и, в частности, в случае задачи трех тел мы видели, что характеристические показатели попарно равны и противоположны по знаку. Следовательно, мы можем сгруппировать уравнения (5) попарно; пусть

$$A_k e^{\alpha_k t} = \sum_i \xi_i \theta_{ik}, \tag{5bis}$$

$$B_k e^{-\alpha_k t} = \sum_i \xi_i \theta'_{ik}. \tag{5ter}$$

Перемножая друг на друга уравнения (5bis) и (5ter), получим уравнение вида (8), а все уравнения вида (8) должны быть линейными комбинациями уравнений, полученных таким образом.

Итак, если предположить, что уравнения (1) имеют каноническую форму уравнений динамики и что они содержат p пар сопряженных переменных, мы получим p пар уравнений, аналогичных уравнениям (5bis) и (5 ter), и, следовательно, для каждого периодического решения будет p линейно независимых уравнений вида (8).

Выберем одно уравнение среди этих p уравнений и их линейных комбинаций, пусть это будет $F^*(\xi_i) = c$; поступим таким же образом со всеми остальными периодическими решениями; тогда мы будем иметь некоторый однородный полином $F^*(\xi_i)$, второй степени относительно ξ, коэффициенты которого будут функциями от переменных x, определенными только для тех значений x, которые соответствуют периодическому решению.

Остается узнать, можно ли сделать этот выбор таким образом, чтобы коэффициенты F^* были алгебраическими функциями от x или даже непрерывными функциями от x. Я ставлю задачу, не пытаясь пока ее решить.

Поищем теперь инварианты второго порядка, т. е. те, которые имеют вид двойного интеграла

$$\iint F,$$

где F — линейная функция произведений $dx_i dx_k$ (коэффициенты этой линейной функции будут, разумеется, функциями от x). Эти инварианты второго порядка будут иметь следующее значение.

Вернемся к уравнениям (1) и (2) (мы все время сохраняем нумерацию п. 257) и составим, кроме того, уравнения

$$\frac{d\xi_i'}{dt}=\sum\frac{dX_i}{dx_k}\xi_k'. \tag{2a}$$

Они приведут нас к уравнениям, аналогичным уравнениям (5), которые я запишу в виде

$$A_k' e^{\alpha_k t}=\sum\xi_i'\theta_{i,k}. \tag{5a}$$

Впрочем, они отличаются от уравнений (5) лишь штрихованными буквами.

Инварианты второго порядка будут соответствовать тогда, согласно предыдущей главе, тем из интегралов (1), (2) и (2a), которые линейны относительно определителей

$$\xi_i\xi_k'-\xi_k\xi_i'$$

и алгебраичны относительно переменных x.

Пусть

$$F(\xi_i\xi_k'-\xi_k\xi_i')$$

— один из этих интегралов; если в нем заменить x величинами, соответствующими периодическому решению, то получим уравнение вида

$$F^*(\xi_i\xi_k'-\xi_k\xi_i')=\text{const}, \tag{9}$$

где F^* — линейная функция от определителей

$$\xi_i\xi_k'-\xi_k\xi_i',$$

коэффициенты которой будут периодическими функциями от t.

Вот каким образом теперь можно будет составить все соотношения вида (9), относящиеся к заданному периодическому решению.

В случае уравнений динамики уравнения (5a) разделяются на пары, как и уравнения (5); пусть

$$A'_k e^{\alpha_k t} = \sum \xi'_i \theta_{i,k}, \tag{5a bis}$$

$$B'_k e^{-\alpha_k t} = \sum \xi'_i \theta'_{i,k} \tag{5a ter}$$

— одна из этих пар; умножим (5a bis) на (5ter), (5a ter) — на (5bis) и вычтем; мы получим уравнение вида (9). Каждая пара уравнений даст нам одно, а все другие уравнения вида (9) будут только линейными комбинациями тех уравнений, которые можно образовать таким путем.

Среди всех уравнений вида (9), полученных таким образом, выберем одно; поступим так же со всеми остальными периодическими решениями; тогда мы будем иметь соотношение

$$F^* (\xi_i \xi'_k - \xi_k \xi'_i) = \text{const},$$

левая часть которого будет линейной функцией определителей; коэффициенты этой линейной функции будут функциями x, определенными только для значений x, которые соответствуют периодическому решению.

Остается узнать, можно ли сделать выбор таким образом, чтобы эти коэффициенты были алгебраическими функциями или даже непрерывными функциями от x.

Обратимся теперь к линейным инвариантам первого порядка. Согласно п. 29, вид уравнений (4) и, следовательно, уравнений (5), оказывается измененным, если два или несколько характеристических показателей становятся равными.

Если, например, q из этих показателей равны нулю, то можно записать соответствующее уравнение (5) в виде

$$P_k = \sum_i \xi_i \theta_{i,k}, \tag{10}$$

где P_k означает полином, целый относительно t, с постоянными коэффициентами.

Наибольшая степень этих полиномов есть $q-1$; точнее, число этих полиномов равно q; первый сводится к постоянной, степень второго — не больше единицы, третьего — не больше двух и т. д., и, наконец, последнего — не больше $q-1$.

В случае, когда степень этого последнего полинома достигает своего максимума и равна $q-1$, предпоследний полином является производной последнего, $(q-2)$-й — производной $(q-1)$-го и т. д.

Во всех случаях можно разделить q полиномов на несколько групп; в каждой группе первый полином сводится к постоянной и каждый из них является производной последующего.

Следовательно, для существования p линейных интегральных инвариантов недостаточно, чтобы p характеристических показателей были нулями; нужно еще, чтобы p полиномов P_k сводились к постоянным (или, что то же, чтобы эти полиномы разделялись, по меньшей мере, на p групп).

Каков же тогда, с интересующей нас точки зрения, смысл уравнений (10), в которых P_k не сводится к постоянной?

Мы определили в п. 256 интегральный инвариант, роль которого весьма важна. Этот инвариант имеет вид

$$\int F + t \int F_1,$$

где F и F_1 — функции, алгебраические относительно x и линейные относительно дифференциалов dx.

Подобный инвариант соответствует интегралу уравнений (2) следующего вида

$$F + tF_1 = \text{const},$$

где F и F_1 — функции, алгебраические относительно x и линейные относительно ξ.

Если в этом интеграле заменим x значениями, которые соответствуют периодическому решению, то придем к

$$F^* + tF_1^* = \text{const},$$

где F^* и F_1^* — линейные относительно ξ функции, коэффициенты которых — периодические функции от t.

Вот как можно теперь получить все соотношения вида (11), исходя из уравнений (10).

Рассмотрим два полинома P_k, первый — сводящийся к постоянной, а второй — первой степени, причем первый является производной второго. Соответствующие уравнения (10) запишутся

$$A_1 = \sum \xi_i \theta_i, \tag{10bis}$$

$$A_2 + A_1 t = \sum \xi_i \theta_i', \tag{10ter}$$

где θ_i и θ_i' периодичны по t; из них выводим

$$\sum \xi_i \theta_i' - t \sum \xi_i \theta_i = \text{const},$$

что представляет собой соотношение вида (11).

Заметим еще, что уравнение (10bis), возведенное в квадрат, доставляет нам соотношение вида (8) и что из уравнений (10bis) и (10ter) можно вывести соотношение вида (9), а именно:

$$(\sum \xi_i \theta_i)(\sum \xi_i' \theta_i') - (\sum \xi_i' \theta_i)(\sum \xi_i \theta_i') = \text{const}.$$

260. Применим предыдущее к задаче трех тел и будем искать для этой задачи, каково максимальное число интегральных инвариантов различных типов, изученных в предыдущем пункте; а именно, следующих типов:

Первый тип — инварианты, линейные относительно дифференциалов dx. Второй тип — инварианты, в которых функция под знаком интеграла является квадратным корнем из полинома второй степени относительно дифференциалов dx. Третий тип — инварианты второго порядка, линейные относительно произведений дифференциалов $dx_i dx_k$. Четвертый тип — инварианты вида, рассмотренного в конце предыдущего параграфа, т. е. вида

$$\int F + t \int F_1.$$

Эти различные типы инвариантов соответствуют различным типам интегралов уравнений (2) и (2a), а именно: первый тип — интегралы, линейные относительно ξ; второй тип — интегралы, квадратичные относительно ξ; третий тип — интегралы, линейные относительно определителей $\xi_i \xi'_k - \xi_k \xi'_i$; четвертый тип — интегралы вида

$$F + tF_1,$$

где F и F_1 линейны относительно ξ.

Мы можем считать крайне правдоподобным, что все периодические решения задачи трех тел неособые.

В задаче трех тел число степеней свободы равно шести; число характеристических показателей равно двенадцати. Согласно тому, что мы видели в п. 78, среди них имеется шесть и только шесть уничтожающихся; шесть остальных попарно равны и противоположны по знаку. Следовательно, имеется шесть уравнений вида (10) и шесть полиномов P_k, из которых четыре — нулевой степени и два — степени единица. Или же иначе, имеется три пары уравнений вида (5bis), (5ter), четыре уравнения вида (10bis), два уравнения вида (10ter).

Итак, посмотрим, каково будет наибольшее число независимых инвариантов каждого типа.

Я уточняю, что́ я понимаю под этим; я не буду рассматривать в качестве независимых n инвариантов первого типа

$$\int F_1, \int F_2, \ldots, \int F_n,$$

или n инвариантов второго типа

$$\int \sqrt{F_1}, \int \sqrt{F_2}, \ldots, \int \sqrt{F_n},$$

или n инвариантов третьего типа

$$\iint F_1, \iint F_2, \ldots, \iint F_n,$$

или n инвариантов четвертого типа

$$\int F_1, \quad \int F_2, \quad \ldots, \quad \int F_n \quad (F_i = F'_i + tF''_i),$$

если между $F_1, F_2, \ldots, F_n$ будет существовать тождественное соотношение вида

$$\Phi_1 F_1 + \Phi_2 F_2 + \ldots + \Phi_n F_n = 0,$$

где $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ — интегралы уравнений (1).

С самого начала ясно, что нельзя получить более четырех инвариантов первого типа, т. е. более числа уравнений (10bis). Эти четыре инварианта уже известны.

Нельзя получить более тринадцати инвариантов второго типа, три из которых происходили бы из трех пар уравнений вида (5bis), (5ter), а десять остальных получались бы при помощи возведения в квадрат четырех уравнений (10bis) и их попарных произведений. Эти десять последних действительно существуют; но они не являются независимыми от четырех инвариантов первого типа, поскольку их можно вывести из них с помощью процедуры п. 245. Следовательно, здесь можно было бы иметь три новых инварианта.

Нельзя получить более одиннадцати инвариантов третьего типа, три из которых происходили бы из трех пар уравнений вида (5bis), (5ter); шесть получались бы попарной комбинацией четырех уравнений (10bis); два — комбинацией двух уравнений (10ter) с соответствующим уравнением (10bis).

Семь из этих инвариантов известны; одним является инвариант J из п. 255, шесть остальных — это инварианты, которые выводятся из четырех уравнений (10bis), но их нельзя считать независимыми от четырех инвариантов первого типа, поскольку их можно вывести из них, пользуясь методикой п. 247.

Следовательно, здесь можно было бы иметь четыре новых инварианта третьего типа.

Наконец, нельзя получить более двух инвариантов четвертого типа, т. е. более числа уравнений (10ter).

Один из этих инвариантов известен, это — инвариант из п. 256; можно было бы получить еще один новый инвариант.

Вероятно, что эти новые инварианты, существование которых не исключается предыдущим рассмотрением, не существуют; но чтобы доказать это, следовало бы обратиться к другим методам, аналогичным, например, методу Брунса.

Применение кеплеровых переменных

261. Инвариант четвертого типа из п. 256 может быть получен в другом виде.

Пусть имеем любую систему канонических уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i}. \tag{1}$$

Рассмотрим следующий интеграл, взятый вдоль дуги какой-либо кривой:

$$J=\int (x_1dy_1+x_2dy_2+\ldots+x_ndy_n).$$

Предположим, что мы записываем уравнения дуги кривой, вдоль которой происходит интегрирование, выражая x и y в функции параметра α, и что значения этого параметра, которые соответствуют концам дуги, — α_0 и α_1. Интеграл J будет равен

$$J=\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left[\sum x\frac{dy}{d\alpha}\right]d\alpha.$$

Предположим, что мы рассматриваем нашу дугу кривой как фигуру F предыдущей главы, которая меняется с временем и сводится к F_0 при $t=0$.

Тогда x, y и функции от x и y, такие, как F, dF/dx, dF/dy, ... будут функциями α и t.

Мы придем к

$$\frac{dJ}{dt}=\int\left[\sum\frac{dx}{dt}\frac{dy}{d\alpha}\right]d\alpha+\int\left[\sum x\frac{d^2y}{dtd\alpha}\right]d\alpha,$$

или

$$\frac{dJ}{dt}=\int\left[\sum\frac{dF}{dy}\frac{dy}{d\alpha}\right]d\alpha-\int\left[\sum x\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{dF}{dx}\right)\right]d\alpha.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\frac{dJ}{dt}=\int\left[\sum\frac{dF}{dy}\frac{dy}{d\alpha}\right]d\alpha+\int\left[\sum\frac{dF}{dx}\frac{dx}{d\alpha}\right]d\alpha-\left[\sum x\frac{dF}{dx}\right].$$

Но

$$\sum\frac{dF}{dy}\frac{dy}{d\alpha}+\sum\frac{dF}{dx}\frac{dx}{d\alpha}=\frac{dF}{d\alpha},$$

следовательно,

$$\frac{dJ}{dt}=\left[F-\sum x\frac{dF}{dx}\right]_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha=\alpha_1}. \tag{2}$$

Если мы предположим, что F — однородная функция степени p относительно x, то придем к равенству

$$\sum x \frac{dF}{dx} = pF.$$

Пусть тогда C — постоянная живых сил, такая, что уравнение живых сил записывается в виде

$$F = C.$$

Пусть C_0 и C_1 — значения этой постоянной, которые соответствуют α_0 и α_1; будем иметь

$$\frac{dJ}{dt} = (1 - p)(C_1 - C_0). \tag{3}$$

Следовательно, F не является инвариантом в собственном смысле слова; но его производная по времени постоянна и, если пользоваться выражением, определенным в предыдущем параграфе, — это инвариант четвертого типа [6].

262. Предположим теперь, что F представляет некоторый иной вид однородности.

Разделим пары сопряженных переменных на два класса и обозначим через x_i, y_i пары сопряженных переменных первого класса, через x'_i, y'_i — пары сопряженных переменных второго класса.

Я предполагаю, что F — однородная функция степени p относительно x_i, $(x'_i)^2$ и $(y'_i)^2$, так что имеем

$$\sum x \frac{dF}{dx} + \frac{1}{2} \sum \left(x' \frac{dF}{dx'} + y' \frac{dF}{dy'} \right) = pF.$$

Положим тогда

$$J = \int \left[\sum (x\,dy) + \frac{1}{2} \sum (x'dy' - y'dx') \right],$$

или

$$J = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left[\sum x \frac{dy}{d\alpha} + \frac{1}{2} \sum \left(x' \frac{dy'}{d\alpha} - y' \frac{dx'}{d\alpha} \right) \right] d\alpha,$$

откуда

$$\frac{dJ}{dt} = \int \left[\sum \frac{dx}{dt} \frac{dy}{d\alpha} + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{dx'}{dt} \frac{dy'}{d\alpha} - \frac{dy'}{dt} \frac{dx'}{d\alpha} \right) \right] d\alpha +$$
$$+ \int \left[\sum x \frac{d^2y}{d\alpha\,dt} + \frac{1}{2} \sum \left(x' \frac{d^2y'}{d\alpha\,dt} - y' \frac{d^2x'}{d\alpha\,dt} \right) \right] d\alpha,$$

или

$$\frac{dJ}{dt} = \int \left[\sum \frac{dF}{dy} \frac{dy}{d\alpha} + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{dF}{dx'} \frac{dx'}{d\alpha} + \frac{dF}{dy'} \frac{dy'}{d\alpha} \right) \right] d\alpha -$$
$$- \int \left[\sum x \frac{d}{d\alpha} \frac{dF}{dx} + \frac{1}{2} \sum \left(x' \frac{d}{d\alpha} \frac{dF}{dx'} + y' \frac{d}{d\alpha} \frac{dF}{dy'} \right) \right] d\alpha.$$

или, после интегрирования по частям,

$$\frac{dJ}{dt}=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\sum\left(\frac{dF}{dx}\frac{dx}{d\alpha}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{d\alpha}+\frac{dF}{dx'}\frac{dx'}{d\alpha}+\frac{dF}{dy'}\frac{dy'}{d\alpha}\right)d\alpha-$$

$$-\left[\sum x\frac{dF}{dx}+\frac{1}{2}\sum\left(x'\frac{dF}{dx'}+y'\frac{dF}{dy'}\right)\right]_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha=\alpha_1},$$

или

$$\frac{dJ}{dt}=[F-pF]_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha=\alpha_1},$$

или, наконец,

$$\frac{dJ}{dt}=(1-p)(C_1-C_0),$$

что показывает, что J опять является инвариантом четвертого типа.

263. Применим предыдущее к задаче трех тел и посмотрим, какой вид примет инвариант из п. 256 при различном выборе переменных.

В п. 11 мы взяли в качестве переменных

$$\begin{matrix}\beta L, & \beta G, & \beta\Theta, & \beta' L', & \beta' G', & \beta'\Theta', \\ l, & g, & \theta, & l', & g', & \theta'.\end{matrix}$$

F однородна степени -2 относительно переменных первого рода, следовательно,

$$\int[\beta(Ldl+Gdg+\Theta d\theta)+\beta'(L'dl'+G'dg'+\Theta'd\theta')]+3t(C_1-C_0)$$

будет инвариантом.

Та же однородность имеет место, если за переменные принять, как в п. 12,

$$\begin{matrix}\Lambda, & H, & Z, & \Lambda', & H', & Z', \\ \lambda, & h, & \zeta, & \lambda', & h', & \zeta'.\end{matrix}$$

Следовательно,

$$\int(\Lambda d\lambda+Hdh+Zd\zeta)+\Lambda'd\lambda'+H'dh'+Z'd\zeta')+3t(C_1-C_0)$$

будет инвариантом.

Если принять за переменные (см. п. 12)

$$\begin{matrix}\Lambda, & \Lambda', & \xi, & \xi', & p, & p', \\ \lambda, & \lambda', & \eta, & \eta', & q, & q',\end{matrix}$$

функция F будет однородной степени -2 относительно Λ, ξ, η, p и q.

Отсюда следует, что

$$\int \sum (2\Lambda d\lambda + \xi d\eta - \eta d\xi + pdq - qdp) + 6t (C_1 - C_0)$$

— инвариант.

Знак Σ означает, что к каждому члену указанного вида следует присоединить член, получающийся из него приписыванием буквам штрихов. Так

$$\sum \xi d\eta = \xi d\eta + \xi' d\eta'.$$

Если, наконец, мы примем переменные из пунктов 131 и 137

$$\Lambda, \ \Lambda'; \ \tau_i,$$
$$\lambda, \ \lambda'; \ \sigma_i,$$

то мы увидим таким же образом, что

$$\int [2\Lambda d\lambda + 2\Lambda' d\lambda' + \sum (\tau_i d\sigma_i - \sigma_i d\tau_i)] + 6t (C_1 - C_0)$$

будет инвариантом четвертого типа.

Замечание об инварианте п. 256

264. В п. 256 мы рассмотрели случай, когда x обозначают координаты n точек в пространстве, и уравнения динамики принимают вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dx},$$

где V — однородна степени p относительно x.

Мы видели, что в этом случае

$$J = \int \sum (2xdy - pydx) + (p-2) t (C_1 - C_0)$$

— инвариант четвертого типа.

Два частных случая заслуживают некоторого внимания. Предположим

$$p = 2;$$

тогда приходим к равенству

$$J = 2 \int \sum (xdy - ydx),$$

и J — инвариант первого типа.

Это получается, в частности, когда предполагают, что несколько материальных точек притягиваются прямо пропорционально расстоянию. Тогда проверка чрезвычайно легка.

Действительно, в этом случае имеем

$$x = A\cos\lambda t + B\sin\lambda t$$

и

$$y = -m\lambda A\sin\lambda t + m\lambda B\cos\lambda t,$$

где λ — абсолютная постоянная, в то время как A и B — постоянные интегрирования, которые, вообще говоря, различны для различных пар сопряженных переменных. Тогда получаем

$$dx = \cos\lambda t dA + \sin\lambda t dB,$$

$$dy = -m\lambda\sin\lambda t dA + m\lambda\cos\lambda t dB,$$

откуда

$$xdy - ydx = m\lambda(AdB - BdA).$$

Это показывает, что

$$J = 2\lambda\int\sum m(AdB - BdA)$$

является инвариантом, поскольку время исчезло, и в нем фигурируют только одни постоянные интегрирования и их дифференциалы.

Пусть теперь $p = -2$; этот случай осуществляется, в частности, когда несколько материальных точек притягиваются обратно пропорционально кубу расстояний.

Тогда инвариант J превращается в

$$J = 2\int\sum(xdy + ydx) - 4t(C_1 - C_0).$$

Но количество под знаком интеграла — полный дифференциал выражения

$$S = \sum xy,$$

так что если обозначить через S_0 и S_1 значения S, соответствующие двум концам дуги интегрирования, то получится

$$J = (2S_1 - 4C_1t) + (2S_0 - 4C_0t).$$

Если мы, в частности, предположим, что один из концов дуги интегрирования соответствует частному положению системы, в котором n материальных точек находятся в покое и на очень большом расстоянии друг от друга, взаимные силы будут очень малы, так что скорости этих материальных точек будут оставаться весьма долго очень малыми, а расстояния — очень большими. Отсюда получается, что C_0 будет нулем, так же, как и S_0, и для всех значений t, как и для $t=0$, останется

$$J = 2S_1 - 4C_1t.$$

Следовательно, мы будем иметь

$$S = 2Ct + B,$$

где B — новая постоянная, а C — постоянная живых сил; или же

$$\sum xy = 2Ct + B,$$

или

$$\sum mx\frac{dx}{dt} = 2Ct + B,$$

или, интегрируя,

$$\sum \frac{mx^2}{2} = Ct^2 + Bt + A,$$

где A — третья постоянная.

Это — результат, полученный Якоби в начале его «Vorlesungen über Dynamik».

Случай приведенной задачи

265. Можно снова возвратиться к вопросу, который мы разобрали в п. 260, рассматривая задачи, связанные с задачей трех тел, но немного упрощенные.

Я рассмотрю сначала то, что буду называть *ограниченной* задачей, т. е. задачу п. 9, где две массы описывают концентрические окружности, в то время как третья бесконечно малая масса движется в плоскости этих двух окружностей.

Число степеней свободы равно тогда двум; имеется одна пара уравнений вида (5bis), (5ter), одно уравнение (10bis) и одно уравнение (10ter) (см. п. 259).

Следовательно, мы можем получить *самое большее* один инвариант первого типа, уже известный, два инварианта второго типа, из которых один известен, два инварианта третьего типа, один из которых известен, один инвариант четвертого типа, уже известный.

Мы сможем равным образом рассмотреть *плоскую* задачу, т. е. задачу трех тел, движущихся в одной и той же плоскости.

Наконец, мы можем предположить, что уменьшили число степеней свободы по методу п. 16; тогда в случае общей задачи придем к тому, что я буду называть *общей приведенной* задачей; в случае плоской задачи придем к тому, что я буду называть *плоской приведенной* задачей.

Рассмотрение, к которому мы придем в различных случаях, может быть сведено в следующую таблицу:

	Задачи				
	Ограниченная	Плоская	Общая	Плоская приведенная	Общая приведенная
Число степеней свободы	2	4	6	3	4
Число пар (5bis), (5ter)	1	2	3	2	3
Число уравнений (10bis)	1	2	4	1	1
Число уравнений (10ter)	1	2	2	1	1
Максимальное число возможных инвариантов:					
первого типа	1	2	4	1	1
второго типа	2	5	13	3	4
третьего типа	2	5	11	3	4
четвертого типа	1	2	2	1	1
Максимальное число возможных *новых* инвариантов:					
первого типа	0	0	0	0	0
второго типа	1	2	3	2	3
третьего типа	1	3	4	2	3
четвертого типа	0	1	1	0	0

Глава XXIV

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ

Методы проверки

266. В томе II мы изложили различные методы нахождения рядов, которые формально удовлетворяют уравнениям задачи трех тел. Так как эти ряды могут иметь большое практическое значение и поскольку они получаются ценою длинных и трудных вычислений, то все средства, которые можно найти для проверки этих вычислений, могут оказаться ценными; рассмотрение интегральных инвариантов доставляет нам одно из таких средств, не лишенное интереса.

Обозначим через x_i ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$) координаты двух планет (которые должны быть отнесены, как мы говорили в п. 11 и как мы всегда делали с тех пор, первая — к Солнцу, вторая — к центру тяжести первой планеты и Солнца); обозначим также через y_i компоненты их количеств движения; эти количества x_i и y_i могут быть разложены в ряды следующим образом.

Вспомним результаты глав XIV и XV и, в частности, результаты п. 155. В этих главах вместо двенадцати переменных x_i и y_i, которые я только что определил, мы употребили для определения положений двух планет двенадцать других переменных

$$\Lambda,\ \Lambda',\ \lambda_1,\ \lambda_1',\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_4,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \tau_4.$$

Кроме того, мы ввели шесть аргументов

$$w_1,\ w_2,\ w_1',\ w_2',\ w_3',\ w_4',$$

полагая

$$w_i = n_i t + \varpi_i;\quad w_i' = n_i' t + \varpi_i',$$

и шесть других постоянных интегрирования

$$\Lambda_0,\ \Lambda_0',\ x_1'^0,\ x_2'^0,\ x_3'^0,\ x_4'^0,$$

и мы видели, что можно удовлетворить уравнениям движения следующим образом.

Количества

$$\Lambda,\ \Lambda',\ \lambda_1 - w_1,\ \lambda_1' - w_2,\ \sigma_i,\ \tau_i$$

разложимы по степеням μ и $x_i'^0$. Каждый член периодичен относительно w и w' и зависит, кроме того, от двух постоянных интегрирования Λ_0 и Λ_0'.

Постоянные n_i и n_i' разложимы по степеням μ и $x_i'^0$ и зависят, кроме того, от Λ_0 и Λ_0'.

Величины w_i и w_i' суть шесть постоянных интегрирования.

Наконец,

$$\Lambda d\lambda + \Lambda' d\lambda' + \sum \sigma_i d\tau_i$$

— полный дифференциал, если заменить в нем двенадцать переменных Λ, λ, σ и τ их разложениями и рассматривать в этих разложениях w и w' как шесть независимых переменных, а шесть количеств Λ_0, Λ_0', $x_i'^0$ — как постоянные.

Наши величины x_i и y_i, которые я только что определил, легко выражаются при помощи двенадцати переменных Λ, λ, σ и τ.

Мы заключаем, что x_i и y_i могут быть разложены в ряды, расположенные по степеням μ и $x_i'^0$, равно как по косинусам и синусам кратных w и w', в которых каждый коэффициент зависит, кроме того, от Λ_0 и Λ_0'.

Сверх того, выражение

$$\sum x_i dy_i$$

будет полным дифференциалом, если считать w и w' шестью независимыми переменными, а Λ_0, Λ_0', $x_i'^0$ — постоянными.

Ряды, полученные таким образом (едва ли есть нужда напоминать об этом), не являются сходящимися; они имеют значение только с точки зрения формальных вычислений, что придает им, однако, определенную практическую полезность, как я это объяснил в главе VIII.

Тем не менее, если подставить эти разложения x_i и y_i в выражение интегрального инварианта, то результат подстановки опять должен будет, по крайней мере с формальной точки зрения, удовлетворять условиям, которым должен удовлетворять интегральный инвариант, что и доставит метод проверки, к которому я хочу привлечь внимание.

267. Выше мы видели, что

$$\int \sum (2x dy + y dx) - 3t (C_1 - C_0) \qquad (1)$$

— интегральный инвариант.

Чтобы воспользоваться этим инвариантом, сделаем замену переменных, аналогичную замене п. 237.

Положим для большей симметрии в обозначениях

$$w_i' = w_{i+2} \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \qquad n_i' = n_{i+2}, \qquad \varpi_i' = \varpi_{i+2},$$

$$\Lambda_0 = \xi_1, \qquad \Lambda_0' = \xi_2, \qquad x_i'^0 = \xi_{i+2}.$$

Мы видели, что x и y можно разложить в ряды, зависящие от w, w', Λ_0, Λ_0' и от $x_i'^0$, т. е. в новых обозначениях, от w_i и ξ_i ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Тогда можно взять за новые переменные ξ_i и w_i, и дифференциальные уравнения движения примут вид

$$\frac{d\xi_i}{0}=\frac{dw_i}{n_i}=dt \tag{2}$$

(подобно тому, как в п. 237, уравнения (1) после замены переменных приводились к виду

$$\left.\frac{dy_i}{0}=\frac{dz}{1}=dt\right).$$

Здесь n_i — функции только ξ_i.

Но еще лучше взять другие переменные; в самом деле, так как шесть n_i — функции только шести ξ_i, то ничто не мешает взять вместо ξ_i и w_i в качестве переменных n_i и w_i таким образом, чтобы дифференциальные уравнения приводились к виду

$$\frac{dn_i}{0}=\frac{dw_i}{n_i}=dt. \tag{3}$$

Интегральный инвариант первого порядка примет вид

$$J=\int\left(\sum A_i dn_i+\sum B_i dw_i\right),$$

где A и B — функции n_i и w_i.

Я могу предположить, что фигура F — дуга кривой, уравнения которой, меняющиеся со временем, имеют следующий вид:

$$n_i=f_i(\alpha,\ t),\qquad w_i=f_i'(\alpha,\ t),$$

причем переменные n_i и w_i выражены в функции времени t и параметра α, который меняется от α_0 до α_1 при прохождении всей дуги F. Тогда уравнения дуги F_0 будут

$$n_i=f_i(\alpha,\ 0),\qquad w_i=f_i'(\alpha,\ 0).$$

Приняв эти условия, я могу написать

$$J=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(\sum A_i\frac{dn_i}{d\alpha}+\sum B_i\frac{dw_i}{d\alpha}\right)d\alpha,$$

откуда

$$\frac{dJ}{dt}=\int d\alpha\sum\left(\frac{dA_i}{dt}\frac{dn_i}{d\alpha}+\frac{dB_i}{dt}\frac{dw_i}{d\alpha}+A_i\frac{d^2n_i}{dt\,d\alpha}+B_i\frac{d^2w_i}{dt\,d\alpha}\right).$$

Но мы имеем

$$\frac{dA_i}{dt}=\sum n_k \frac{dA_i}{dw_k},$$

$$\frac{dB_i}{dt}=\sum n_k \frac{dB_i}{dw_k},$$

$$\frac{d^2 n_i}{dt\,da}=0, \qquad \frac{d^2 w_i}{dt\,da}=\frac{dn_i}{da},$$

откуда, наконец,

$$\frac{dJ}{dt}=\int \sum_i \left[dn_i\left(\sum_k n_k \frac{dA_i}{dw_k}+B_i\right)+dw_i \sum_k n_k \frac{dB_i}{dw_k}\right].$$

Если J — абсолютный интегральный инвариант, то мы должны будем, следовательно, иметь

$$\sum_k n_k \frac{dB_i}{dw_k}=0, \tag{4}$$

$$\sum_k n_k \frac{dA_i}{dw_k}=-B_i. \tag{5}$$

Изучим теперь, что произойдет в случае, когда A и B — периодические функции w и могут, следовательно, быть разложены в тригонометрические ряды.

Рассмотрим сначала уравнение (4); пусть

$$B_i=\sum [b \cos (m_1 w_1+\ldots+m_6 w_6)+b' \sin (m_1 w_1+\ldots+m_6 w_6)],$$

где b и b' зависят от n_i.

Уравнение (4) приводится к виду

$$\sum (m_1 n_1+\ldots+m_6 n_6)[-b \sin (m_1 w_1+\ldots+m_6 w_6)+ \\ + b' \cos (m_1 w_1+\ldots+m_6 w_6)]=0,$$

что может иметь место только, если

$$m_1 n_1+\ldots+m_6 n_6=0, \tag{6}$$

или если

$$b=b'=0.$$

Но m — целые постоянные, n — наши независимые переменные, между которыми не может быть никакого линейного соотношения; уравнение (6), следовательно, влечет за собой

$$m_1=m_2=\ldots=m_6=0.$$

Это означает, что тригонометрическое разложение B_i сводится к его среднему значению, т. е. что B_i — функция только n_i, не зависящая от w_i.

Перейдем теперь к уравнению (5); пусть

$$A_i = \sum (a \cos \omega + a' \sin \omega),$$

где для краткости записано ω вместо

$$m_1 w_1 + \ldots + m_6 w_6.$$

Тогда уравнение (5) записывается так:

$$\sum (m_1 n_1 + \ldots + m_6 n_6)(-a \sin \omega + a' \cos \omega) = -B_i.$$

Рассмотрим сначала член, зависящий от w, т. е. такой член, что $m_1, m_2, \ldots, m_6$ не обращаются в нуль одновременно. Будем иметь

$$m_1 n_1 + \ldots + m_6 n_6 \neq 0.$$

B_i в правой части не зависит от w; значит, эта правая часть не содержит ни члена с $\cos \omega$, ни члена с $\sin \omega$. Отсюда вытекает, что

$$a = a' = 0.$$

Следовательно, A_i не зависит от w и сводится к постоянному члену его тригонометрического разложения, члену, который зависит только от n_i.

Но тогда уравнение (5) сводится к

$$B_i = 0.$$

Вообще, всякий абсолютный линейный интегральный инвариант первого порядка, в котором выражение под знаком интеграла алгебраично относительно x и y и, следовательно, периодично по w, должен будет иметь вид

$$\int \sum A_i dn_i,$$

где A_i зависят только от n_i; это действительно имеет место для известных нам абсолютных инвариантов, которые получаются дифференцированием интегралов площадей, живых сил или движения центра тяжести.

Но относительный * инвариант

$$J = \int \sum (2x dy + y dx)$$

заслуживает бóльшего внимания. Мы видели, что

$$J - 3t (C_1 - C_0)$$

* Как показывает дальнейшее изложение, для него выполнены условия п. 238. (*Прим. ред. перев.*).

(где C_0 и C_1 — значения постоянной живых сил на двух концах дуги F_0) есть интегральный инвариант. Следовательно, будем иметь

$$\frac{dJ}{dt} = 3(C_1 - C_0) = 3\int dC. \tag{7}$$

Если мы опять положим

$$J = \int \sum (A_i dn_i + B_i dw_i),$$

то уравнение (7) примет вид

$$\int \sum_i \left[dn_i \left(\sum_k n_k \frac{dA_i}{dw_k} + B_i \right) + dw_i \sum_k n_k \frac{dB_i}{dw_k} \right] = 3 \int \sum_i \frac{dC}{dn_i} dn_i$$

ибо постоянная живых сил C — функция только от n_i.

Уравнения (4) и (5), следовательно, должны быть заменены следующими:

$$\sum_k n_k \frac{dB_i}{dw_k} = 0, \tag{4bis}$$

$$\sum_k n_k \frac{dA_i}{dw_k} = 3\frac{dC}{dn_i} - B_i. \tag{5bis}$$

A и B должны быть периодическими функциями w.

Если мы поступим с уравнениями (4bis) и (5bis) так же, как поступили с уравнениями (4) и (5), то снова найдем:

1) что B_i не зависят от w;
2) что A_i не зависят от w;
3) что

$$3\frac{dC}{dn_i} = B_i.$$

Итак, мы находим окончательно

$$\sum (2x dy + y dx) = \sum A_i dn_i + 3 \sum \frac{dC}{dn_i} dw_i,$$

где A_i зависят только от n_i.

Другими словами, выражения

$$\sum_i \left(2x_i \frac{dy_i}{dn_k} + y_i \frac{dx_i}{dn_k} \right),$$

или

$$\sum_i \left(2x_i \frac{dy_i}{d\xi_k} + y_i \frac{dx_i}{d\xi_k} \right) \tag{8}$$

не зависят от w и являются функциями только либо ξ, либо n, в зависимости от того, выражено ли все в функции ξ и w или в функции n и w.

Таким же образом будем иметь

$$\sum_i \left(2x_i \frac{dy_i}{dw_k} + y_i \frac{dx_i}{dw_k}\right) = 3\frac{dC}{dn_k}. \tag{9}$$

x_i, y_i и C разложены, как я сказал, по степеням μ и $x_i'^0$. Выражения (8) и обе части равенств (9) также, следовательно, разложимы по степеням этих количеств.

Все члены разложений выражений (8) по степеням μ и $x_i'^0$ должны, следовательно, быть независимыми от w.

С другой стороны, каждый член разложения левой части (9) должен равняться соответствующему члену правой части.

Мы имеем, таким образом, очень большое число способов проверки наших вычислений.

268. Я сказал, что

$$\sum x_i dy_i$$

— полный дифференциал, если считать ξ_i постоянными, а w — независимыми переменными.

Действительно, мы тогда находим

$$\int \sum (2xdy + ydx) = 3\int \sum \frac{dC}{dn_i} dw_i,$$

или, так как dC/dn_i зависят только от ξ и, следовательно, должны быть рассматриваемы как постоянные, то

$$\int \sum (2xdy + ydx) = 3\sum \frac{dC}{dn_i} w_i,$$

откуда

$$\int \sum xdy + \int \sum (xdy + ydx) = 3\sum \frac{dC}{dn_i} w_i,$$

откуда, наконец,

$$\int \sum xdy = 3\sum \frac{dC}{dn_i} w_i - \sum xy. \tag{10}$$

Вернемся на мгновение к обозначениям п. 162. В этом пункте, как и в п. 152, мы взяли за переменные

$$\begin{matrix} \Lambda, & \Lambda', & \sigma_i, \\ \lambda_1, & \lambda_1', & \tau_i; \end{matrix} \tag{11}$$

мы положили

$$dS = (\Lambda - \Lambda_{0,0})\, d\lambda_1 + (\Lambda' - \Lambda_{0,0}')\, d\lambda_1' + \sum \sigma_i d\tau_i - d\,(\sigma_i^{0,1}\tau_i).$$

С другой стороны, переменные (11) так же, как и переменные x_i, y_i, являются сопряженными переменными. Отсюда вытекает, что, как мне случалось несколько раз объяснять, выражение

$$\sum x_i dy_i - \Lambda d\lambda_1 - \Lambda' d\lambda_1' - \sum \sigma_i d\tau_i = dU$$

есть полный дифференциал. Я прибавлю, что мы легко образуем функцию U, которую, следовательно, можно считать известной функцией x_i и y_i.

Тогда имеем

$$S = 3\sum \frac{dC}{dn_i} w_i - \sum xy - U - \Lambda_{0,0}\lambda_1 - \Lambda'_{0,0}\lambda'_1 - \sigma_i^{0,1}\tau_i. \tag{12}$$

Так как при приложении методики главы XV мы пришли к построению функции S, уравнение (12) доставляет в новом виде искомую контрольную формулу.

Связь с одной теоремой Якоби

269. Известно, что Якоби в начале своих «Vorlesungen über Dynamik» доказал, что в случае ньютонова притяжения среднее значение кинетической энергии равно с точностью до постоянного множителя среднему значению потенциальной энергии при допущении, разумеется, что координаты могут быть выражены тригонометрическими рядами того же вида, что и ряды, которые мы здесь изучаем.

Эта теорема Якоби непосредственно примыкает к предыдущему. Уравнения движения могут быть записаны следующим образом:

$$m_i \frac{dx_i}{dt} = y_i, \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{dV}{dx_i},$$

откуда

$$\sum \frac{y_i^2}{2m_i} - V = C.$$

Тогда — V представляет собой потенциальную энергию, C — полную энергию, а

$$\sum \frac{y_i^2}{2m_i}$$

— кинетическую энергию.

С другой стороны, так как функция V однородна степени —1, мы будем иметь

$$-V = \sum \frac{dV}{dx_i} x_i = \sum x_i \frac{dy_i}{dt},$$

$$\sum \frac{y_i^2}{2m_i} = \frac{1}{2} \sum y_i \frac{dx_i}{dt}.$$

Уравнение живых сил можно, следовательно, записать в виде

$$\frac{1}{2}\sum y_i \frac{dx_i}{dt} + \sum x_i \frac{dy_i}{dt} = C.$$

С другой стороны, возьмем снова уравнения (9) п. 267 и просуммируем их после умножения соответственно на n_k; получим

$$\sum_i \left(2x_i \sum_k n_k \frac{dy_i}{dw_k} + y_i \sum_k n_k \frac{dx_i}{dw_k}\right) = 3\sum_k n_k \frac{dC}{dn_k}.$$

Замечая, что

$$\sum n_k \frac{dx}{dw_k} = \frac{dx}{dt}$$

$\left(\text{поскольку } \frac{dw_k}{dt} = n_k\right)$, заключаем, что

$$\sum\left(2x_i \frac{dy_i}{dt} + y_i \frac{dx_i}{dt}\right) = 3\sum n_k \frac{dC}{dn_k}.$$

Сравнивая с уравнением живых сил, находим

$$\sum n_k \frac{dC}{dn_k} = \frac{2}{3}C;$$

это показывает, что C должна быть однородной степени $^2/_3$ относительно n_k, что можно было бы увидеть, впрочем, непосредственно. Теперь, среднее значение функции U, которое я обозначу $[U]$, будет нулем, если U — производная периодической функции; следовательно, имеем

$$\sum\left[y_i \frac{dx_i}{dt} + x_i \frac{dy_i}{dt}\right] = 0$$

и, сопоставляя с уравнением живых сил, выводим

$$\left[\frac{1}{2}\sum y_i \frac{dx_i}{dt}\right] = -C,$$

$$\left[\sum x_i \frac{dy_i}{dt}\right] = 2C,$$

откуда

$$\frac{\left[\sum \frac{y_i^2}{2m_i}\right]}{[-V]} = -\frac{1}{2}.$$

Это — теорема Якоби.

Рассматривая частные производные dx/dw_k вместо полных производных dx/dt, мы пришли бы к аналогичным результатам. Мы нашли бы

$$\sum_i \left[x_i \frac{dy_i}{dw_k} + y_i \frac{dx_i}{dw_k}\right] = 0$$

и, следовательно,

$$\left[\sum_i x_i \frac{dy_i}{dw_k}\right] = 3\frac{dC}{dn_k},$$

$$\left[\sum_i y_i \frac{dx_i}{dw_k}\right] = -3\frac{dC}{dn_k}.$$

Приложение к задаче двух тел

270. Предыдущие рассуждения прилагаются, в частности, к задаче двух тел. Рассмотрим планету и Солнце и отнесем планету к осям с фиксированным направлением, проходящим через Солнце; рассмотрим, следовательно, относительное движение планеты по отношению к Солнцу.

Пусть x_1, x_2, x_3 — три координаты планеты; y_1, y_2, y_3 — три составляющие количества движения.

Пусть ξ, η, ζ — три координаты планеты, отнесенные к особым осям, а именно, к большой оси орбиты, параллели малой оси и перпендикуляру к плоскости орбиты; мы будем иметь

$$x_1 = h_1\xi + h_1'\eta + h_1''\zeta,$$

$$x_2 = h_2\xi + h_2'\eta + h_2''\zeta,$$

$$x_3 = h_3\xi + h_3'\eta + h_3''\zeta,$$

где h — постоянные, связанные хорошо известными соотношениями, выражающими ортогональность преобразования координат.

Таким же образом будем иметь

$$y_i = \mu h_i \frac{d\xi}{dt} + \mu h_i' \frac{d\eta}{dt} + \mu h_i'' \frac{d\zeta}{dt},$$

где μ — масса планеты.

Теперь ясно, что ζ — нуль и что ξ и η — функции единственного аргумента w, являющегося средней аномалией, и двух постоянных — большой оси a и эксцентриситета e.

С другой стороны, h — функции трех углов Эйлера, или, более общо, каких-либо трех функций ω_1, ω_2, ω_3 этих трех углов.

Таким образом, x и y — функции w, a, e и ω.

Тогда будем иметь, называя C постоянной живых сил и n средним движением,

$$\sum\left(2x_i \frac{dy_i}{dw} + y_i \frac{dx_i}{dw}\right) = 3\frac{dC}{dn},$$

а с другой стороны, выражения

$$\sum\left(2x_i\frac{dy_i}{da}+y_i\frac{dx_i}{da}\right),$$

$$\sum\left(2x_i\frac{dy_i}{de}+y_i\frac{dx_i}{de}\right),$$

$$\sum\left(2x_i\frac{dy_i}{d\omega_k}+y_i\frac{dx_i}{d\omega_k}\right)$$

должны быть независимы от w.

Некоторые из этих высказываний были очевидны заранее и не доставляют нам нового контроля.

Действительно, $dx_i/d\omega_k$ — такие линейные функции x_i, коэффициенты которых зависят от ω, что

$$\sum_i x_i\frac{dx_i}{d\omega_k}=0.$$

Отсюда вытекает, что мы можем написать следующее тождество:

$$\alpha_1\frac{dx_1}{d\omega_k}+\alpha_2\frac{dx_2}{d\omega_k}+\alpha_3\frac{dx_3}{d\omega_k}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ \varphi_1^k & \varphi_2^k & \varphi_3^k\end{vmatrix},$$

где α — *любые* постоянные, а φ_i^k — заданные функции ω; также будем иметь

$$\alpha_1\frac{dy_1}{d\omega_k}+\alpha_2\frac{dy_2}{d\omega_k}+\alpha_3\frac{dy_3}{d\omega_k}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ \varphi_1^k & \varphi_2^k & \varphi_3^k\end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что мы имеем

$$\sum\left(2x_i\frac{dy_i}{d\omega_k}+y_i\frac{dx_i}{d\omega_k}\right)=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ \varphi_1^k & \varphi_2^k & \varphi_3^k\end{vmatrix}.$$

Это выражение должно сводиться к постоянной, не зависящей от w, и, так как мы имеем три аналогичных соотношения, которые получаются, если положить $k=1$, 2, 3, мы можем написать

$$y_3x_2-y_2x_3=\text{const},$$

$$y_1x_3-y_3x_1=\text{const},$$

$$y_2x_1-y_1x_2=\text{const}.$$

Но это не новый результат; это уравнения площадей.

Изучим теперь выражение

$$\sum\left(2x_i\frac{dy_i}{da}+y_i\frac{dx_i}{da}\right).$$

Посмотрим, как x и y зависят от a. Величины x содержат a множителем, а y содержат an, ибо имеем

$$y_i=\mu\frac{dx_i}{dt}=\mu n\frac{dx_i}{dw}.$$

Следовательно, имеем

$$\frac{dx_i}{da}=\frac{x_i}{a},\qquad \frac{dy_i}{da}=\frac{y_i}{a}+\frac{y_i}{n}\frac{dn}{da}.$$

Следовательно, наше выражение превращается в

$$\sum x_iy_i\left(\frac{3}{a}+\frac{2}{n}\frac{dn}{da}\right).$$

Легко проверить, что оно равно нулю; действительно, имеем согласно третьему закону Кеплера,

$$n^2a^3=\text{const},$$

откуда

$$\frac{2dn}{n}+\frac{3da}{a}=0.$$

Мы и здесь не получаем таким образом нового способа контроля.

Остается изучить два выражения

$$\sum\left(2x_i\frac{dy_i}{dw}+y_i\frac{dx_i}{dw}\right)=W,$$

$$\sum\left(2x_i\frac{dy_i}{de}+y_i\frac{dx_i}{de}\right)=E.$$

Мы должны проварьировать только e и w; поэтому не должны больше варьировать ω, т. е. направление большой оси орбиты. Следовательно, можем выбрать особые (орбитальные) оси и положить

$$x_1=\xi=a\left[-\frac{3}{2}e+\sum J_{p-1}(pe)\frac{\cos pw}{p}\right],$$

$$x_2=\eta=a\sqrt{1-e^2}\left[\sum J_{p-1}(pe)\frac{\sin pw}{p}\right],$$

$$x_3=\zeta=0.$$

Функции J — функции Бесселя; под знаком Σ индекс p принимает все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$, за исключением значения 0.

Отсюда получим

$$y_1 = -\mu an \sum J_{p-1}(pe) \sin pw,$$
$$y_2 = +\mu an \sqrt{1-e^2} \sum J_{p-1}(pe) \cos pw.$$

Тогда выражение W после сокращения на общий множитель $\mu a^2 n$ принимает вид

$$3e \sum J_{p-1} p \cos pw - 2 \sum J_{p-1} \frac{\cos pw}{p} \sum J_{p-1} p \cos pw +$$
$$+ \left[\sum J_{p-1} \sin pw\right]^2 - 2(1-e^2) \sum J_{p-1} \frac{\sin pw}{p} \sum J_{p-1} p \sin pw +$$
$$+ (1-e^2) [\sum J_{p-1} \cos pw]^2 = W'.$$

Я писал всюду для краткости J_{p-1} вместо $J_{p-1}(pe)$.

Мы должны иметь

$$W = 3 \frac{dC}{dn}.$$

Но

$$C = -\frac{m\mu}{2a}, \qquad n^2 a^3 = m,$$

где m обозначает массу Солнца, сложенную с массой планеты; следовательно,

$$C = -\frac{\mu}{2} m^{\frac{2}{3}} n^{\frac{2}{3}}$$

и

$$3 \frac{dC}{dn} = -\mu m^{\frac{2}{3}} n^{-\frac{1}{3}} = -\mu a^2 n.$$

Но так как

$$W = \mu a^2 n W',$$

то получится

$$W' = -1.$$

Приравнивая подобные члены, получим ряд соотношений между функциями Бесселя J.

Изучение выражения E привело бы нас к ряду аналогичных соотношений, в которые на этот раз вошли бы функции Бесселя J и их первые производные.

271. Можно было привести еще примеры частных приложений; можно было бы, например, после разбора, как мы это только что сделали в предыдущем пункте, случая кеплерова движения, т. е. после учета членов степени 0 относительно возмущающих масс, приложить те же принципы

к совокупности членов степени 1. Без всякого сомнения, мы пришли бы к интересным соотношениям.

Равным образом, можно было бы изучать по тому же способу уравнения вековых возмущений, которые рассмотрены в главе X. Тогда было бы выгоднее вместо интегрального инварианта

$$\int \sum (2x_i dy_i + y_i dx_i)$$

воспользоваться аналогичными инвариантами, которые определены в пунктах 261, 262, 263.

Мы оставим все эти вопросы в стороне.

Приложение к асимптотическим решениям

272. Применим еще эти принципы к асимптотическим решениям. Возьмем за переменные координаты x_i и

$$y_i = m_i \frac{dx_i}{dt}.$$

Рассмотрим инвариант

$$J = \int \sum (2xdy + ydx);$$

мы знаем, что если C — постоянная живых сил и если C_1 и C_0 — значения этой постоянной на двух концах линии интегрирования, то будем иметь

$$J - 3t\,(C_1 - C_0) = \text{const.} \qquad (1)$$

Если рассмотреть систему асимптотических решений, то она представится в следующем виде: x_i и y_i будут разложены по степеням

$$A_1 e^{\alpha_1 t},\ A_2 e^{\alpha_2 t},\ \ldots,\ A_k e^{\alpha_k t},$$

причем коэффициенты будут периодичны по $t+h$, и

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k,\ h$$

суть $n+1$ произвольных постоянных.

Если эти значения x_i и y_i подставить в уравнение живых сил, то левая часть окажется разложенной по степеням

$$A_1 e^{\alpha_1 t},\ A_2 e^{\alpha_2 t},\ \ldots,\ A_k e^{\alpha_k t},$$

причем коэффициенты будут периодичны по $t+h$; а так как она не должна зависеть от t, то отсюда вытекает, что она не будет зависеть также и от A_1, A_2, . . ., A_k и h.

Следовательно, если мы подставим значения x_i и y_i в уравнение (1), то получим

$$C_1 = C_0$$

и, следовательно,

$$J = \text{const}.$$

В J выражение под знаком интеграла оказывается разложенным по степеням

$$A_1 e^{\alpha_1 t},\ A_2 e^{\alpha_2 t},\ \ldots,\ A_k e^{\alpha_k t},$$

причем коэффициенты периодичны по $t+h$; оно зависит линейно от $k+1$ дифференциалов

$$dA_1,\ dA_2,\ \ldots,\ dA_k,\ dh.$$

Следовательно, мы должны иметь

$$\begin{aligned} \sum \left(2x \frac{dy}{dA_i} + y \frac{dx}{dA_i}\right) &= \text{const}, \\ \sum \left(2x \frac{dy}{dh} + y \frac{dx}{dh}\right) &= \text{const}. \end{aligned} \tag{2}$$

Левые части уравнений (2) оказываются разложенными по степеням $A_i e^{\alpha_i t}$; все члены этого разложения должны быть нулями, кроме свободного члена. Таким образом, получаем множество соотношений между коэффициентами разложения x_i по степеням $A_i e^{\alpha_i t}$.

Я ограничусь в качестве примера рассмотрением первого члена и напишу

$$x_i = X_i + Z_i A e^{\alpha t},$$

где X_i и Z_i периодичны по $t+h$.

Отсюда выводим

$$y_i = m_i \left[X_i' + A e^{\alpha t} (Z_i' + \alpha Z_i)\right],$$

X_i' и Z_i' означают производные от X_i и Z_i.

Тогда, пренебрегая все время членами с $e^{2\alpha t}$ и т. д., получим

$$\sum \left(2x \frac{dy}{dA} + y \frac{dx}{dA}\right) = \sum m e^{\alpha t} \left[2X (Z' + \alpha Z) + X'Z\right].$$

Следовательно,

$$\sum m (2XZ' + 2\alpha XZ + X'Z) = 0,$$

что дает первое соотношение между коэффициентами X_i и Z_i.

Соотношение

$$\sum \left(2x \frac{dy}{dh} + y \frac{dx}{dh}\right) = \text{const}$$

доставит другое, которое, однако, в действительности не будет отличаться от первого, так как, комбинируя его с этим первым соотношением, мы нашли бы уравнение, которое является непосредственным следствием принципа живых сил.

Глава XXV

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Возвращение к методу Болина

273. Прежде чем идти дальше, я должен дополнить некоторые из результатов глав VII, XIX и XX. Я хочу сначала резюмировать результаты, которые я буду сравнивать друг с другом и которые послужат мне сейчас отправным пунктом.

Мы видели в главе VII, что если система

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

допускает периодическое решение

$$x_i = x_i^0 \tag{2}$$

и если положить

$$x_i = x_i^0 + \xi_i,$$

то ξ_i будут разложимы по возрастающим степеням

$$A_1 e^{\alpha_1 t},\ A_2 e^{\alpha_2 t},\ \ldots,\ A_n e^{\alpha_n t}, \tag{3}$$

причем коэффициенты будут периодическими функциями от t; A_i суть постоянные интегрирования, α_i — характеристические показатели периодического решения (2).

Эти ряды всегда формально удовлетворяют уравнениям (1); они сходятся при определенных условиях, которые мы высказали в п. 105.

Имеется исключение в случае, когда между показателями α существует соотношение вида:

$$\gamma\sqrt{-1} + \sum \alpha\beta - \alpha_i = 0, \tag{4}$$

где коэффициенты β — целые, положительные или нули, коэффициент γ — целый, положительный или отрицательный (ср. т. I, стр. 290, строка 7; записывая это соотношение, я предполагаю, что единица времени была выбрана таким образом, чтобы период решения (2) был равен 2π).

Если имеется соотношение вида (4), то ξ не будут более разложимы по степеням количеств (3), а разлагаются по степеням этих количеств и t.

Это как раз и происходит, если уравнения (1) имеют каноническую форму уравнений динамики.

Действительно, в этом случае два показателя — нули, а остальные попарно равны и имеют противоположные знаки.

В случае уравнений динамики [или в более общем случае, когда имеется соотношение вида (4)], мы опять-таки смогли получить известный результат; достаточно было придать постоянным интегрирования A частные значения таким образом, чтобы обратить в нуль те из них, которые соответствуют нулевому показателю, и одну из тех двух постоянных, которые соответствуют каждой паре показателей, равных и противоположных по знаку. [Более общо: мы уничтожим постоянную A, соответствующую одному из показателей, входящих в соотношение вида (4), таким образом, чтобы между показателями, соответствующими постоянным A, которые отличны от нуля, не существовало соотношения этого вида].

Например, если

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \ \alpha_3 = -\alpha_4, \ \alpha_5 = -\alpha_6, \ \ldots, \ \alpha_{n-1} = -\alpha_n, \ (n \text{ — четно})$$

то положим

$$A_1 = A_2 = 0, \ A_3 = 0, \ A_5 = 0, \ \ldots, \ A_{n-1} = 0.$$

Тогда ξ опять будут разложимы по степеням тех количеств (3), которые отличны от нуля; только теперь мы не будем иметь больше общего решения уравнения (1), а получим частное решение, зависящее от меньшего чем n $\left(\text{а именно, } \frac{n-1}{2} \text{ в общем случае уравнений динамики}\right)$ числа произвольных постоянных.

Вот каким образом мы пришли к асимптотическим решениям: мы исходили из уничтожения определенного числа постоянных A, не только тех, которые приравняли нулю по причине, о которой я только что говорил, но и тех, которые мы должны уничтожить, чтобы удовлетворить условиям сходимости п. 105.

Я не занимаюсь в настоящий момент разложением ξ по степеням μ или $\sqrt{\mu}$.

В главе XIX я изучил метод Болина, который, в сущности, является только приложением метода Якоби, поскольку задача сведена к разысканию функции S, удовлетворяющей уравнению в частных производных. Только эта функция берется в виде, который специально приспособлен к случаю, когда между средними движениями имеется приближенное линейное соотношение с целыми коэффициентами. Случаи, которые должны нас интересовать больше всего, близки к тому, который я назвал предельным случаем (п. 207). Мы видели в этом параграфе, что функция S разложима по степеням $\sqrt{\mu}$ в виде

$$S = S_0 + \sqrt{\mu} S_1 + \mu S_2 + \ldots$$

и что

$$\frac{dS_p}{dy_k}$$

периодична с периодом 2π относительно

$$y_2, y_3, \ldots, y_n$$

(если принять обозначения упомянутого параграфа).

Но результаты могут быть упрощены заменой переменных, изложенной в пунктах 209 и 210.

Я определил в п. 206 $n+1$ функций

$$\eta, \zeta, \xi_i,$$

периодических относительно переменных

$$y_2, y_3, \ldots, y_n;$$

эти функции я рассматривал как обобщения периодических решений. Мы положили затем в п. 210

$$x_1 = x_1' + \eta, \quad y_1' = y_1 - \zeta, \quad y_i' = y_i \quad (i > 1),$$

$$x_i = x_i' + \xi_i + y_1' \frac{d\eta}{dy_i} - x_1' \frac{d\zeta}{dy_i}.$$

С новыми переменными x_i', y_i' уравнения сохраняют каноническую форму; только новые уравнения будут допускать следующие инвариантные соотношения:

$$x_1' = x_i' = y_1' = 0,$$

которые можно рассматривать как обобщения периодических решений для новых уравнений, так же как

$$x_1 = \eta, \quad y_1 = \zeta, \quad x_i = \xi_i$$

— для старых.

Мы можем, следовательно, без ограничения общности предположить, что канонические уравнения допускают в качестве инвариантных соотношений

$$x_1 = x_i = y_1 = 0.$$

Если это так, то мы видели в п. 210, что $y_1 = 0$ является простым нулем для производных dS_p/dy_1 и двойным нулем для производных dS_p/dy_i $(i > 1)$.

Таким образом, S или точнее $S-S_0$ может разлагаться по степеням y_1, и разложение будет начинаться с члена второй степени; мы будем иметь

$$S=S_0+\sum_2 y_1^2+\sum_3 y_1^3+\sum_4 y_1^4+\ldots, \tag{5}$$

где $\sum$ — ряды, зависящие от $y_2, y_3, \ldots, y_n$ и разложенные по степеням $\sqrt{\mu}$; кроме того, мы видим, что $\sum$ — периодические функции от $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

Но этого, к сожалению, для нашей цели недостаточно.

Функция S, определенная уравнением (5), зависит, в действительности только от $n-1$ произвольных постоянных

$$x_2^0,\ x_3^0,\ \ldots,\ x_n^0,$$

в то время как для полного решения задачи их необходимо иметь n.

Для более углубленного исследования обратимся к замене переменных п. 206. Если примем обозначения этого параграфа, т. е. если положим

$$z_1=\frac{1}{2}\int\frac{dy_1}{\sqrt{x_1'-\psi}},\qquad z_i=y_i-\frac{y_1}{A}\frac{dB}{dx_i'},\ \ldots,$$

если определим, как в упомянутом параграфе, переменные x_i', u_1, v_1, функции T и V, то производные V по v_1 и z_i будут периодическими функциями z_i [ср. т. II, стр. 645.]

Исследуем более подробно уравнения в начале стр. 646 (т. II), которые записываются в виде

$$y_1=\theta(v_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n),$$
$$x_k=\zeta_k(v_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n),$$

затем, считая $y_2, y_3, \ldots, y_n$ постоянными, рассмотрим, как в названном параграфе, уравнения

$$y_1=\theta(v_1),\qquad x_1=\zeta_1(v_1).$$

Если мы заставим меняться v_1, точка (x_1, y_1) опишет кривую, которую я хочу изучить. Предположим, что мы, не меняя постоянных x_2', x_3', $\ldots$, x_n', заставим меняться x_1'; получим бесконечное множество кривых, соответствующих различным значениям x_1'.

Выше мы предположили, что имеем инвариантные соотношения

$$x_1=x_i=y_1=0,$$

которые являются как бы обобщением периодических решений.

Этим соотношениям будет соответствовать точка

$$x_1=y_1=0,$$

т. е. начало координат. Именно в окрестности этой точки я буду изучать наши кривые.

Дадим x_1' значение, которое соответствует частной функции S, определенной уравнением (5); получим

$$x_1 = 2 \sum_2 y_1 + 3 \sum_3 y_1^2 + \ldots .$$

Следовательно, соответствующая кривая проходит через начало; мы получили бы вторую кривую, проходящую через начало, заменяя $\sqrt{\mu}$ на $-\sqrt{\mu}$.

Следовательно, имеем две кривые, пересекающиеся в начале; другие кривые смогут пройти вблизи начала, не достигая его и не пересекаясь друг с другом; множество кривых будет напоминать по своему общему виду в непосредственной окрестности начала фигуру, образованную рядом гипербол, имеющих одни и те же асимптоты, и их асимптотами.

274. Для того чтобы лучше изучить эти кривые и соответствующие функции S, ограничимся сначала случаем, когда имеются только две степени свободы.

Допустим, что мы сделали замену переменных п. 208, так что

$$x_1 = x_2 = y_1 = 0$$

— периодическое решение; это означает, что для

$$x_1 = x_2 = y_1 = 0$$

имеем

$$\frac{dF}{dy_1} = \frac{dF}{dy_2} = \frac{dF}{dx_1} = 0.$$

Разложим F по возрастающим степеням x_1, x_2 и y_1. Член степени 0 будет зависеть только от y_2 и так как мы должны иметь

$$\frac{dF}{dy_2} = 0,$$

то он сведется к постоянной. Так как F определена лишь с точностью до постоянной, то можно предположить, что этот член нулевой степени есть нуль.

Будем искать члены первой степени; так как

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dy_1} = 0,$$

то не будет других членов первой степени, кроме члена с x_2.

Положим теперь

$$x_1 = \varepsilon x_1', \qquad y_1 = \varepsilon y_1', \qquad x_2 = \varepsilon^2 x_2', \qquad y_2 = \varepsilon^2 y_2'.$$

Мы видим, что F делится на ε^2 и что если положить

$$F = \varepsilon^2 F',$$

то уравнения сохранят каноническую форму и станут

$$\frac{dx_i'}{dt}=\frac{dF'}{dy_i'},\qquad \frac{dy_i'}{dt}=-\frac{dF'}{dx_i'}. \tag{1}$$

Кроме того, F' будет разлагаться по степеням ε в виде

$$F'=F_0'+\varepsilon F_1'+\varepsilon^2F_2'+\ldots;$$

с другой стороны, F' будет разлагаться по степеням x_1', x_2', y_1', причем коэффициенты будут периодическими функциями от y_2'. Наконец,

$$F_0'=Hx_2'+Ax_1'^2+2Bx_1'y_1'+Cy_1'^2,$$

где H, A, B и C — периодические функции y_2'.

Применим сейчас к нашим уравнениям один метод, аналогичный методу Болина, в котором параметр ε будет играть ту же роль, которую в главе XIX играл параметр μ.

Отбросим штрихи, ставшие ненужными, и будем писать x_i, y_i, F, F_i вместо x_i', y_i', F', F_i'.

Прежде всего, я утверждаю, что всегда можно предположить

$$H=1.$$

Если бы, в самом деле, это было не так, то я взял бы за новые переменные

$$x_2^*=Hx_2,\qquad y_2^*=\int\frac{dy_2}{H}.$$

Каноническая форма уравнений не изменилась бы, поскольку

$$x_2^*dy_2^*-x_2dy_2=0$$

— полный дифференциал.

Сверх того, y_2^* увеличивается на постоянную, когда y_2 увеличивается на 2π; я всегда могу выбрать единицу времени таким образом, чтобы эта постоянная была равна 2π. Тогда всякая периодическая функция от y_2 с периодом 2π будет периодической функцией от y_2^* с периодом 2π. Итак, вид функции F не изменится; лишь первый член Hx_2 сведется к x_2^*.

Итак, предположим $H=1$.

Я утверждаю затем, что можно предположить

$$A=C=0,\qquad B=\text{const}.$$

В самом деле, образуем канонические уравнения (1), предполагая $\varepsilon=0$; получим

$$\frac{dy_2}{dt}=-1;\qquad \frac{dx_1}{dt}=-\frac{dx_1}{dy_2}=2(Bx_1+Cy_1),$$

$$\frac{dy_1}{dt}=-\frac{dy_1}{dy_2}=-2(Ax_1+By_1)$$

и одно уравнение относительно dx_2/dt, которое я могу заменить уравнением живых сил

$$x_2+Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2=\text{const}.$$

Уравнения

$$\frac{dx_1}{dy_2}=-2(Bx_1+Cy_1),\quad \frac{dy_1}{dy_2}=2(Ax_1+By_1)$$

— линейные с периодическими коэффициентами. В силу п. 29 они будут иметь общее решение

$$x_1=w\varphi+w_1\psi;\qquad y_1=w\varphi_1+w_1\psi_1,$$
$$w=\alpha e^{ay_2},\qquad w_1=\beta e^{by_2},$$

где φ, ψ, φ_1, ψ_1 — периодические функции y_2; α и β — постоянные интегрирования; a и b — постоянные.

Легко видеть, что $b=-a$ и что $\varphi\psi_1-\psi\varphi_1$ — постоянная, которую я могу предположить равной 1.

При этих предположениях совершим новую замену переменных, полагая

$$x_1=x_1'\varphi+y_1'\psi;\qquad y_1=x_1'\varphi_1+y_1'\psi_1,$$
$$x_2=x_2'+Hx_1'^2+2Kx_1'y_1'+Ly_1'^2;\ y_2=y_2',$$

где H, K, L — функции y_2, выбранные таким образом, чтобы каноническая форма уравнений не изменилась. Для этого достаточно, чтобы

$$x_1dy_1-x_1'dy_1'+x_2dy_2-x_2'dy_2'$$

было полным дифференциалом.

Но мы видим, что $x_1dy_1-x_1'dy_1'$ равно полному дифференциалу, увеличенному на

$$-\frac{dy_2}{2}\left[x_1'^2(\varphi_1\varphi'-\varphi\varphi_1')+y_1'^2\ (\psi_1\psi'-\psi\psi_1')+2x_1'y_1'\ (\varphi_1\psi'-\varphi\psi_1')\right],$$

где φ', φ_1', ... означают производные от φ, φ_1, ... по y_2.

Следовательно, для того чтобы каноническая форма уравнений не изменилась, достаточно взять

$$2H=\varphi_1\varphi'-\varphi\varphi_1';\qquad 2K=\varphi_1\psi'-\varphi\psi_1';\qquad 2L=\psi_1\psi'-\psi\psi_1'.$$

Мы видим, что H, K, L — периодические функции y_2, откуда следует, что вид функции F также не изменится.

Но если мы предположим $\varepsilon=0$, то уравнения должны допускать в качестве решения

$$x_1'=\alpha e^{+ay_2};\qquad y_1'=\beta e^{-ay_2},$$

откуда

$$B = -\frac{a}{2}, \quad A = C = 0.$$

Можно, следовательно, без ограничения общности предположить

$$H=1, \quad A=C=0, \quad B=\text{const},$$

откуда (поскольку мы убрали штрихи)

$$F_0 = x_2 + 2Bx_1y_1.$$

Это мы и будем делать впредь.

Совершим еще одну замену переменных, полагая

$$x_1y_1 = u, \quad \log\frac{y_1}{x_1} = 2v.$$

Так как

$$x_1dy_1 - udv = \frac{d(x_1y_1)}{2}$$

— полный дифференциал, то каноническая форма не изменится.

Кроме того, получаем

$$x_1 = e^v\sqrt{u}, \quad y_1 = e^{-v}\sqrt{u}.$$

Тогда функция F разлагается по степеням

$$\varepsilon, \ x_2, \ \sqrt{u}, \ e^v, \ e^{-v}, \ e^{iy_2}, \ e^{-iy_2}.$$

Кроме того, имеем

$$F_0 = x_2 + 2Bu.$$

Итак, возьмем F в виде

$$F(x_2, \ u; \ y_2, \ v)$$

и определим функцию S уравнением Якоби

$$F\left(\frac{dS}{dy_2}, \ \frac{dS}{dv}; \ y_2, \ v\right) = C,$$

где C — постоянная. Разложим S и C по степеням ε:

$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \ldots,$$

$$C = C_0 + \varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2 + \ldots.$$

Для определения S_0, S_1, S_2, ... получим следующие рекуррентные уравнения:

$$\begin{aligned} &\frac{dS_0}{dy_2}+2B\frac{dS_0}{dv}=C_0,\\ &\frac{dS_1}{dy_2}+2B\frac{dS_1}{dv}=\Phi+C_1,\\ &\frac{dS_2}{dy_2}+2B\frac{dS_2}{dv}=\Phi+C_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{2}$$

Я обозначаю, как это уже делал много раз, всякую известную функцию через Φ; во втором уравнении (2) я считаю S_0 известным; в третьем считаю S_0 и S_1 известными и т. д.

Положим

$$S_0=\alpha_0 y_2+\beta_0 v$$

при условии

$$\alpha_0+2B\beta_0=C_0.$$

Так как C_0 — произвольно, то обе постоянные α_0 и β_0 могут быть выбраны произвольно. Однако важно не брать $\beta_0=0$. Вот почему.

Предположим, что мы доказали, что

$$\frac{dS_0}{dv}+\varepsilon\frac{dS_1}{dv}+\ldots+\varepsilon^p\frac{dS_p}{dv}$$

разложимо по степеням

$$\varepsilon,\ e^{\pm v},\ e^{\pm iy_2};$$

мы сможем (если β_0 не нуль) заключить отсюда, что то же будет и для

$$\sqrt{\frac{dS_0}{dv}+\varepsilon\frac{dS_1}{dv}+\ldots+\varepsilon^p\frac{dS_p}{dv}},$$

поскольку подкоренное количество сводится к β_0 при $\varepsilon=0$. Если бы β_0 было нулем, мы не смогли бы сделать этот вывод; однако нам важно прийти к такому выводу из-за присутствия радикала $\sqrt{u}$ в F.

Рассмотрим теперь второе уравнение (2). Функция Φ, входящая в него, зависит от v и y_2 и имеет вид

$$\Phi=\sum A_{m,n}e^{mv+iny_2}+A_{0,0}.$$

Коэффициенты A суть постоянные, могущие зависеть от α_0 и β_0. Индексы m и n могут принимать все целые значения — положительные, отрицательные или нулевые. Для ясности я выделяю из-под знака Σ член, в котором эти два индекса — нули.

Тогда второе уравнение (2) дает

$$S_1 = \alpha_1 y_2 + \beta_1 v + \sum \frac{A_{m,n} e^{mv + iny_2}}{in + 2Bm}$$

при условии

$$\alpha_1 + 2B\beta_1 = A_{0,0} + C_1.$$

За исключением этого условия, постоянные α_1 и β_1 и C_1 произвольны; я могу предположить, следовательно, что

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0.$$

Я определяю S_2 третьим уравнением (2); это уравнение имеет совершенно тот же вид, что и второе, и решается таким же образом и т. д.

В результате производные dS/dy_2 и dS/dv разлагаются по степеням

$$\varepsilon,\ e^{\pm v},\ e^{\pm iy_2}.$$

Если сравнить этот анализ с проведенным в п. 125, то видно, что между ними имеется аналогия. Только вместо того, чтобы иметь лишь мнимые показательные функции

$$e^{\pm iy_1},\ e^{\pm iy_2},\ \ldots,\ e^{\pm iy_n},$$

мы имеем здесь вещественные показательные функции

$$e^{\pm v}.$$

275. Коль скоро функция S определена, мы можем, применяя метод Якоби, прийти к рядам, аналогичным рядам п. 127.

Функция S зависит от v, y_2 и двух постоянных α_0 и β_0. Постоянная живых сил

$$C = C_0 + \varepsilon C_1 + \ldots$$

есть функция α_0 и β_0.

Тогда мы имеем в качестве решения канонических дифференциальных уравнений следующие уравнения:

$$x_2 = \frac{dS}{dy_2};\ u = \frac{dS}{dv};\ n_1 t + \varpi_1 = \frac{dS}{d\alpha_0};\ n_2 t + \varpi_2 = \frac{dS}{d\beta_0};$$

$$n_1 = -\frac{dC}{d\alpha_0};\qquad n_2 = -\frac{dC}{d\beta_0},$$

где ϖ_1 и ϖ_2 — две новые постоянные интегрирования. Прежде всего, я вижу, что n_1 и n_2, которые зависят, между прочим, от α_0 и β_0, разложимы по степеням ε.

С другой стороны, S можно разложить по степеням ε и при $\varepsilon=0$ я имею в качестве первого приближения

$$x_2 = \frac{dS_0}{dy_2} = \alpha_0; \qquad u = \frac{dS_0}{dv} = \beta_0;$$

$$n_1 t + \varpi_1 = \frac{dS_0}{d\alpha_0} = y_2; \qquad n_2 t + \varpi_2 = \frac{dS_0}{d\beta_0} = v.$$

Мы имеем четыре уравнения, из которых можно найти x_2, u, y_2 и v, разложенные по степеням ε и зависящие, кроме того, от α_0, β_0, $n_1t+\varpi_1$, $n_2t+\varpi_2$.

С помощью рассуждения, совершенно аналогичного проведенному в п. 127, мы увидели бы, что

$$x_2, \; u, \quad y_2 - (n_1 t + \varpi_1), \quad v - (n_2 t + \varpi_2)$$

разложимы по степеням

$$\varepsilon, \; e^{\pm i(n_1 t + \varpi_1)}, \; e^{\pm(n_2 t + \varpi_2)}.$$

Кроме того, то же будет для $\sqrt{u}$, x_1 и y_1.

Я мог бы даже добавить, что все эти количества разложимы по степеням

$$\varepsilon, \; \alpha_0, \; e^{\pm i(n_1 t + \varpi_1)}, \; \sqrt{\beta_0} e^{(n_2 t + \varpi_2)}, \; \sqrt{\beta_0} e^{-(n_2 t + \varpi_2)};$$

в самом деле, $S - S_0$ разлагается по степеням

$$\varepsilon, \; \alpha_0, \; e^{\pm i y_2}, \; \sqrt{\beta_0} e^{v}, \; \sqrt{\beta_0} e^{-v}.$$

Если мы положим на мгновение

$$y_2 - (n_1 t + \varpi_1) = z_2, \qquad v - (n_2 t + \varpi_2) = z_3,$$

то два уравнения

$$n_1 t + \varpi_1 = \frac{dS}{d\alpha_0}, \qquad n_2 t + \varpi_2 = \frac{dS}{d\beta_0}$$

примут вид

$$z_2 = \varepsilon \psi_2, \qquad z_3 = \varepsilon \psi_3, \tag{3}$$

причем ψ_2 и ψ_3 разлагаются по степеням

$$\varepsilon, \; \alpha_0, \; e^{\pm i(n_1 t + \varpi_1)}, \; \sqrt{\beta_0} e^{(n_2 t + \varpi_2)}, \; \sqrt{\beta_0} e^{-(n_2 t + \varpi_2)},$$
$$z_2, \; z_3;$$

[в самом деле, мы имеем, например,

$$\sqrt{\beta_0}e^{v} = \sqrt{\beta_0}e^{n_2 t+\varpi_2}\left(1 + \frac{z_3}{1} + \frac{z_3^2}{1\cdot 2} + \frac{z_3^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots\right)$$

и аналогичные формулы для $e^{\pm i y_2}$ и $\sqrt{\beta_0}e^{-v}$].

Тогда для доказательства высказанного предложения достаточно приложить к уравнениям (3) теорему п. 30.

Сравним теперь полученный результат с результатом главы VII, который я упоминал в начале настоящей главы.

В главе VII мы видели, что в окрестности периодического решения

$$x_1 = y_1 = x_2 = 0$$

переменные x_1, y_1, x_2, y_2 разлагаются по степеням

$$e^{\pm i\left(n_1' t+\varpi_1\right)},\quad Ae^{n_2' t},\quad A' e^{-n_2' t} \text{ и } t,$$

где A, A' — постоянные интегрирования; n_1' и n_2' — абсолютные постоянные, зависящие только от периода периодического решения и его характеристических показателей.

Мы только что видели, что эти же переменные должны разлагаться по степеням

$$e^{\pm i(n_1 t+\varpi_1)},\quad \sqrt{\beta_0}e^{(n_2 t+\varpi_2)},\quad \sqrt{\beta_0}e^{-(n_2 t+\varpi_2)}.$$

Очевидно, оба результата находятся в согласии; действительно, можно сначала положить

$$A = \sqrt{\beta_0}e^{\varpi_2},\quad A' = \sqrt{\beta_0}e^{-\varpi_2}.$$

С другой стороны, n_1 и n_2 — постоянные, которые разлагаются по степеням ε, α_0 и β_0 и сводятся к n_1' и n_2' для $\varepsilon = \alpha_0 = \beta_0 = 0$.

Тогда мы можем, например, написать

$$e^{n_2 t} = e^{n_2' t}\cdot e^{\left(n_2 - n_2'\right)t},$$

а затем разложить второй сомножитель по степеням ε, α_0, β_0; тогда этот второй сомножитель окажется разложенным, кроме того, по степеням t.

Вот почему мы видели в главе VII, что время t и его степени выходят из-под знаков показательной и тригонометрических функций, что могло в определенных случаях создать трудность; предыдущий анализ показывает, что эта трудность была чисто искусственной.

Если я хочу теперь сравнить наш результат с результатами главы XIX, я рассмотрю кривые

$$y_1 = \theta(v_1),\qquad x_1 = \zeta_1(v_1),$$

определение которых я упоминал в конце п. 273. Для того чтобы получить уравнения этих кривых, я должен только взять выражения x_1 и y_1 и дать в них величинам α_0, β_0, $n_1t+\varpi_1$ постоянное значение. Тогда y_1 и x_1 разлагаются по степеням

$$e^{\pm(n_2t+\varpi_2)}.$$

Изменяя $n_2t+\varpi_2$, мы видим, что кривые имеют форму, которую я описал в конце п. 273.

В заключение я напомню, что все результаты верны лишь с формальной точки зрения; ряды сходятся только в случае асимптотических решений, уравнения которых получаются, если положить

$$\beta_0=0, \quad \varpi_2=+\infty,$$

что означает

$$\sqrt{\beta_0}e^{\varpi_2}=A, \quad \sqrt{\beta_0}e^{-\varpi_2}=0,$$

или же если положить

$$\beta_0=0, \quad \varpi_2=-\infty,$$

что означает

$$\sqrt{\beta_0}e^{\varpi_2}=0, \quad \sqrt{\beta_0}e^{-\varpi_2}=A',$$

где A и A' — конечные постоянные.

276. Перейдем к случаю, когда имеется более двух степеней свободы. Предыдущие результаты могут быть обобщены двумя различными способами.

Для того чтобы пояснить это, нам достаточно предположить три степени свободы. Может оказаться, что мы хотим изучить уравнения в окрестности системы инвариантных соотношений

$$x_1=x_2=x_3=y_1=0,$$

играющих роль обобщения периодических решений в смысле п. 209.

Может оказаться также, что мы хотим их изучить в окрестности истинного периодического решения

$$x_1=x_2=x_3=y_1=y_2=0.$$

В первом случае имеется четыре инвариантных соотношения и одно линейное соотношение между средними движениями, соотношение, которое мы взяли, употребляя в случае надобности замену переменных п. 202, в виде

$$n_1=0.$$

Во втором случае имеется пять инвариантных соотношений и два линейных соотношения между средними движениями, которые мы взяли в виде

$$n_1=0, \ n_2=0.$$

Начнем с первого случая и положим

$$F=\varepsilon^2 F'; \quad x_1=\varepsilon x_1', \quad y_1=\varepsilon y_1', \quad x_2=\varepsilon^2 x_2', \quad x_3=\varepsilon^2 x_3';$$

уравнения остаются каноническими, а F' становится разложенной по степеням ε в виде

$$F'=F_0'+\varepsilon F_1'+\ldots.$$

К тому же имеем

$$F_0'=h_2 x_2'+h_3 x_3'+A x_1'^2+2B x_1' y_1'+C y_1'^2,$$

или, отбрасывая штрихи, ставшие ненужными,

$$F_0=h_2 x_2+h_3 x_3+A x_1^2+2B x_1 y_1+C y_1^2.$$

Функции h_2, h_3, A, B, C зависят только от y_2 и y_3 и периодичны по этим двум переменным с периодом 2π.

Я произведу сейчас снова замены переменных п. 274; все, что я сказал там о них, остается верным, но только с формальной точки зрения.

Для того чтобы применить принципы формального вычисления, необходимо, чтобы имелся параметр, по степеням которого выполняются разложения. Здесь это будет параметр μ.

В самом деле, F и, следовательно, h_2, h_3, A, B, C разлагаются по целым степеням μ. Я добавляю, что при $\mu=0$ B и C обращаются в 0 и что h_2, h_3, A сводятся к постоянным, которые я называю h_2^0, h_3^0 и A_0.

Постараемся проинтегрировать следующие уравнения:

$$\frac{dy_2}{dt}=-h_2, \qquad \frac{dy_3}{dt}=-h_3. \tag{1}$$

Я стремлюсь выполнить интегрирование таким образом, чтобы

$$y_2-y_2', \ y_3-y_3'$$

были периодическими функциями с периодом 2π от двух новых переменных y_2' и y_3', которые сами должны иметь вид

$$y_2'=n_2 t+\varpi_2, \ y_3'=n_3 t+\varpi_3;$$

n_2 и n_3 — постоянные, разлагающиеся по степеням μ; ϖ_2 и ϖ_3 — постоянные интегрирования.

Тогда уравнения (1) принимают вид

$$n_2 \frac{dy_2}{dy_2'} + n_3 \frac{dy_2}{dy_3'} = -h_2, \quad n_2 \frac{dy_3}{dy_2'} + n_3 \frac{dy_3}{dy_3'} = -h_3. \tag{2}$$

Положим

$$h_i = h_i^0 + \mu h_i^{(1)} + \mu^2 h_i^{(2)} + \ldots,$$
$$y_i = y_i^0 + \mu y_i^{(1)} + \mu^2 y_i^{(2)} + \ldots,$$
$$n_i = n_i^0 + \mu n_i^{(1)} + \mu^2 n_i^{(2)} + \ldots$$

и предположим, что $n_i^{(k)}$ — постоянные; что $h_i^{(k)}$ — периодические функции y_2 и y_3 (h_i^0 сводятся, как мы это видели, к постоянным) и, наконец, что $y_i^{(k)}$ — периодические функции y_2' и y_3', за исключением y_i^0, которые сведутся к y_i'.

Приравняем в уравнениях (2) коэффициенты при одинаковых степенях μ и получим последовательность уравнений, которые позволят определить $y_i^{(k)}$ и $n_i^{(k)}$ одни за другими.

Эти уравнения записываются так:

$$\begin{aligned} &n_2^0 \frac{dy_2^0}{dy_2'} + n_3^0 \frac{dy_2^0}{dy_3'} = -h_2^0, \\ &n_2^0 \frac{dy_2^{(1)}}{dy_2'} + n_3^0 \frac{dy_2^{(1)}}{dy_3'} + n_2^1 \frac{dy_2^0}{dy_2'} + n_3^1 \frac{dy_2^0}{dy_3'} = \Phi, \\ &n_2^0 \frac{dy_2^{(2)}}{dy_2'} + n_3^0 \frac{dy_2^{(2)}}{dy_3'} + n_2^{(2)} \frac{dy_2^0}{dy_2'} + n_3^{(2)} \frac{dy_2^0}{dy_3'} = \Phi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Я обозначаю через Φ всякую известную функцию; во втором уравнении я считаю известными $y_i^{(0)}$ и $n_i^{(0)}$; в третьем — $y_i^{(0)}$, $y_i^{(1)}$, $n_i^{(0)}$ и $n_i^{(1)}$ и так далее.

Сначала мы имеем

$$y_2^0 = y_2', \qquad y_3^0 = y_3'; \qquad n_2^0 = -h_2^0, \qquad n_3^0 = -h_3^0,$$

так что уравнения (3) приводятся к

$$\begin{aligned} &n_2^0 \frac{dy_2^{(1)}}{dy_2'} + n_3^0 \frac{dy_2^{(1)}}{dy_3'} + n_2^{(1)} = \Phi, \\ &n_2^0 \frac{dy_2^{(2)}}{dy_2'} + n_3^0 \frac{dy_2^{(2)}}{dy_3'} + n_2^{(2)} = \Phi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3bis}$$

к которым необходимо присоединить уравнения

$$\begin{aligned} &n_2^0 \frac{dy_3^{(1)}}{dy_2'} + n_3^0 \frac{dy_3^{(1)}}{dy_3'} + n_3^{(1)} = \Phi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3ter}$$

выведенные из второго уравнения (2), как уравнения (3bis) из первого уравнения (2).

Все эти уравнения будут интегрироваться одним и тем же способом; возьмем, например, первое уравнение (3bis). Функция Ф, которая входит в него (как, впрочем, все другие функции Ф), периодична по y_2' и y_3'. Приравняем $n_2^{(1)}$ среднему значению этой функции и нам будет легко затем, пользуясь методикой, которую мы применяли уже столько раз, удовлетворить уравнению функцией $y_2^{(1)}$, периодичной по y_2' и y_3'.

Определив таким образом y_2 и y_3 в функции y_2' и y_3', я полагаю

$$x_2' = x_2 \frac{dy_2}{dy_2'} + x_3 \frac{dy_3}{dy_2'},$$

$$x_3' = x_2 \frac{dy_2}{dy_3'} + x_3 \frac{dy_3}{dy_3'}.$$

Ясно, что выражение

$$x_2'dy_2' + x_3'dy_3' - x_2dy_2 - x_3dy_3,$$

равное нулю, есть полный дифференциал и, следовательно, каноническая форма уравнений не изменится, когда мы возьмем за новые переменные x_2', x_3', y_2', y_3' вместо x_2, x_3, y_2, y_3.

Вид функции F также не изменится, но мы видим, что имеем тождественно

$$-n_2x_2' - n_3x_3' = h_2x_2 + h_3x_3,$$

что показывает, что коэффициенты при x_2' и x_3' сводятся к постоянным.

Итак, я всегда могу предположить, что h_2 и h_3 — постоянные.

Это я и буду делать впредь.

Пусть теперь необходимо проинтегрировать уравнения

$$\frac{dx_1}{dt} = 2(Bx_1 + Cy_1), \quad \frac{dy_1}{dt} = -2(Ax_1 + By_1),$$

или, что то же [7]

$$h_2 \frac{dx_1}{dy_2} + h_3 \frac{dx_1}{dy_3} = -2(Bx_1 + Cy_1),$$
$$h_2 \frac{dy_1}{dy_2} + h_3 \frac{dy_1}{dy_3} = 2(Ax_1 + By_1). \tag{4}$$

Постараемся удовлетворить этим уравнениям, полагая

$$x_1 = e^{at}z, \quad y_1 = e^{at}s,$$

где a — постоянная, z и s — периодические функции y_2 и y_3.

Уравнения станут

$$h_2\frac{dz}{dy_2}+h_3\frac{dz}{dy_3}-az=-2(Bz+Cs),$$
$$h_2\frac{ds}{dy_2}+h_3\frac{ds}{dy_3}-as=2(Az+Bs). \tag{4 bis}$$

Разложим A, B, C по степеням μ в виде

$$A=A_0+\mu A_2+\ldots,$$
$$B=B_0+\mu B_2+\ldots,$$
$$C=C_0+\mu C_2+\ldots.$$

Заметим, что A_0 — постоянная и что $B_0=C_0=0$. Разложим таким же образом h_2 и h_3

$$h_i=h_i^0+\mu h_i^1+\ldots.$$

Коэффициенты этих разложений — известные количества. Разложим, с другой стороны, неизвестные z, s и a по возрастающим степеням $\sqrt{\mu}$ в виде

$$a=a_1\sqrt{\mu}+a_2\mu+a_3\mu\sqrt{\mu}+\ldots,$$
$$z=z_1\sqrt{\mu}+z_2\mu+z_3\mu\sqrt{\mu}+\ldots,$$
$$s=s_0+s_1\sqrt{\mu}+s_2\mu+\ldots.$$

Чтобы представить уравнения в более симметричной форме, я запишу разложение A в виде

$$A=A_0+A_1\sqrt{\mu}+A_2\mu+A_3\mu\sqrt{\mu}+A_4\mu^2+\ldots.$$

Надо будет только помнить, что A_1, A_3, A_5, ... — нули. То же — для разложений B и C.

При этих предположениях я приравниваю в уравнениях (4bis) коэффициенты при одинаковых степенях μ. Я назову (4bis p) два уравнения, полученные приравниванием, с одной стороны, коэффициентов при $\mu^{\frac{p+1}{2}}$ в первом уравнении (4bis) и, с другой стороны, коэффициентов при $\mu^{\frac{p}{2}}$ во втором уравнении (4bis).

Уравнения (4bis 0) и (4bis 1) определят a_1, s_0 и z_1;
уравнения (4bis 1) и (4bis 2) определят a_2, s_1 и z_2;
уравнения (4bis 2) и (4bis 3) определят a_3, s_2 и z_3;
и так далее.

Я хочу показать, что уравнения (4bis p) определят s_p и z_{p+1} с точностью до постоянной, что они определят a_p и завершат определение s_{p-1}

и z_p, которые нам стали известны из (4bis $p-1$) только с точностью до постоянной.

Если мы вспомним, что

$$B_0 = B_1 = C_0 = C_1 = 0,$$

то увидим, что уравнения (4bis 0) записываются

$$h_2^0 \frac{dz_1}{dy_2} + h_3^0 \frac{dz_1}{dy_3} = 0, \qquad h_2^0 \frac{ds_0}{dy_2} + h_3^0 \frac{ds_0}{dy_3} = 0; \tag{4bis 0}$$

уравнения (4bis 1) записываются

$$h_2^0 \frac{dz_2}{dy_2} + h_3^0 \frac{dz_2}{dy_3} - a_1 z_1 = -2C_2 s_0, \qquad h_2^0 \frac{ds_1}{dy_2} + h_3^0 \frac{ds_1}{dy_3} - a_1 s_0 = 2A_0 z_1; \tag{4bis 1}$$

уравнения (4bis 2) записываются

$$h_2^0 \frac{dz_3}{dy_2} + h_3^0 \frac{dz_3}{dy_3} - a_2 z_1 - a_1 z_2 = -2B_2 z_1 - 2C_2 s_1 - 2C_3 s_0 + \Phi,$$
$$h_2^0 \frac{ds_2}{dy_2} + h_3^0 \frac{ds_2}{dy_3} - a_2 s_0 - a_1 s_1 = 2A_0 z_2 + 2A_1 z_1 + 2B_2 s_0 + \Phi. \tag{4bis 2}$$

[Буквы Φ означают известные функции, периодические по y_2 и y_3, которые равны нулю в уравнениях (4bis 2), но которые я, тем не менее, записываю, поскольку они появятся в последующих уравнениях.]

Уравнения (4bis 0) показывают нам, что z_1 и s_0 — постоянные. Перейдем затем к уравнениям (4bis 1) и приравняем средние значения обеих частей; получим

$$-a_1 z_1 = -2s_0 [C_2],$$

$$-a_1 s_0 = 2A_0 z_1,$$

что определяет a_1, s_0 и z_1; мы находим для a_1 два значения, равные по величине и противоположные по знаку. Уравнения (4bis 1) определяют затем с точностью до постоянной z_2 и s_1, которые суть периодические функции y_2 и y_3. Следовательно, можно считать известными

$$z_2 - [z_2] \quad \text{и} \quad s_1 - [s_1].$$

Перейдем к уравнениям (4bis 2) и приравняем средние значения обеих частей; получим два уравнения, из которых можно будет найти a_2, $[z_2]$ и $[s_1]$.

Так как средние значения обеих частей равны, то уравнения (4bis 2) дадут z_3 и s_2 с точностью до постоянных в виде периодических функций y_2 и y_3.

И так далее.

Так как мы нашли для a_1 два значения, то уравнения (4bis) допускают два решения. Пусть

$$a = a, \qquad z = \varphi, \qquad s = \varphi_1,$$
$$a = -a, \qquad z = \psi, \qquad s = \psi_1$$

— эти два решения. Общее решение уравнений (4) будет

$$x_1 = Ae^{at}\varphi + Be^{-at}\psi,$$
$$y_1 = Ae^{at}\varphi_1 + Be^{-at}\psi_1.$$

Мы всегда можем предположить

$$\varphi\psi_1 - \varphi_1\psi = 1.$$

Тогда, как в п. 274, мы увидели бы, что если положить

$$x_1 = x_1'\varphi + y_1'\psi, \qquad y_1 = x_1'\varphi_1 + y_1'\psi_1,$$
$$x_2 = x_2' + H_2x_1'^2 + 2K_2x_1'y_1' + L_2y_1'^2, \quad y_2 = y_2',$$
$$x_3 = x_3' + H_3x_1'^2 + 2K_3x_1'y_1' + L_3y_1'^2, \quad y_3 = y_3'$$

и если H_2, K_2, L_2, H_3, K_3, L_3 — подходящим образом выбранные периодические функции y_2 и y_3, то каноническая форма уравнений не изменится.

Вид F также не изменится, но B сведется к постоянной, A и C — к 0. Итак, всегда можно предположить

$$B = \text{const}, \quad A = C = 0.$$

Остальные вычисления завершаются, как в пунктах 274 и 275, и мы окончательно приходим к следующему заключению:

Переменные x_i и y_i могут разлагаться по степеням ε, $\sqrt{\mu}$, трех постоянных α_0, α_0' и β_0, $e^{\pm i(n_1t+\varpi_1)}$, $e^{\pm i\left(n_1't+\varpi_1'\right)}$, $\sqrt{\beta_0}e^{(n_2t+\varpi_2)}$, $\sqrt{\beta_0}e^{-(n_2t+\varpi_2)}$.

Сами постоянные n_1, n_1' и n_2 также разложимы по степеням ε, $\sqrt{\mu}$, α_0, α_0', β_0.

277. Перейдем ко второму приему обобщения и предположим, что мы хотим изучить уравнения в окрестности истинного периодического решения, взятого в виде

$$x_1 = x_2 = x_3 = y_1 = y_2 = 0.$$

Положим

$$F=\varepsilon^2 F',\ x_1=\varepsilon x_1',\ y_1=\varepsilon y_1',\ x_2=\varepsilon x_2',$$
$$y_2=\varepsilon y_2',\ x_3=\varepsilon^2 x_3',\ y_3=y_3',$$

откуда

$$F=F_0'+\varepsilon F_1'+\ldots.$$

Уравнения остаются каноническими, и мы имеем

$$F_0'=hx_3'+\Phi(x_1',\ y_1',\ x_2',\ y_2'),$$

где Φ — однородная квадратичная форма от x_1', y_1', x_2', y_2'; коэффициенты формы Φ и h — периодические функции от $y_3=y_3'$.

Мы отбросим впредь штрихи, ставшие ненужными, и просто запишем

$$F_0=hx_3+\Phi(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2).$$

Так же, как и в пунктах 274 и 276, мы доказали бы, что всегда можно предположить, что h сводится к постоянной.

Рассмотрим теперь уравнения

$$\frac{dy_3}{dt}=-h,\ \frac{dx_1}{dt}=\frac{d\Phi}{dy_1},\ \frac{dy_1}{dt}=-\frac{d\Phi}{dx_1},$$
$$\frac{dx_2}{dt}=\frac{d\Phi}{dy_2},\ \frac{dy_2}{dt}=-\frac{d\Phi}{dx_2}.$$

Они линейны и имеют периодические коэффициенты. Их общее решение будет, следовательно, иметь вид:

$$\begin{aligned}
x_1&=A_1e^{at}\varphi_{1,1}+A_2e^{-at}\varphi_{2,1}+A_3e^{bt}\varphi_{3,1}+A_4e^{-bt}\varphi_{4,1},\\
y_1&=A_1e^{at}\varphi_{1,2}+A_2e^{-at}\varphi_{2,2}+A_3e^{bt}\varphi_{3,2}+A_4e^{-bt}\varphi_{4,2},\\
x_2&=A_1e^{at}\varphi_{1,3}+A_2e^{-at}\varphi_{2,3}+A_3e^{bt}\varphi_{3,3}+A_4e^{-bt}\varphi_{4,3},\\
y_2&=A_1e^{at}\varphi_{1,4}+A_2e^{-at}\varphi_{2,4}+A_3e^{bt}\varphi_{3,4}+A_4e^{-bt}\varphi_{4,4}.
\end{aligned}$$

A — постоянные интегрирования, φ — периодические функции y_3.

Легко проверить, что выражение

$$\varphi_{i,1}\varphi_{k,2}-\varphi_{i,2}\varphi_{k,1}+\varphi_{i,3}\varphi_{k,4}-\varphi_{i,4}\varphi_{k,3}$$

— нуль, за исключением двух следующих случаев:

$$i=1,\quad k=2;\quad i=3,\ k=4.$$

В этих двух случаях это выражение сводится к постоянной, которую я могу предположить равной 1.

Положим теперь

$$x_1 = x'_1\varphi_{1,1} + y'_1\varphi_{2,1} + x'_2\varphi_{3,1} + y'_2\varphi_{4,1},$$
$$y_1 = x'_1\varphi_{1,2} + y'_1\varphi_{2,2} + x'_2\varphi_{3,2} + y'_2\varphi_{4,2},$$
$$x_2 = x'_1\varphi_{1,3} + y'_1\varphi_{2,3} + x'_2\varphi_{3,3} + y'_2\varphi_{4,3},$$
$$y_2 = x'_1\varphi_{1,4} + y'_1\varphi_{2,4} + x'_2\varphi_{3,4} + y'_2\varphi_{4,4}.$$

Тогда мы видим, что

$$x_1dy_1 - y_1dx_1 + x_2dy_2 - y_2dx_2 = x'_1dy'_1 - y'_1dx'_1 + x'_2dy'_2 - y'_2dx'_2 + \psi dy_3,$$

где ψ — однородная квадратичная форма относительно x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, коэффициенты которой есть периодические функции y_3.

Тогда, если мы положим

$$x_3 = x'_3 - \frac{\psi}{2}, \qquad y_3 = y'_3,$$

выражение

$$x_1dy_1 + x_2dy_2 + x_3dy_3 - x'_1dy'_1 - x'_2dy'_2 - x'_3dy'_3$$

будет полным дифференциалом, а каноническая форма уравнений не изменится.

Вид функции F не изменится, только F_0 сводится к

$$hx'_3 + Ax'_1y'_1 + Bx'_2y'_2,$$

где h, A и B — постоянные.

Если бы мы положили затем

$$x'_1y'_1 = u_1, \qquad \log\frac{y'_1}{x'_1} = 2v_1,$$

$$x'_2y'_2 = u_2, \qquad \log\frac{y'_2}{x'_2} = 2v_2,$$

то вычисления завершились бы, как в пунктах 275 и 276; мы пришли бы к следующему заключению:

x_i и y_i разлагаются по степеням ε, трех постоянных α_0, β_0 и β'_0, $e^{\pm i(n_1t+\varpi_1)}$, $\sqrt{\beta_0}\,e^{n_2t+\varpi_2}$, $\sqrt{\beta_0}\,e^{-(n_2t+\varpi_2)}$, $\sqrt{\beta'_0}\,e^{n'_2t+\varpi'_2}$, $\sqrt{\beta'_0}\,e^{-(n'_2t+\varpi'_2)}$.

Сами показатели n_1, n_2 и n'_2 разлагаются по степеням ε, α_0, β_0 и β'_0.

Это обобщение тотчас прилагается, когда имеется n степеней свободы; первый случай — случай предыдущего параграфа — соответствует тому, когда имеется $n+1$ инвариантных соотношений и единственное линейное соотношение между средними движениями. Это — случай, которым мы занимались в главе XIX.

Второй случай — случай настоящего пункта — соответствует тому, когда имеется $2n-1$ инвариантных соотношений, определяющих истин-

ное периодическое решение, и когда имеется $n-1$ линейных соотношений между средними движениями. Это — случай асимптотических решений, которые занимали нас в главе VII.

Однако имеются промежуточные случаи, когда мы имеем $n+q$ инвариантных соотношений и q линейных соотношений между средними движениями. Тогда x_i и y_i могут разлагаться по положительным или отрицательным степеням q вещественных и $n-q$ мнимых показательных функций [8].

Связь с интегральными инвариантами

278. Итак, предположим, что канонические уравнения

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i}; \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{1}$$

допускают периодическое решение следующего вида:

$$x_i=\varphi_i(t+h), \qquad y_i=\psi_i(t+h),$$

где h — постоянная интегрирования; и пусть T — период, так что φ_i и ψ_i разлагаются в ряды по синусам и косинусам кратных $\frac{2\pi}{T}(t+h)$.

Рассмотрим решения, близкие к этому периодическому решению; они могут быть, согласно предыдущему, взяты в следующем виде: x_i и y_i будут расположены по степеням $2n-2$ попарно сопряженных количеств, которые я обозначу

$$\begin{array}{ll} A_1e^{\alpha_1 t}, & A'_1e^{-\alpha_1 t}, \\ A_2e^{\alpha_2 t}, & A'_2e^{-\alpha_2 t}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_{n-1}e^{\alpha_{n-1} t}, & A'_{n-1}e^{-\alpha_{n-1} t}. \end{array}$$

A и A' — произвольные постоянные интегрирования; сами показатели α могут разлагаться по степеням $A_1A'_1,\ A_2A'_2,\ \ldots,\ A_{n-1}A'_{n-1}$.

Кроме того, коэффициенты разложения x_i и y_i — периодические функции $t+h$ с периодом T. Эти коэффициенты (так же, как и показатели α) зависят, помимо того, от постоянной живых сил C.

Мы знаем, что существует интегральный инвариант

$$\int\sum dx_i dy_i, \tag{2}$$

откуда вытекает, что если β и γ — две постоянные интегрирования, мы должны иметь

$$\sum\left(\frac{dx_i}{d\beta}\frac{dy_i}{d\gamma}-\frac{dx_i}{d\gamma}\frac{dy_i}{d\beta}\right)=\text{const}.$$

Мы сможем написать это уравнение в другой форме; предположим, что мы даем β приращение $\delta\beta$ и что отсюда для x_i, y_i, $A_i e^{\alpha_i t}$, ... получаются приращения

$$\delta x_i, \quad \delta y_i, \quad \delta A_i e^{\alpha_i t}, \quad \ldots .$$

Предположим, с другой стороны, что мы даем γ приращение $\delta'\gamma$ и что отсюда для x_i, y_i, ... получаются приращения

$$\delta' x_i, \quad \delta' y_i, \quad \ldots .$$

Наше уравнение запишется в виде

$$\sum (\delta x_i \delta' y_i - \delta y_i \delta' x_i) = \text{const}. \qquad (3)$$

Правая часть — постоянная; я хочу сказать, что это — функция постоянных интегрирования, умноженная на $\delta\beta\delta'\gamma$.

Но мы, очевидно, имеем

$$\delta A e^{\alpha t} = e^{\alpha t} (\delta A + A t \delta\alpha).$$

С другой стороны,

$$\delta x_i = \frac{dx_i}{dC}\delta C + \frac{dx_i}{dh}\delta h + \sum \frac{dx_i}{d(A_k e^{\alpha_k t})}\delta A_k e^{\alpha_k t} + \sum \frac{dx_i}{d(A'_k e^{-\alpha_k t})}\delta A'_k e^{-\alpha_k t},$$

$$\delta\alpha = \frac{d\alpha}{dC}\delta C + \sum \frac{d\alpha}{d(A_k A'_k)}\delta(A_k A'_k).$$

Мы видим, таким образом, что δx_i и δy_i имеют следующий вид:

$$\delta y_i = \eta_i + t\eta_{1,i}; \qquad \delta' y_i = \eta'_i + t\eta'_{1,i};$$

$$\delta x_i = \xi_i + t\xi_{1,i}; \qquad \delta' x_i = \xi'_i + t\xi'_{1,i},$$

где ξ_i, $\xi_{1,i}$, η_i, $\eta_{1,i}$ линейны относительно δC, δh и $\delta A e^{\alpha t}$, $\delta A' e^{-\alpha t}$; с другой стороны, они разлагаются по степеням $Ae^{\alpha t}$ и $A'e^{-\alpha t}$ и по синусам и косинусам кратных $\frac{2\pi}{T}(t+h)$. Мы легко найдем выражения $\delta' x_i$, $\delta' y_i$; достаточно заменить δ на δ' в выражениях δx_i и δy_i. Мы видим, что уравнение (3) можно написать в виде

$$D + Et + Ft^2 = \text{const},$$

где

$$D = \sum (\xi_i \eta'_i - \xi'_i \eta_i),$$

$$E = \sum (\xi_i \eta'_{1,i} - \xi'_i \eta_{1,i} + \xi_{1,i}\eta'_i - \xi'_{1,i}\eta_i),$$

$$F = \sum (\xi_{1,i}\eta'_{1,i} - \xi'_{1,i}\eta_{1,i})$$

разлагаются по степеням $Ae^{\alpha t}$, $A'e^{-\alpha t}$ и по синусам и косинусам кратных $\frac{2\pi}{T}(t+h)$ и, с другой стороны, билинейны относительно

$$\delta Ae^{\alpha t},\quad \delta A'e^{-\alpha t},\quad \delta C,\quad \delta h,$$
$$\delta' Ae^{\alpha t},\quad \delta' A'e^{-\alpha t},\quad \delta' C,\quad \delta' h.$$

Так как левая часть должна быть независимой от t, мы будем иметь прежде всего

$$E=F=0,$$

что уже доставляет определенные контрольные соотношения, которым должны удовлетворять разложения x_i и y_i.

Далее, D должно быть независимым от t; следовательно, оно будет линейным относительно следующих определителей:

$$\begin{aligned}
&\delta A_k \delta' A'_k - \delta' A_k \delta A'_k,\\
&A'_k A'_j (\delta A_k \delta' A_j - \delta A_j \delta' A_k),\\
&A'_k (\delta A_k \delta' C - \delta' A_k \delta C),\\
&A'_k (\delta A_k \delta' h - \delta' A_k \delta h),\\
&\delta C \delta' h - \delta' C \delta h
\end{aligned} \tag{4}$$

(или относительно аналогичных определителей, выведенных из первых перестановкой A_k и A'_k или A_j и A'_j).

Коэффициенты будут разложены по степеням $A_k A'_k$ и зависеть, кроме того, от C.

В самом деле, время должно исчезнуть. Показательные функции должны, следовательно, исчезнуть; это может произойти только, если каждый множитель $Ae^{\alpha t}$ умножен на $A'e^{-\alpha t}$, или на $\delta A'e^{-\alpha t}$, или на $\delta' A'e^{-\alpha t}$.

Отсюда можно вывести новый ряд контрольных соотношений.

279. Среди показателей α_k одни мнимые, другие вещественные; среди последних одни положительны, другие отрицательны. Но так как из двух равных показателей противоположного знака я могу произвольно выбрать тот, который называю α_k, то я не ограничу общности, предполагая, что α_k положительно, если оно вещественно.

Теперь обратим в нуль коэффициенты A_k, которые соответствуют мнимому или положительному показателю.

Тогда, если α_k — вещественно, будем иметь

$$A_k=0,\quad A'_k\neq 0,$$

и, если α_k — мнимое,

$$A_k=A'_k=0.$$

Кроме того, я положу

$$C = C_0,$$

где C_0 — значение постоянной живых сил, которое соответствует рассматриваемому периодическому решению.

Тогда наши ряды становятся сходящимися и представляют асимптотические решения, которые мы изучили в главе XII. Они содержат в качестве произвольных постоянных h и A'_k, которые соответствуют отрицательным показателям.

Следовательно, мы будем иметь $2n$ равенств, которые выразят x_i и y_i в функции t и этих постоянных h и A'_k. Если из этих $2n$ равенств мы исключим t, h и A'_k, получим определенное число инвариантных соотношений между x_i и y_i.

Если множество значений x_i и y_i рассматривать как точку в пространстве $2n$ измерений, то эти инвариантные соотношения представляют определенное многообразие V этого пространства; я назову это *асимптотическим многообразием.*

Возьмем снова интегральный инвариант

$$\int \sum dx_i dy_i$$

и распространим интегрирование на часть этого асимптотического многообразия V.

Другими словами, предположим, что все системы значений x_i и y_i, которые входят в область интегрирования, удовлетворяют инвариантным соотношениям.

Я говорю, что интегральный инвариант будет нулем.

Мне достаточно доказать, что

$$\sum (\delta x_i \delta' y_i - \delta y_i \delta' x_i) = 0,$$

а это очевидно, ибо мы имеем

$$A_k = 0, \qquad C = C_0,$$

откуда

$$\delta A_k = 0, \qquad \delta C = 0,$$

$$\delta' A_k = 0, \qquad \delta' C = 0,$$

что показывает, что все выражения (4) обращаются в нуль. Равным образом мы смогли бы сделать

$$C = C_0,$$

$$A_k \neq 0, \qquad A'_k = 0 \text{ (для вещественных } \alpha_k),$$

$$A_k = A'_k = 0 \text{ (для мнимых } \alpha_k).$$

Мы получили бы новый ряд асимптотических решений и, следовательно, новое асимптотическое многообразие, к которому прилагались бы те же заключения.

То, что мы сделали для инварианта (2), можно было бы сделать для любого билинейного инварианта (инварианта третьего типа п. 260), т. е. вида

$$\iint \sum B dx_i dx_k, \tag{5}$$

где B — функция x_i и y_i и где под знаком Σ один или два из дифференциалов dx_i, dx_k могут быть заменены на dy_i или dy_k.

Выражение

$$\sum B(\delta x_i \delta' x_k - \delta x_k \delta' x_i)$$

снова было бы линейным относительно количеств (4). Это применимо также к квадратичному инварианту (инварианту второго типа п. 260) вида

$$\int \sqrt{\sum B dx_i dx_k}, \tag{6}$$

где B — функция x_i и y_i и где под знаком Σ один или два из дифференциалов dx_i, dx_k могут быть заменены на dy_i, dy_k.
Мы можем увидеть, что выражение

$$\sum B \delta x_i \delta x_k$$

должно быть линейным относительно выражений

$$\begin{gathered} \delta A_k \delta A'_k, \\ A'_k A'_j \delta A_k \delta A_j, \\ A'_k \delta A_k \delta C, \\ \delta C \delta h \end{gathered} \tag{4bis}$$

и тех, которые можно вывести из них перестановкой A_k и A'_k, A_j и A'_j.

Для всякого асимптотического многообразия как инвариант (5), так и инвариант (6) должны обратиться в нуль.

Другой способ анализа

280. Изучение этого же вопроса может быть продвинуто, если несколько видоизменить рассуждения.

Предположим, например, что мы имеем дело с задачей динамики, что x_i — координаты различных материальных точек системы и что сопряженные переменные y_i — составляющие их количеств движения.

Мы изучим интегральные инварианты, алгебраические относительно x_i и y_i, и посмотрим, могут ли существовать другие, отличные от известного, который записывается в виде

$$\iint \sum dx_i dy_i.$$

Мы видели, что в окрестности периодического решения x_i и y_i могут разлагаться по степеням $Ae^{\alpha t}$,. . . . Рассмотрим сейчас снова эти разложения. Мы можем предположить, что значение постоянной живых сил, которое соответствует периодическому решению, есть нуль, так что разложение будет вестись не только по степеням $Ae^{\alpha t}$, но еще и по степеням C. Кроме того, они будут зависеть от $t+h$.

Приравняв x_i и y_i этим разложениям, получаем $2n$ уравнений, которые разрешим относительно $Ae^{\alpha t}$, C и $t+h$.

Получим

$$\begin{aligned} &A_k e^{\alpha_k t} = f_k, \\ &A'_k e^{-\alpha_k t} = f'_k, \\ &C = \Phi \\ &\alpha_0 t + \beta_0 = \frac{2\pi}{T}(t+h) = \Theta. \end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что α_0, как и α_k, разлагается по степеням C и $A_k A'_k$; мы видим, что f_k, f'_k, Φ, $\cos\Theta$, $\sin\Theta$ — однозначные функции x_i и y_i в окрестности периодического решения. Более того, x_i и y_i могут быть разложены по степеням f_k, f'_k и Φ и по синусам и косинусам кратных Θ.

С другой стороны, выражение (3) п. 278

$$\sum (\delta x_i \delta' y_i - \delta y_i \delta' x_i),$$

которое соответствует инварианту (2) или аналогичным выражениям, которые соответствовали бы другому билинейному инварианту вида (5), должны быть разложимы по степеням f_k, f'_k, Φ и билинейны относительно

$$\delta f_k,\quad \delta f'_k,\quad \delta\Phi,\quad \delta\Theta,$$

$$\delta' f_k,\quad \delta' f'_k,\quad \delta'\Phi,\quad \delta'\Theta.$$

Кроме того, когда мы заменяем в нем величины f_k, f'_k, Φ, Θ их значениями (7), это выражение должно стать независимым от t. Но время t могло бы туда войти тремя способами: 1) в экспоненциальной форме; 2) в виде косинуса или синуса кратных $(t+h)$; 3) вне знаков показательной и тригонометрических функций (и, как мы это сейчас увидим, самое большее во второй степени).

Оно не должно войти ни одним из этих способов.

1. Для того чтобы время не входило в экспоненциальной форме, необходимо и достаточно, чтобы это выражение было линейным относительно следующих величин, аналогичных (4):

$$
\begin{aligned}
&\delta f_k \delta' f'_k - \delta' f_k \delta f'_k,\\
&f'_k f'_j (\delta f_k \delta' f_j - \delta f_j \delta' f_k),\\
&f'_k (\delta f_k \delta' \Phi - \delta' f_k \delta \Phi),\\
&f'_k (\delta f_k \delta' \Theta - \delta' f_k \delta \Theta),\\
&\delta\Phi \delta' \Theta - \delta' \Phi \delta \Theta,
\end{aligned} \tag{8}
$$

где коэффициенты разлагаются по степеням f_k, f'_k и Φ.

2. Для того чтобы t не входило в тригонометрической форме, необходимо и достаточно, чтобы наше выражение не зависело от Θ, а только от его вариаций $\delta\Theta$, $\delta'\Theta$.

3. Нам остается определить условие того, чтобы t не входило туда вне знаков показательных и тригонометрических функций. Заметим, что мы имеем

$$
\begin{aligned}
&\delta f_k = e^{\alpha_k t} (\delta A_k + A_k t \delta\alpha_k),\\
&\delta f'_k = e^{-\alpha_k t} (\delta A'_k - A'_k t \delta\alpha_k),\\
&\delta\Phi = \delta C, \qquad \delta\Theta = \delta\beta_0 + t\delta\alpha_0.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Будем различать в нашем выражении члены пяти видов в зависимости от того, будут ли они содержать множителем одну из величин, фигурирующих в первой, второй, третьей, четвертой или пятой строке таблицы (8).

При этих условиях, если мы заменим $\delta f_k, \ldots$ их значениями (9), увидим, что члены пяти видов будут содержать множителем соответственно:

$$
\begin{aligned}
&(\delta A_k \delta' A'_k - \delta A'_k \delta' A_k) + t\,[\delta\alpha_k \delta' (A_k A'_k) - \delta'\alpha_k \delta (A_k A'_k)],\\
&A'_k A'_j (\delta A_k \delta' A_j - \delta A_j \delta' A_k) + A'_k A'_j t\,[A_k (\delta\alpha_k \delta' A_j - \delta'\alpha_k \delta A_j) -\\
&\quad - A_j (\delta\alpha_j \delta' A_k - \delta'\alpha_j \delta A_k)] + A_k A'_k A_j A'_j t^2 (\delta\alpha_k \delta'\alpha_j - \delta\alpha_j \delta'\alpha_k),\\
&A'_k (\delta A_k \delta' C - \delta' A_k \delta C) + A_k A'_k t\,(\delta\alpha_k \delta' C - \delta'\alpha_k \delta C),\\
&A'_k (\delta A_k \delta' \beta_0 - \delta' A_k \delta\beta_0) + A_k A'_k t\,(\delta\alpha_k \delta'\beta_0 - \delta'\alpha_k \delta\beta_0) +\\
&\quad + A'_k t\,(\delta A_k \delta'\alpha_0 - \delta' A_k \delta\alpha_0) + A_k A'_k t^2 (\delta\alpha_k \delta'\alpha_0 - \delta'\alpha_k \delta\alpha_0),\\
&(\delta C \delta'\beta_0 - \delta' C \delta\beta_0) + t\,(\delta C \delta'\alpha_0 - \delta' C \delta\alpha_0).
\end{aligned} \tag{10}
$$

Мы видим, что время могло бы войти во второй степени.

Заставим сначала исчезнуть члены с t^2; они могут произойти только от членов второго и четвертого вида.

Я говорю, что коэффициент при

$$t^2 (\delta\alpha_k \delta'\alpha_j - \delta\alpha_j \delta'\alpha_k)$$

должен обратиться в нуль.

В самом деле, так как виртуальные приращения постоянных произвольны, мы сможем предположить, что все $\delta\alpha_j$ обращаются в нуль, за исключением $\delta\alpha_k$, а также, что все $\delta'\alpha_j$ обращаются в нуль, кроме $\delta'\alpha_k$. Тогда все члены с t^2 обращаются в нуль, за исключением члена

$$t^2(\delta\alpha_k\delta'\alpha_j - \delta\alpha_j\delta'\alpha_k).$$

Мы имели бы исключения, если бы существовало соотношение между $n-1$ показателями α_j; действительно, более нельзя было бы предполагать, что все $\delta\alpha_j$, кроме одного, обращаются в нуль без того, чтобы этот последний сам обратился в нуль.

Теперь имеется четыре члена второго вида, которые дают члены с

$$t^2(\delta\alpha_k\delta'\alpha_j - \delta\alpha_j\delta'\alpha_k).$$

Я запишу их для краткости в виде

$$\psi_1\omega_1 + \psi_2\omega_2 + \psi_3\omega_3 + \psi_4\omega_4;$$

ψ разложены по степеням f_i, f'_i и Φ. Я обозначаю через ω_1 выражение, которое фигурирует во второй строке таблицы (8):

ω_2 выводится из ω_1 перестановкой f_k и f'_k,

ω_3 выводится из ω_1 перестановкой f_j и f'_j,

ω_4 выводится из ω_1, если совершить одновременно эти две перестановки.

Для того чтобы исчезали члены с t^2, необходимо и достаточно, чтобы

$$\psi_1 - \psi_2 - \psi_3 + \psi_4 = 0. \tag{11}$$

Если это условие выполняется, четыре члена

$$\psi_1\omega_1 + \psi_2\omega_2 + \psi_3\omega_3 + \psi_4\omega_4$$

доставят нам в качестве членов с t

$$(\psi_1 - \psi_2)\, tA_kA'_k\,[\delta\alpha_k\delta'(A_jA'_j) - \delta'\alpha_k\delta(A_jA'_j)] +$$
$$+ (\psi_3 - \psi_4)\, tA_jA'_j\,[\delta\alpha_j\delta'(A_kA'_k) - \delta'\alpha_j\delta(A_kA'_k)].$$

Рассмотрим теперь члены четвертого вида, которые мы объединим попарно; пусть

$$\psi_1\omega_1 + \psi_2\omega_2$$

— группа из двух членов, где ψ_1 и ψ_2 разложимы по степеням C и $A_kA'_k$, ω_1 — выражение, которое фигурирует в четвертой строке таблицы (10), и ω_2 — выражение, получающееся из него перестановкой A_k и A'_k и заменой α_k на $-\alpha_k$.

Для того чтобы исчезали члены с t^2, необходимо, чтобы

$$\psi_1 = \psi_2$$

и тогда члены с t сведутся к

$$\psi_1 t\,[\delta(A_k A'_k)\,\delta'\alpha_0 - \delta'(A_k A'_k)\,\delta\alpha_0].$$

281. Теперь члены с t разлагаются по степеням C, $A_k A'_k$ и по вариациям δ, δ' величин α_0, α_k, C, $A_k A'_k$. Нам остается заставить исчезнуть эти члены; я напишу сейчас, что они — нули, когда мы полагаем

$$C = 0, \qquad A_k A'_k = 0,$$

не предполагая, разумеется, что δC, $\delta' C$, $\delta A_k A'_k$, $\delta' A_k A'_k$ — нули.

Пусть B_k в нашем инварианте означает то, чем становится коэффициент члена с $(\delta f_k \delta' f'_k - \delta f'_k \delta' f_k)$, когда мы делаем в нем $C = A_k A'_k = 0$.

Пусть D_k есть то, чем становится коэффициент члена с

$$f'_k\,(\delta f_k \delta'\Theta - \delta\Theta\delta' f_k),$$

и D_0 — то, чем становится коэффициент члена с

$$(\delta\Phi\delta'\Theta - \delta\Theta\delta'\Phi).$$

Мы должны будем иметь тождественно

$$\sum B_k\,[\delta\alpha_k \delta'(A_k A'_k) - \delta'\alpha_k \delta(A_k A'_k)] +$$
$$+ \sum D_k\,[\delta(A_k A'_k)\,\delta'\alpha_0 - \delta'(A_k A'_k)\,\delta\alpha_0] + D_0\,(\delta C\delta'\alpha_0 - \delta' C\delta\alpha_0) = 0.$$

Будем писать для сокращения γ_k вместо $A_k A'_k$, γ_0 вместо C и

$$\partial(u,\ v)$$

вместо

$$\delta u \delta' v - \delta v \delta' u.$$

Мы получим

$$\sum B_k \partial(\alpha_k,\ \gamma_k) + \sum D_k \partial(\gamma_k,\ \alpha_0) + D_0 \partial(\gamma_0,\ \alpha_0) = 0$$

или же

$$\sum\sum B_k \frac{d\alpha_k}{d\gamma_j} \partial(\gamma_j,\ \gamma_k) + \sum\sum D_k \frac{d\alpha_0}{d\gamma_j} \partial(\gamma_k,\ \gamma_j) + \sum D_0 \frac{d\alpha_0}{d\gamma_j} \partial(\gamma_0,\ \gamma_j) = 0.$$

Под знаком $\sum$ или $\sum\sum$ индекс k может принимать значения $1, 2, \ldots, n-1$, а j — значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Приравнивая нулю коэффициент при $\partial(\gamma_i,\ \gamma_k)$, находим

$$B_k \frac{d\alpha_k}{d\gamma_j} - B_j \frac{d\alpha_j}{d\gamma_k} - D_k \frac{d\alpha_0}{d\gamma_j} + D_j \frac{d\alpha_0}{d\gamma_k} = 0. \qquad (12)$$

Приравнивая нулю коэффициент при $\partial(\gamma_0, \gamma_j)$, находим

$$B_j \frac{d\alpha_j}{d\gamma_0} - D_j \frac{d\alpha_0}{d\gamma_0} + D_0 \frac{d\alpha_0}{d\gamma_j} = 0. \tag{12bis}$$

Эти уравнения выражают тот факт, что

$$-D_0\alpha_0 d\gamma_0 + \sum (B_k\alpha_k - D_k\alpha_0)\, d\gamma_k \tag{13}$$

есть полный дифференциал.

В уравнениях (12) и (12bis) необходимо положить $\gamma_j = 0$, следовательно, $d\alpha/d\gamma$ — постоянные, следовательно, α_j — линейные функции γ; в действительности, как мы это видели, α могут быть разложены по степеням γ, но результат, который мы только что получили, верен только в том случае, если мы пренебрегаем квадратами γ и если обрываем разложения α на членах первой степени. Кроме того, B и D — постоянные. Следовательно, выражение (13) является полным дифференциалом полинома второй степени.

Для того чтобы продвинуться дальше, выразим α_k не в функции

$$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1},$$

а в функции

$$\alpha_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1},$$

и, для того чтобы избежать путаницы, обозначим при помощи ∂ производные по новым переменным, а при помощи d — производные по старым.

Тогда мы видим, что

$$\sum B_k\alpha_k d\gamma_k' + d\alpha_0 \sum D_j\gamma_j$$

есть полный дифференциал, что влечет за собой условия

$$B_k \frac{\partial\alpha_k}{\partial\gamma_i} = B_i \frac{\partial\alpha_i}{\partial\gamma_k}. \tag{14}$$

Если мы знаем соотношения между α и γ, то эти уравнения позволят нам определить коэффициенты B_i.

Мы можем выразить $\sum D_j\gamma_j$ в функции переменных

$$\alpha_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1},$$

записывая

$$\sum D_j\gamma_j = E_0\alpha_0 + \sum E_k\gamma_k.$$

Величины E_k будут заданы уравнениями

$$E_k = B_k \frac{\partial a_k}{\partial a_0}, \tag{14bis}$$

и E_0 можно выбрать произвольно.

Прежде всего необходимо, чтобы уравнения (14) были совместными, что при $n > 3$ требует определенных условий

$$\frac{\partial a_k}{\partial \gamma_i} \frac{\partial a_i}{\partial \gamma_j} \frac{\partial a_j}{\partial \gamma_k} = \frac{\partial a_i}{\partial \gamma_k} \frac{\partial a_j}{\partial \gamma_i} \frac{\partial a_k}{\partial \gamma_j}. \tag{15}$$

Эти условия (15) будут всегда выполнены, поскольку всегда имеется интегральный инвариант

$$\int \sum dx_i dy_i.$$

Если имеется несколько интегральных инвариантов, которые не обращаются в нуль тождественно для рассматриваемого периодического решения, то каждому из этих инвариантов должна соответствовать одна система значений коэффициентов B_i и E_i.

Если уравнения (4) допускают q линейно независимых решений, то можно вычислить соответствующие значения E_k при помощи уравнений (14bis), а так как E_0 остается произвольным, мы будем иметь $q+1$ линейно независимых систем значений коэффициентов B_i и E_i.

Следовательно, мы можем получить $q+1$ различных интегральных инвариантов (если рассматриваемое периодическое решение не является особым в смысле п. 257), но мы не можем получить их больше.

282. Выше я сказал, что условия (15) наверное выполнены; можно было бы усомниться в этом; в самом деле, если уравнения (14) допускают q различных решений, то можно иметь $q+1$ инвариантов; если, следовательно, имеется только один инвариант, то можно было бы предположить $q=0$, следовательно, наличие единственного инварианта

$$\int \sum dx_i dy_i$$

не было бы достаточным для того, чтобы можно было утверждать, что уравнения (14) наверняка допускают одно решение.

Мне остается рассеять это сомнение.

Прежде всего я замечаю, то в случае задачи трех тел имеется не один, а два интегральных инварианта.

В самом деле, в I томе в главе IV мы изучили уравнения в вариациях этой задачи.

На стр. 150 и 152 мы получили следующие интегралы:

$$\sum \frac{y\eta}{m} - \sum \frac{dV}{dx}\xi = \text{const}, \tag{1}$$

$$\sum (2x\eta + y\xi) - 3t\left(\sum \frac{y\eta}{m} - \sum \frac{dV}{dx}\xi\right) = \text{const}. \tag{2}$$

Мы найдем также

$$\sum \frac{y\eta'}{m} - \sum \frac{dV}{dx}\xi' = \text{const}, \tag{1bis}$$

$$\sum (2x\eta' + y\xi') - 3t\left(\sum \frac{y\eta'}{m} - \sum \frac{dV}{dx}\xi'\right) = \text{const}. \tag{2bis}$$

Умножим (2bis) на (1), (1bis) — на (2) и вычтем, получим

$$\sum\left(\frac{y\eta}{m} - \frac{dV}{dx}\xi\right)\sum(2x\eta' + y\xi') - \sum\left(\frac{y\eta'}{m} - \frac{dV}{dx}\xi'\right)\sum(2x\eta + y\xi) = \text{const}.$$

Левая часть линейна относительно определителей вида

$$\eta_i\eta_k' - \eta_k\eta_i', \qquad \eta_i\xi_k' - \eta_k'\xi_i, \qquad \xi_i\xi_k' - \xi_k\xi_i'.$$

Следовательно, мы имеем интеграл уравнений в вариациях и сможем вывести из него новый билинейный интегральный инвариант.

В случае задачи трех тел мы имеем, следовательно, по меньшей мере $q=1$, и можно быть уверенным, что условия (15) выполнены.

283. Будет ли то же самое в общем случае? Предположим, что этого нет. Тогда все коэффициенты, которые мы назвали B_i, должны быть нулями, так же как и все E_k, за исключением E_0.

Следовательно, когда мы даем x_i и y_i значения, которые соответствуют рассматриваемому периодическому решению, т. е. когда полагаем

$$C = A_k A_k' = 0,$$

коэффициенты членов с $\delta f_k \delta' f_k' - \delta f_k' \delta' f_k$ должны обратиться в нуль, и остаются только члены с

$$f_k'(\delta f_k \delta'\Theta - \delta\Theta\delta' f_k),$$

$$(\delta\Phi\delta'\Theta - \delta\Theta\delta'\Phi).$$

Следовательно, наш инвариант должен был бы обратиться в нуль, когда мы имели бы

$$\delta\Theta = \delta'\Theta = 0.$$

Но это не имеет места в случае инварианта

$$\int \sum dx_i dy_i,$$

которому соответствует выражение

$$\sum (\delta x_i \delta' y_i - \delta y_i \delta' x_i).$$

Пусть, в самом деле,

$$\delta\Theta = \sum a_i \delta x_i + \sum b_i \delta y_i,$$

$$\delta'\Theta = \sum a_i \delta' x_i + \sum b_i \delta' y_i.$$

Мы должны были бы иметь равенство вида

$$\sum (\delta x_i \delta' y_i - \delta y_i \delta' x_i) = \sum (a_i \delta x_i + b_i \delta y_i) \sum (c_i \delta' x_i + e_i \delta' y_i) - \\ - \sum (a_i \delta' x_i + b_i \delta' y_i) \sum (c_i \delta x_i + e_i \delta y_i).$$

Но это невозможно, поскольку левая часть является билинейной формой с определителем, равным 1, а правая часть — билинейной формой с определителем, равным 0.

Следовательно, мы должны заключить, что условия (15) выполнены всегда.

284. Исследуем теперь, могут ли уравнения (14) допускать несколько решений.

Пусть

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n,$$
$$B'_1,\ B'_2,\ \ldots,\ B'_n$$

— два таких решения, и предположим, что равенство

$$\frac{B_k}{B'_k} = \frac{B_i}{B'_i}$$

не выполняется; тогда два уравнения

$$B_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial \gamma_i} = B_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial \gamma_k},$$

$$B'_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial \gamma_i} = B'_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial \gamma_k}$$

повлекут за собой

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial \gamma_i} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial \gamma_k} = 0.$$

Тогда индексы

$$1,\ 2, \ldots,\ n$$

разделятся на определенное число групп, которых будет столько же, сколько имеется различных значений для отношения B_i/B'_i; два индекса будут принадлежать одной и той же группе, если они соответствуют одному и тому же значению отношения B_i/B'_i.

Тогда для того чтобы α_k зависело от γ_i (или α_i — от γ_k), необходимо, чтобы индексы i и k принадлежали одной и той же группе.

Предположим для определенности, что мы имеем только две группы, содержащие соответственно индексы

$$1,\ 2, \ldots, p,$$

$$p+1,\ p+2, \ldots, n-1.$$

Тогда

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_p$$

будут зависеть только от

$$\alpha_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_p,$$

а

$$\alpha_{p+1},\ \alpha_{p+2},\ \ldots,\ \alpha_{n-1}$$

будут зависеть только от

$$\alpha_0,\ \gamma_{p+1},\ \gamma_{p+2},\ \ldots,\ \gamma_{n-1}.$$

Тогда имеет место тот факт, что характеристические показатели α_k образуют несколько независимых групп, так что α_k одной группы не зависят от произведений $A_jA'_j$, относящихся к другой группе.

Периодические решения, для которых возникнет это обстоятельство (или для которых имело бы место соотношение между α_k), можно будет назвать *частными*.

Мы приходим к следующему заключению:

Для того чтобы существовал алгебраический инвариант, отличный от тех, которые нам известны, необходимо, либо чтобы все периодические решения были частными, либо чтобы они все были особыми в смысле п. 257.

Я не буду доказывать, что это обстоятельство не может представиться в задаче трех тел; но противоположное допущение кажется весьма неправдоподобным.

Квадратичные инварианты

285. Изучим теперь с той же точки зрения квадратичные инварианты, т. е. интегральные инварианты вида

$$\int \sqrt{F},$$

где F — квадратичная форма относительно дифференциалов dx_i, dy_i.

Пусть

$$F = \sum H dx_i dx_k,$$

где H — функции x и y и где произведение $dx_i dx_k$ может быть заменено в определенных членах произведением $dx_i dy_k$ или $dy_i dy_k$.

Тогда мы сможем написать следующее уравнение, аналогичное уравнению (3) п. 278:

$$\sum H \delta x_i \delta x_k = \mathrm{const}. \tag{1}$$

С другой стороны, мы нашли в п. 278

$$\delta x_i = \xi_i + t\xi_{1,i}, \quad \delta y_i = \eta_i + t\eta_{1,i}.$$

Тогда мы сможем записать уравнение (1) в виде

$$D + Et + Ft^2 = \mathrm{const},$$

где D, E, F разлагаются по степеням $Ae^{\alpha t}$, $A'e^{-\alpha t}$ и по синусам и косинусам кратных $\frac{2\pi}{T}(t+h)$ и, с другой стороны, квадратичны относительно

$$\delta Ae^{\alpha t}, \ \delta A'e^{-\alpha t}, \ \delta C, \ \delta h.$$

Следовательно, мы должны иметь

$$E = F = 0$$

и, кроме того, D должно быть независимым от t, что показывает, что D должно быть линейным относительно выражений

$$\begin{gathered}\delta A_k \delta A'_k,\\ A'_k A'_j \delta A_k \delta A_j,\\ A'_k \delta A_k \delta C,\\ A'_k \delta A_k \delta h,\\ \delta C \delta h\end{gathered}$$

или относительно выражений, выводимых из них перестановкой A_k и A'_k или A_j и A'_j.

Коэффициенты будут разложены по степеням произведений $A_k A'_k$ и C (если предположить, что периодическое решение соответствует нулевому значению постоянной живых сил).

286. Обратимся снова к уравнениям (7) п. 280 и будем рассуждать, как в п. 280; мы увидим, что выражение

$$\Pi = \sum H \delta x_i \delta x_k,$$

когда x_i и y_i заменяются в нем их разложениями в функции f_k, f'_k, Φ и Θ, должно удовлетворять следующим условиям.

1. Оно должно быть линейным относительно следующих количеств:

$$\begin{aligned}&\delta f_k \delta f'_k,\\ &f'_k f'_j \delta f_k \delta f_j,\\ &f'_k \delta f_k \delta\Phi,\\ &f'_k \delta f_k \delta\Theta,\\ &\delta\Phi\delta\Theta,\\ &\delta\Phi^2,\ \delta\Theta^2,\end{aligned} \tag{8bis}$$

причем коэффициенты будут разложены по степеням $f_k f'_k$ и Φ.

2. Оно не будет зависеть от Θ, а только от $\delta\Theta$.

3. Если эти условия выполнены, то выражение II не будет содержать время ни в показательной форме, ни в тригонометрической.

Остается искать условие того, чтобы время также не входило вне знаков показательных и тригонометрических функций.

Возьмем снова уравнения (9) п. 280; мы увидим, что различным членам таблицы (8bis) соответствуют следующие члены:

$$\begin{aligned}&\delta A_k \delta A'_k + t\,(A_k \delta A'_k \delta\alpha_k - A'_k \delta A_k \delta\alpha_k) - A_k A'_k t^2 (\delta\alpha_k)^2,\\ &A'_k A'_j \delta A_k \delta A_j + A'_k A'_j t\,(A_k \delta\alpha_k \delta A_j + A_j \delta\alpha_j \delta A_k) + A_k A'_k A_j A'_j t^2 \delta\alpha_k \delta\alpha_j,\\ &A'_k \delta A_k \delta C + A_k A'_k t \delta\alpha_k \delta C,\\ &A'_k \delta A_k \delta\beta_0 + A'_k t\,(\delta A_k \delta\alpha_0 + A_k \delta\alpha_k \delta\beta_0) + A_k A'_k t^2 \delta\alpha_k \delta\alpha_0,\\ &\delta C \delta\beta_0 + t \delta C \delta\alpha_0,\quad \delta C^2,\quad \delta\beta_0^2 + 2t\delta\beta_0\delta\alpha_0 + t^2\delta\alpha_0^2.\end{aligned} \tag{10bis}$$

Заставим сначала исчезнуть члены с t^2.

Совокупность этих членов является квадратичной формой относительно

$$\delta\alpha_0,\ \delta\alpha_1,\ \ldots,\ \delta\alpha_{n-1}.$$

Эта квадратичная форма должна быть тождественным нулем.

Следовательно, коэффициент при $\delta\alpha_k \delta\alpha_j t^2$ должен быть нулем. Но имеется четыре члена, которые могли бы ввести произведение $t^2 \delta\alpha_k \delta\alpha_j$, — это члены с

$$f'_k f'_j \delta f_k \delta f_j,\quad f'_k f_j \delta f_k \delta f'_j,\quad f_k f'_j \delta f'_k \delta f_j,\quad f_k f_j \delta f'_k \delta f'_j.$$

Обозначим для краткости эти четыре выражения через ω_1, ω_2, ω_3, ω_4; тогда совокупность наших четырех членов запишется в виде:

$$\psi_1\omega_1 + \psi_2\omega_2 + \psi_3\omega_3 + \psi_4\omega_4,$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3 и ψ_4 разлагаются по степеням $f_k f'_k$ и Φ. Для того чтобы коэффициент при $t^2 \delta\alpha_k \delta\alpha_j$ исчез, мы должны иметь тождественно

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 0.$$

Коэффициент при $t^2(\delta\alpha_k)^2$ также должен обратиться в нуль; но он происходит от членов с

$$\delta f_k \delta f'_k,\quad f_k^2 \delta f_k'^2,\quad f_k'^2 \delta f_k^2.$$

Обозначим для краткости эти три выражения через ω'_1, ω'_2, ω'_3, а совокупность трех членов — через

$$\psi'_1\omega'_1 + \psi'_2\omega'_2 + \psi'_3\omega'_3,$$

где ψ'_1, ψ'_2, ψ'_3 разлагаются по степеням $f_k f'_k$ и Φ.

Для того чтобы исчез коэффициент при $t^2\delta\alpha_k^2$, мы должны были бы иметь

$$f_k f'_k(\psi'_2 + \psi'_3) - \psi'_1 = 0. \tag{11}$$

Для периодического решения мы имеем

$$f_1 = f'_1 = f_2 = f'_2 = \ldots = f_{n-1} = f'_{n-1} = 0.$$

Все члены, которые содержат множителем одно из выражений, фигурирующих во 2-й, 3-й и 4-й строках таблицы (8bis), должны тогда обратиться в нуль, ибо каждое из этих выражений содержит множителем f_k или f'_k.

Следовательно, единственными членами выражения Π, не обращающимися в нуль для периодического решения, являются члены с

$$\delta f_k \delta f'_k,\quad \delta\Phi\delta\Theta,\quad \delta\Phi^2,\quad \delta\Theta^2.$$

Уравнение (11) показывает, что ψ'_1 содержит множителем $f_k f'_k$; следовательно, член $\psi'_1 \delta f_k \delta f'_k$ равным образом должен обратиться в нуль. Остаются еще только члены с

$$\delta\Phi^2,\quad \delta\Phi\delta\Theta,\quad \delta\Theta^2.$$

Первый не содержит t, второй содержит время в 1-й степени, третий — во 2-й степени.

Так как только этот третий член содержит t^2, он должен быть нулем; если он нуль, то второй член также будет нулем, так как только он содержит t.

Окончательно, все члены Π обращаются в нуль для периодического решения, кроме члена с $\delta\Phi^2$.

Но в общей задаче динамики, так же как в случаях задачи трех тел, которые мы назвали *ограниченной задачей*, *общей приведенной задачей* и *плоской приведенной задачей*, мы знаем один и только один квадратичный инвариант.

Если я напишу уравнение живых сил в виде

$$F = \text{const},$$

то этот инвариант является не чем иным, как

$$\int \sqrt{(dF)^2};$$

именно этому инварианту соответствует член с $\delta\Phi^2$, который не обращается в нуль.

Следовательно, если существует квадратичный инвариант, отличный от уже известного, то этот инвариант должен будет обратиться в нуль для всех точек периодического решения.

Другими словами, это периодическое решение должно быть особым в смысле п. 257 в том, что касается этого инварианта.

Мы имели бы исключение, если бы n показателей

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{n-1}$$

не были независимы друг от друга, а если бы между ними имелось соотношение. В этом случае коэффициент при t^2, который является квадратичной формой относительно n переменных

$$\delta\alpha_0,\ \delta\alpha_1,\ \delta\alpha_2,\ \ldots,\ \delta\alpha_{n-1},$$

в самом деле смог бы обратиться в нуль тождественно без обращения в нуль всех его коэффициентов, поскольку эти n переменных не были бы более независимыми.

Резюмируем: *для того чтобы существовали квадратичные инварианты, отличные от тех, которые нам известны, необходимо, чтобы все периодические решения были особыми или частными.*

Мало правдоподобно, чтобы это имело место для задачи трех тел.

Случай ограниченной задачи

287. Можно представить другой способ рассмотрения, который мы приложим только к случаю ограниченной задачи. В п. 265 допускалась возможность существования двух квадратичных инвариантов, один из которых известен. Предположим, что эти два квадратичных инварианта существуют, и пусть П — квадратичная форма, соответствующая одному из этих инвариантов. Согласно предыдущему, П может содержать члены с

$$\begin{gathered}\delta f_1\delta f_1',\ f_1'\delta f_1\delta\Phi,\ f_1\delta f_1'\delta\Phi,\ f_1'\delta f_1\delta\Theta,\ f_1\delta f_1'\delta\Theta,\\ f_1'^2\delta f_1^2,\ f_1^2\delta f_1'^2,\ \delta\Theta^2,\ \delta\Phi\delta\Theta,\ \delta\Phi^2.\end{gathered} \tag{1}$$

С другой стороны, П — квадратичная форма относительно количеств

$$\delta x_1,\ \delta x_2,\ \delta y_1,\ \delta y_2,$$

коэффициенты которой — алгебраические функции от x_1, x_2, y_1, y_2.

Вот какими будут переменные x_i и y_i, которые мы выберем. В этой задаче, которую я называю *ограниченной*, два тела описывают концентрические окружности, а третье, масса которого нуль, движется в плоскости этих окружностей. Я отнесу это третье тело к подвижным осям, вращающимся равномерно вокруг центра тяжести двух первых; одна из этих осей постоянно будет совпадать с прямой, соединяющей два первых тела. Я обозначу через x_1 и x_2 координаты третьего тела относительно этих подвижных осей, а y_1 и y_2 — проекции абсолютной скорости на подвижные оси.

Тогда положим

$$\Phi = F + \omega G,$$

где F и G означают функцию живых сил и функцию площадей в абсолютном движении и где ω означает угловую скорость вращения двух первых тел вокруг их общего центра тяжести. Уравнения примут каноническую форму

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{d\Phi}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx_i}.$$

Интеграл $\Phi = \text{const}$ есть не что иное, как «интеграл Якоби» (ср. том I, п. 9, стр. 27).

При этих предположениях выражение Π будет квадратичной формой относительно

$$\delta x_1,\ \delta x_2,\ \delta y_1,\ \delta y_2,$$

коэффициенты которой будут алгебраическими относительно x_i и y_i. Если мы предположим, что четыре переменных x_i и y_i связаны соотношением

$$\Phi = \text{const},$$

которое влечет за собой

$$\delta\Phi = 0,$$

то четыре переменных δx_i, δy_i не будут более независимыми; мы сможем исключить одну из них, и Π станет тройничной квадратичной формой.

Рассмотрим одну точку периодического решения; для этой точки мы будем иметь

$$f_1 = f_1' = 0.$$

Следовательно, все выражения (1) обратятся в нуль, за исключением

$$\delta f_1 \delta f_1',\ \delta\Theta^2,\ \delta\Phi\delta\Theta \ \text{и}\ \delta\Phi^2.$$

Если мы предположим, что $\delta\Phi = 0$, то они все обратятся в нуль за исключением

$$\delta f_1 \delta f_1' \ \text{и}\ \delta\Theta^2.$$

Итак, пусть для точки периодического решения

$$\Pi = B\delta f_1 \delta f_1' + C\delta\Theta^2.$$

Совокупность членов с t^2 сведется, следовательно, для этой же точки к

$$-Bf_1 f_1' t^2 \delta\alpha_1^2 + Ct^2\delta\alpha_0^2$$

(ср. выше таблицу (10bis)) и, поскольку $f_1 = f_1' = 0$, к

$$Ct^2\delta\alpha_0^2.$$

Члены с t^2 должны исчезнуть; это — единственный, который не обращается в нуль для рассматриваемой точки; все остальные — нули, *даже если бы мы не подчинили их условию* $\delta\Phi = 0$, ибо $\delta\Phi\,\delta\Theta$ и $\delta\Phi^2$ не дают членов с t^2.

Но $\delta\alpha_0$ не есть тождественный нуль. Мы имеем для точки периодического решения

$$\frac{d\alpha_0}{df_1} = \frac{d\alpha_0}{df_1'} = \frac{d\alpha_0}{d\Theta} = 0,$$

но мы не могли бы иметь $d\alpha_0/d\Phi = 0$; это значило бы, что имеется непрерывное бесконечное множество периодических решений одного и того же периода, что не имеет места.

Можно заметить, однако, что $d\alpha_0/d\Phi$ содержит множителем малое количество, которое я обозначу через μ, т. е. массу второго тела, и, следовательно, что $\delta\alpha_0$ обращается в нуль при $\mu = 0$, т. е. в кеплеровском движении.

Следовательно, члены с t^2 могут исчезнуть, только если мы имеем

$$C = 0,$$

откуда

$$\Pi = B\delta f_1 \delta f_1'.$$

Но это последнее равенство означало бы, что Π сводится к бинарной квадратичной форме и, следовательно, что ее дискриминант нуль. *Таким образом, дискриминант Δ формы Π должен был бы обращаться в нуль для всех точек всех периодических решений.*

288. Однако алгебраическое соотношение

$$\Delta = 0$$

не может быть справедливым, по крайней мере, если оно не обращается в тождество для всех точек всех периодических решений.

Действительно, если мы присоединим к соотношению

$$\Delta = 0 \tag{2}$$

два других соотношения

$$F=\beta, \qquad G=\gamma \tag{3}$$

(где β и γ — две произвольные постоянные, F и G — две функции, обозначенные так в предыдущем параграфе) и любое четвертое алгебраическое соотношение

$$H=0, \tag{4}$$

то число решений этих четырех алгебраических уравнений будет ограниченным, какими бы ни были постоянные β и γ.

Рассмотрим теперь периодическое решение; переменные x_i и y_i будут разложены по степеням μ в виде

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^0 + \mu x_i^1 + \ldots, \\ y_i &= y_i^0 + \mu y_i^1 + \ldots. \end{aligned} \tag{5}$$

Функция F также будет разложима по степеням μ, и мы будем иметь

$$F = F_0 + \mu F_1 + \ldots.$$

G и H будут независимы от μ.

Остается Δ; я говорю, что эта функция, которая по предположению алгебраична по x_i и y_i, зависит также алгебраически от μ.

Действительно, выражая то, что

$$\int \sqrt{\Pi}$$

— интегральный инвариант, мы придем к определенным соотношениям, в которые войдут коэффициенты Π, их производные и коэффициенты дифференциальных уравнений движения.

Мы предположим, что Π — алгебраическая функция от x_i и y_i; мы можем предположить, что эта алгебраическая функция относится как частный случай к определенному типу, не содержащему явно μ, но зависящему алгебраически от некоторого числа произвольных параметров. Тогда $\int \sqrt{\Pi}$ не будет интегральным инвариантом при произвольных значениях параметров, а только тогда, когда эти параметры будут принимать некоторые частные значения, *зависящие от* μ.

Выражая то, что $\int \sqrt{\Pi}$ — интегральный инвариант, мы придем к некоторым алгебраическим уравнениям между μ и этими параметрами; эти уравнения должны быть совместными, и ясно, что из них мы получим параметры в виде алгебраических функций от μ.

Коэффициенты формы Π и Δ будут, следовательно, также алгебраичны по μ.

Таким образом, уравнение $\Delta=0$ является алгебраическим относительно μ, и мы можем предположить, что оно преобразовано так, что левая часть — целый полином относительно μ.

Итак, будем писать

$$\Delta=\Delta_0+\mu\Delta_1+\mu^2\Delta_2+\ldots.$$

Кроме того, Δ_0 не будет тождественным нулем, если только таковым не будет Δ. Если бы действительно, Δ_0 обращалось в нуль, то Δ содержало множитель μ, который можно было устранить.

Функция Δ должна обратиться в нуль, когда в ней x_i и y_i заменены разложениями (5). В таком случае она становится разложимой по степеням μ и так как член, не зависящий от μ, должен обратиться в нуль, то мы имеем

$$\Delta_0(x_i^0,\ y_i^0)=0. \tag{2bis}$$

Заметим теперь, что мы должны иметь

$$\begin{aligned} F_0(x_i^0,\ y_i^0)&=\beta_0,\\ G_0(x_i^0,\ y_i^0)&=\gamma_0, \end{aligned} \tag{3bis}$$

где β_0 и γ_0 — постоянные. Для того чтобы в этом удостовериться, достаточно вспомнить, что при $\mu=0$ движение сводится к кеплерову.

Примем теперь, например,

$$H=x_1^2+x_2^2-1$$

и напишем уравнение

$$(x_1^0)^2+(x_2^0)^2=1. \tag{4bis}$$

Заметим далее, что если предположить $\mu=0$, то третье тело будет описывать кеплеров эллипс; пусть ξ и η — координаты этого тела, отнесенные не к подвижным осям, а к осям симметрии этого эллипса.

Тогда уравнения кеплерова эллипса запишутся в виде

$$\begin{aligned} \xi&=\xi_0+\xi_1\cos\varphi+\xi_2\cos 2\varphi+\ldots,\\ \eta&=\qquad\eta_1\sin\varphi+\eta_2\sin 2\varphi+\ldots \end{aligned} \tag{6}$$

Коэффициенты ξ_k, η_k будут зависеть от двух постоянных, которыми являются большая полуось и эксцентриситет эллипса, и, следовательно, от β_0 и γ_0. При этом мы будем иметь

$$\varphi=n_1t+\varpi_1,$$

где среднее движение n_1 зависит от β_0, а ϖ_1 — новая постоянная интегрирования.

Пересечение эллипса (6) с окружностью

$$\xi^2+\eta^2=1$$

будет иметь место в двух точках, которые будут даны уравнениями

$$\xi = \cos\theta, \qquad \eta = \pm\sin\theta, \qquad \varphi = \pm\varphi_0. \tag{7}$$

Далее мы будем иметь

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \xi\cos(\omega t + \varpi_2) + \eta\sin(\omega t + \varpi_2),\\ x_2^0 &= \xi\sin(\omega t + \varpi_2) - \eta\cos(\omega t + \varpi_2), \end{aligned} \tag{8}$$

где ϖ_2 — новая постоянная интегрирования.

Мы получим решения уравнения (4bis), комбинируя уравнения (7) и (8), что дает

$$x_1^0 = \cos\left[\theta + \frac{\omega}{n_1}(\varphi_0 + 2k\pi - \varpi_1) + \varpi_2\right],$$

$$x_1^0 = \cos\left[-\theta + \frac{\omega}{n_1}(-\varphi_0 + 2k\pi - \varpi_1) + \varpi_2\right]$$

(k — любое целое число).

Для того чтобы решение было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы отношение ω/n_1 было рациональным. Представим это отношение в виде дроби, приведенной к наиболее простому выражению, и пусть D — ее знаменатель. Мы видим, что уравнение (4bis) будет допускать $2D$ различных решений.

Уравнения (2bis), (3bis) и (4bis) должны были бы допускать лишь ограниченное число решений, каковы бы ни были постоянные β_0 и γ_0. Но я могу выбрать β_0 таким образом, чтобы ω/n_1 имело какое угодно значение, и, следовательно, чтобы D было сколь угодно большим.

Это может случиться, только если Δ_0 и, следовательно, Δ тождественно равно нулю.

Следовательно, дискриминант формы Π — тождественный нуль, и эта форма должна свестись к бинарной форме.

Таким же способом мы доказали бы, что не может случиться, чтобы все периодические решения были особыми в смысле п. 257.

Таким образом, доказательство дано только в очень частном случае, но можно предвидеть возможность его распространения на общий случай.

289. Форма Π, рассматриваемая как бинарная форма, должна свестись к

$$B\delta f_1 \delta f_1'$$

для точки периодического решения; следовательно, эта бинарная форма будет определенной (т. е. равной сумме двух квадратов), если периодическое решение устойчиво, т. е. если характеристические показатели мнимы; она будет неопределенной (т. е. равной разности двух квадратов), если периодическое решение неустойчиво, т. е. если характеристические показатели вещественны.

Предположим опять, что μ очень мало, и снова возьмем уравнение (4bis).

Согласно принципам главы III (п. 42), для заданного значения β_0 мы будем иметь, по крайней мере, два периодических решения, из которых одно — устойчиво и одно — неустойчиво. Пусть

$$\varpi_1', \varpi_2'; \quad \varpi_1'', \varpi_2''$$

— соответствующие значения постоянных ϖ_1 и ϖ_2.

Пусть

$$\theta + \frac{\omega}{n_1}(\varphi_0 - \varpi_1') + \varpi_2' = \psi',$$

$$\theta + \frac{\omega}{n_1}(\varphi_0 - \varpi_1'') + \varpi_2'' = \psi'';$$

тогда уравнение (4bis) даст для первого периодического решения

$$x_1^0 = \cos\left(\psi' + \frac{2k\omega\pi}{n_1}\right)$$

и для второго

$$x_1^0 = \cos\left(\psi'' + \frac{2k\omega\pi}{n_1}\right).$$

Мы сможем без ограничения общности предположить, что $\psi'' > \psi'$ и при этом ψ' и ψ'' заключены между 0 и $2\pi/D$. Тогда форма П будет

$$\text{определенной для } x_1^0 = \cos\left(\psi' + \frac{2\pi}{D}\right),$$

$$\text{неопределенной для } x_1^0 = \cos\left(\psi'' + \frac{2\pi}{D}\right),$$

$$\text{определенной для } x_1^0 = \cos\left(\psi' + \frac{4\pi}{D}\right),$$

$$\text{неопределенной для } x_1^0 = \cos\left(\psi'' + \frac{4\pi}{D}\right),$$

. . . .

$$\text{определенной для } x_1^0 = \cos(\psi' + 2\pi)$$

$$\text{неопределенной для } x_1^0 = \cos(\psi'' + 2\pi)$$

что показывает, что дискриминант формы П, рассматриваемой как бинарная форма, должен обращаться в нуль, по крайней мере, $2D$ раз, откуда, как и выше, можно заключить, что он — тождественный нуль.

Таким образом, форма П сводится к квадрату; следовательно, так как она должна быть равной

$$B\delta f_1 \delta f_1'$$

для всех точек периодического решения, она должна обращаться в нуль во всех этих точках.

То же рассуждение показало бы снова, что она — тождественный нуль.

В итоге, по крайней мере для частного случая ограниченной задачи, не существует квадратичного инварианта, отличного от известного.

Глава XXVI

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПУАССОНУ [9]

Различные определения устойчивости

290. Слово *устойчивость* понимали в весьма различном смысле, и разница между различными понятиями устойчивости станет очевидной, если вспомнить историю науки.

Лагранж доказал, что если пренебречь квадратами масс, большие оси орбит остаются неизменными. Этим он хотел сказать, что с этой степенью приближения большие оси можно разложить в ряды, члены которых имеют вид

$$A \sin(\alpha t + \beta),$$

где A, α и β — постоянные.

Отсюда следует, что если эти ряды равномерно сходятся, большие оси остаются заключенными в определенных пределах; система небесных светил, следовательно, не может пройти все положения, совместимые с интегралами живых сил и площадей, и, кроме того, она также пройдет вновь бесконечное число раз сколь угодно близко от ее начального положения.

Это — полная устойчивость.

Продвинув приближения далее, Пуассон объявил, что устойчивость существует, если учесть квадраты масс и пренебречь их кубами.

Однако это не имело того же смысла.

Он хотел сказать, что большие оси могут быть разложены в ряды, содержащие не только члены вида

$$A \sin(\alpha t + \beta),$$

но и члены вида

$$At \sin(\alpha t + \beta).$$

Значение большой оси испытывает в этом случае непрерывные колебания, но ничто не доказывает, что амплитуда этих колебаний не возрастает неограниченно со временем.

Мы можем утверждать, что система всегда вновь будет проходить бесконечно много раз сколь угодно близко от ее начального положения; но нельзя сказать, что она не удаляется значительно от него.

Таким образом, слово *устойчивость* не имеет одного и того же смысла для Лагранжа и для Пуассона.

Еще стоит заметить, что теоремы Лагранжа и Пуассона допускают важное исключение: они не верны более, если отношение средних движений соизмеримо.

Оба геометра тем не менее заключают об устойчивости, потому что *бесконечно мало вероятно*, чтобы это отношение было в точности соизмеримым.

Таким образом, имеется повод для точного определения устойчивости.

Для того чтобы имела место полная устойчивость в проблеме трех тел, необходимы три условия:

1) чтобы ни одно из трех тел не могло неограниченно удаляться;

2) чтобы два тела не могли столкнуться и чтобы расстояние между этими двумя телами не могло стать меньше некоторого предела;

3) чтобы система проходила бесконечно много раз сколь угодно близко от ее начального положения.

Если выполнено одно третье условие и неизвестно, выполнены ли первые два, то я буду говорить, что существует только *устойчивость по Пуассону*.

Имеется случай, в котором давно доказано, что выполнено первое условие. Мы видим сейчас, что третье условие также выполнено. Что же касается второго, то я ничего не могу сказать.

Это — случай проблемы п. 9, когда предполагают, что три тела движутся в одной и той же плоскости, масса третьего тела равна нулю, а два первых тела описывают концентрические окружности вокруг их общего центра тяжести. Это то, что я для краткости назову *ограниченной задачей*.

Движение жидкости

291. Для того чтобы лучше разъяснить принцип доказательства, я возьму сначала простой пример.

Рассмотрим жидкость, заключенную в сосуде неизменной формы и заполняющую его полностью.

Пусть x, y, z — координаты молекулы жидкости, u, v, w — компоненты ее скорости, так что уравнения движения записываются в виде

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=dt. \qquad (1)$$

Компоненты u, v, w — функции от x, y, z и t, которые я предполагаю заданными.

Я предполагаю движение установившимся, так что u, v, w зависят только от x, y, z.

Так как жидкость несжимаема, то мы имеем

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0.$$

Другими словами, объем

$$\int dxdydz$$

— интегральный инвариант.

Изучим траекторию какой-либо молекулы; я говорю, что эта молекула пройдет бесконечно много раз сколь угодно близко от ее начального положения. Более точно, пусть U — какой-либо объем внутри сосуда и сколь угодно малый; я говорю, что существуют молекулы, которые пересекут этот объем бесконечное число раз.

Пусть U_0 — какой-нибудь объем внутри сосуда; молекулы жидкости, которые заполняют этот объем в момент 0, заполнят в момент τ некоторый объем U_1, в момент 2τ — некоторый объем $U_2, \ldots$, в момент $n\tau$ — некоторый объем U_n.

Несжимаемость жидкости или, что то же, существование интегрального инварианта, показывает, что все объемы

$$U_0,\ U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_n$$

равны между собой.

Пусть V — общий объем сосуда; если

$$V < (n+1)\, U_0,$$

то мы будем иметь

$$V < U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n.$$

Следовательно, невозможно, чтобы все эти объемы $U_0, U_1, \ldots, U_n$ были внешними по отношению друг к другу; необходимо, чтобы, по крайней мере, два из них, например U_i и U_k, имели общую часть.

Я говорю, что если U_i и U_k имеют общую часть, то это же будет и для U_0 и U_{k-i} (предполагая, например, что $k > i$).

Действительно, пусть M — общая точка U_i и U_k; молекула, находящаяся в точке M в момент $i\tau$, находится в момент 0 в точке M_0, принадлежащей U_0, поскольку точка M принадлежит U_i.

Таким же образом молекула, находящаяся в точке M в момент $k\tau$, в момент $(k-i)\tau$ находится в точке M_0, поскольку движение установившееся; с другой стороны, она находится в момент 0 в точке M_1, принадлежащей U_0, так как M принадлежит U_k, и мы должны прийти к выводу, что M_0 принадлежит U_{k-i}.

Таким образом, U_{k-i} и U_0 имеют общие точки, что и требовалось доказать.

Следовательно, можно выбрать число α таким образом, чтобы U_0 и U_α имели общую часть.

Пусть U_0' — эта общая часть; построим $U_1', U_2', \ldots$ по U_0', как мы строим $U_1, U_2, \ldots$ по U_0. Мы сможем найти такое число β, чтобы U_0' и U_β' имели общую часть. Пусть U_0'' — эта общая часть. Мы сможем найти такое число γ, чтобы U_0'' и U'' имели общую часть.

И так далее.

Отсюда вытекает, что U'_0 составляет часть U_0, U''_0 — часть U'_0, U'''_0 — часть U''_0, ... Вообще, $U_0^{(p+1)}$ составит часть $U_0^{(p)}$. Когда число p неограниченно возрастает, объем $U_0^{(p)}$ делается, следовательно, все меньше и меньше.

Согласно хорошо известной теореме, имеется, по крайней мере, одна точка, быть может, несколько, быть может, бесконечное множество точек, принадлежащих одновременно U_0, U'_0, U''_0, ... и $U_0^{(p)}$, как велико бы ни было p.

Это множество точек, которое я назову E, будет в некотором роде пределом, к которому стремится объем $U_0^{(p)}$, когда p неограниченно возрастает.

Оно может состоять из изолированных точек; но оно может быть и другим; может, например, случиться, что E — область пространства конечного объема.

Молекула, которая будет находиться внутри U_0 и, следовательно, U_α в нулевой момент, будет находиться внутри U_0 в момент $-\alpha\tau$.

Молекула, которая будет находиться внутри U''_0 и, следовательно, U'_β в нулевой момент, будет находиться внутри U'_0 в момент $-\beta\tau$ и, следовательно, внутри U_0 в момент $-(\alpha+\beta)\tau$. Молекула, которая будет находиться внутри U'''_0 в нулевой момент, будет находиться внутри U''_0 в момент $-\gamma\tau$, внутри U'_0 в момент $-(\beta+\gamma)\tau$, внутри U_0 в момент $-(\alpha+\beta+\gamma)\tau$.

Так как U'''_0, U''_0, U'_0 составляют часть U_0, эта молекула будет находиться в четыре различных момента (кратные τ) внутри U_0.

Аналогично молекула, которая находится внутри $U_0^{(p)}$ в нулевой момент, находилась внутри U_0 в p предыдущих моментов (которые равны отрицательным кратным τ).

А так как E составляет часть $U_0^{(p)}$, как велико бы ни было p, отсюда следует, что молекула, которая в нулевой момент составляет часть E, проходила через U_0 бесконечное число раз в моменты, которые все равны отрицательным кратным τ.

Таким образом, имеются молекулы, которые пересекают объем U_0 бесконечное число раз для любого как угодно малого значения этого объема, что и требовалось доказать.

Уравнения

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=dt$$

превращаются в

$$\frac{dx}{-u}=\frac{dy}{-v}=\frac{dz}{-w}=dt,$$

если заменить t на $-t$; следовательно, они сохраняют ту же форму.

Следовательно, подобно тому, как мы только что доказали, что существуют молекулы, которые пересекают U_0 бесконечное число раз *до нулевого момента*, мы смогли бы доказать, что имеются молекулы, которые пересекают U_0 бесконечное число раз *после нулевого момента*.

Предыдущее рассуждение указывает нам моменты, когда молекула, которая в нулевой момент принадлежит E, пересекает U_0.

Будучи внутри E и, следовательно, U'_0 и U_α в нулевой момент, она будет внутри U_0 в момент

$$-\alpha\tau.$$

Будучи внутри E и, следовательно, U''_0 и U'_β в нулевой момент, она будет находиться внутри U'_0 и U_α в момент

$$-\beta\tau$$

и внутри U_0 в момент

$$-(\alpha+\beta)\tau.$$

Таким образом, она будет находиться внутри U_0 в два момента $-\beta\tau$ и $-(\alpha+\beta)\tau$.

Поскольку она принадлежит E и U'''_0 в нулевой момент, она будет принадлежать U''_0 в момент $-\gamma\tau$, U'_0 — в момент $-(\beta+\gamma)\tau$, U_0 — в момент $-(\alpha+\beta+\gamma)\tau$, так что она пересечет U_0 в три момента

$$-\gamma\tau, \quad -(\beta+\gamma)\tau, \quad -(\alpha+\beta+\gamma)\tau.$$

В момент $-\gamma\tau$ она принадлежит U''_0 и, следовательно, U'_0 и U_α; в момент

$$-(\alpha+\gamma)\tau$$

она, таким образом, опять будет принадлежать U_0.

В итоге эта молекула должна будет пересечь U_0 в различные моменты

$$\begin{array}{llll}
-\alpha\tau, & -\beta\tau, & -\gamma\tau, & \ldots, \\
-(\alpha+\beta)\tau, & -(\beta+\gamma)\tau, & -(\alpha+\gamma)\tau, & \ldots, \\
-(\alpha+\beta+\gamma)\tau, & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots,
\end{array}$$

где коэффициент при $-\tau$ будет, таким образом, произвольной комбинацией чисел α, β, γ, ...

Каковы же теперь среди всех этих моментов те, когда молекула будет находиться не только внутри U_0, но и внутри U'_0?

Легко видеть, что достаточно взять комбинации, в которые не входит число α.

Точно так же моменты, когда молекула будет находиться внутри U''_0, будут соответствовать комбинациям, в которые не входят ни число α, ни число β.

292. Возьмем снова объемы

$$U_0, U_1, U_2, \ldots, U_n. \qquad (1)$$

Условимся говорить для краткости, что каждый из них есть *последующий* относительно того, который расположен перед ним в последовательности (1), и *предшествующий* относительно того, который расположен после него.

Точно так же U_2, U_3 будут вторым, третьим последующим объема U_0.

Я могу продолжить последовательность (1) за U_n, строя последовательные последующие объема U_n

$$U_{n+1}, U_{n+2}, \ldots.$$

Я могу равным образом продолжить ее налево и построить последовательные предшествующие объема U_0

$$U_{-1}, U_{-2}, \ldots$$

таким образом, что молекулы, которые находятся в нулевой момент в U_0, находятся в U_{-1} в момент $-\tau$ и в U_{-2} — в момент -2τ.

При этих условиях, если я всегда буду обозначать через V весь объем сосуда и через k — любое целое число, и если мы имеем

$$kV < (n+1)U_0,$$

то будут существовать точки, которые будут принадлежать одновременно $k+1$ объемам ряда (1).

Действительно, сумма объемов ряда (1) равна $(n+1)\,U_0$; если бы ни одна точка не могла принадлежать одновременно более чем k этих объемов, то эта сумма должна была бы быть меньше kV.

Таким образом, мы сможем найти в ряде (1) $k+1$ объемов

$$U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_k},$$

которые будут иметь общую часть.

Отсюда я делаю вывод, что $k+1$ объемов

$$U_0, U_{\alpha_1-\alpha_0}, U_{\alpha_2-\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_k-\alpha_0}$$

имеют общую часть.

Пусть, например, $k=2$,

$$2V < (n+1)\,U_0;$$

мы сможем найти три объема

$$U_\alpha,\ U_\beta,\ U_\gamma,$$

которые будут иметь общую часть; индексы α, β, γ удовлетворяют условиям

$$0 \leqslant \alpha \leqslant n; \quad 0 \leqslant \beta \leqslant n; \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant n; \quad \alpha < \beta < \gamma.$$

Отсюда мы заключаем, что три объема

$$U_0,\ U_{\beta-\alpha},\ U_{\gamma-\alpha}$$

имеют общую часть, и что то же будет иметь место для трех объемов

$$U_{\alpha-\beta},\ U_0,\ U_{\gamma-\beta}$$

или для трех объемов

$$U_{\alpha-\gamma},\ U_{\beta-\gamma},\ U_0.$$

293. Выше мы видели, что имеются молекулы, пересекающие U_0 бесконечное число раз *до нулевого момента*, и молекулы, которые пересекают U_0 бесконечное число раз *после нулевого момента*. Я ставлю перед собой задачу установить, существуют ли среди них такие, которые пересекают U_0 бесконечно много раз как до, *так и после нулевого момента*.

Пусть U_0 — какой-нибудь объем; согласно предыдущему пункту, мы всегда можем найти два таких числа a и α, первое из которых отрицательно, а второе положительно, что три объема

$$U_a,\ U_0,\ U_\alpha$$

будут иметь общую часть. Пусть U'_0 — эта общая часть.

Любая молекула, находящаяся в U'_0 в нулевой момент, будет находиться в U_0 в три момента

$$-\alpha\tau,\ 0,\ -a\tau.$$

Из этих трех моментов первый отрицателен, последний положителен.

Наша молекула пересечет, следовательно, U_0, по крайней мере, один раз до нулевого момента и, по крайней мере, один раз после этого момента.

Поступая в дальнейшем с U'_0, как с U_0, мы найдем два числа b и β, первое из которых отрицательно, второе положительно, такие, что три объема

$$U'_b,\ U'_0,\ U'_\beta$$

будут иметь общую часть. Пусть U''_0 — эта общая часть.

Каждая молекула, находящаяся в U''_0 в нулевой момент, будет находиться в U'_0 в три момента

$$-\beta\tau,\ 0,\ -b\tau$$

и, следовательно, в U_0 в пять моментов

$$-(\alpha+\beta)\tau,\ -\beta\tau,\ 0,\ -b\tau,\ -(a+b)\tau.$$

Из этих моментов два первых отрицательны, два последних положительны.

Каждая молекула, находящаяся в U_0'' в момент 0, пересечет U_0, по крайней мере, два раза до нулевого момента и, по крайней мере, два раза после этого момента.

И так далее.

Если мы построим U_0''' с U_0'', U_0^{IV} с U_0''', то увидим, что каждая молекула, находящаяся в $U_0^{(p)}$ в момент 0, пересекает U_0, по крайней мере, p раз до нулевого момента и, по крайней мере, p раз после этого момента.

Но U_0' составляет часть U_0, U_0'' — часть U_0' и так далее. Таким образом, мы будем иметь точечное множество E (содержащее, по крайней мере, одну точку), составляющее часть всех объемов $U_0^{(p)}$ одновременно, как бы ни было велико p.

Каждая молекула, которая в нулевой момент находится в E, будет, следовательно, также находиться внутри

$$U_0,\ U_0',\ U_0'',\ \ldots,\ U_0^{(p)},\ ad\ inf.,$$

потому что E — часть всех этих объемов.

Следовательно, она пересечет U_0 бесконечно много раз до момента 0 и бесконечно много раз после этого момента.

Таким образом, существуют молекулы, пересекающие U_0 бесконечное число раз как до, так и после нулевого момента, что и требовалось доказать.

294. Множество E, определенное в п. 291 (так же, как и множество E, рассмотренное в предыдущем пункте), может состоять из единственной точки (хотя, разумеется, всегда имеется бесконечное число молекул, которые пересекают U_0 бесконечно много раз).

Оно может состоять из конечного числа точек или бесконечного числа отдельных точек.

Можно предположить также, что это множество E обладает конечным объемом; посмотрим, каковы будут следствия из этой гипотезы. Рассмотрим множество E, определенное в п. 291.

Я рассматриваю последовательность целых чисел

$$\alpha,\ \beta,\ \ldots,$$

определенных в этом пункте, и я утверждаю, что

$$\beta \geqslant \alpha.$$

Действительно, U_α — первый из последующих объема U_0, имеющий общую часть с U_0.

Объем U'_β — первый из последующих объема U'_0, имеющий общую часть с U'_0.

Но U'_0 составляет часть U_0, а U'_β — часть U_β. Если, следовательно, U'_β имеет общую часть с U'_0, то это значит, что U_β — один из последующих объема U_0, имеющий общую часть с U_0. Это влечет за собой неравенство

$$\alpha \leqslant \beta.$$

Мы найдем также

$$\beta \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \ldots .$$

Числа α, β, γ, δ, ..., следовательно, возрастают или, по крайней мере, никогда не убывают.

С другой стороны, согласно п. 294, мы имеем

$$1+\alpha < \frac{V}{U_0}; \quad 1+\beta < \frac{V}{U'_0}; \quad 1+\gamma < \frac{V}{U''_0}.$$

Очевидно, имеем

$$U_0 > U'_0 > U''_0 > \ldots,$$

и если E имеет конечный объем, который я назову также E, то, каково бы ни было p,

$$E < U_0^{(p)},$$

поскольку E составляет часть $U_0^{(p)}$.

Следовательно, все числа α, β, γ, ... меньше чем

$$\frac{V}{E} - 1.$$

Таким образом, они не могут беспредельно возрастать, и мы можем заключить, что в последовательности чисел α, β, ..., начиная с некоторого ранга, все члены равны между собой.

Предположим, что начиная с p-го ранга все члены равны λ.

Тогда $U_0^{(p)}$ и $U_\lambda^{(p)}$ будут иметь общую часть $U_0^{(p+1)}$; $U_0^{(p+1)}$ и $U_\lambda^{(p+1)}$ будут иметь общую часть $U_0^{(p+2)}$ и т. д.

Пусть E_λ — λ-й последующий E. E — множество точек, принадлежащих одновременно U_0, U'_0, U''_0, ..., *ad inf*; E_λ будет множеством точек, принадлежащих одновременно U_λ, U'_λ, U''_λ, ...; я могу также сказать, что E — множество точек, которые одновременно принадлежат

$$U_0^{(p+1)}, \; U_0^{(p+2)}, \; \ldots, \tag{1}$$

поскольку каждая из областей U_0, U'_0, ... является лишь частью предыдущей. Также E_λ — множество точек, принадлежащих одновременно

$$U_\lambda^{(p)}, \; U_\lambda^{(p+1)}, \; \ldots . \tag{2}$$

Но $U_0^{(p+1)}$ — часть $U_\lambda^{(p)}$, $U_0^{(p+2)}$ — часть $U_\lambda^{(p+1)}$, ...; каждый член ряда (2) является частью соответствующего члена ряда (1). Таким образом, E — часть E_λ или же совпадает с E_λ.

Но мы предположили, что E — некоторая область пространства, имеющая конечный объем. Так как жидкость несжимаема, то λ-й последующий этой области E_λ должен быть также некоторой областью пространства, обладающей *тем же* объемом. Следовательно, E не может быть частью E_λ. Значит, E и E_λ совпадают.

Итак, если предположить, что E — некоторая область пространства конечного объема, то необходимо допустить, что E совпадает с одним из своих последующих.

295. Вот несколько теорем, которые почти очевидны и формулировкой которых я ограничусь. Пусть

$$U_{\alpha_1},\ U_{\alpha_2},\ \ldots,\ U_{\alpha_\mu},\ \ldots$$

— те из последующих U_0, которые имеют общую часть с U_0; числа α_μ расположены в порядке возрастания; мы будем иметь

$$1+\alpha_\mu \leqslant \mu\frac{V}{U}.$$

Пусть, далее,

$$U_{\gamma_1},\ U_{\gamma_2},\ \ldots,\ U_{\gamma_\mu}$$

— μ последующих U_0, имеющих общую часть друг с другом и с U_0. Я выбираю эти числа γ таким образом, чтобы γ_μ было сколь возможно малым; мы получим

$$1+\alpha_\mu \leqslant 1+\gamma_\mu \leqslant \mu\frac{V}{U}.$$

Если мы вновь примем обозначения п. 291 и обозначим через U_α — первый последующий, который имеет общую часть с U_0, через U_0' — эту общую часть, через U_β' — первый последующий U_0', имеющий общую часть с U_0', то я говорю, что если β не равно α, мы будем иметь

$$\beta \geqslant 2\alpha;$$

действительно, $U_{\beta-\alpha}$ будет иметь общую часть с U_0.

Вероятности

296. В п. 291 мы видели, что существуют молекулы, пересекающие U_0 бесконечно много раз. С другой стороны, вообще, среди них имеются другие, которые пересекают U_0 лишь конечное число раз. Я ставлю себе целью показать, что эти последние должны рассматриваться как исключительные

или, точнее, что *вероятность* того, что молекула пересечет U_0 лишь конечное число раз, бесконечно мала [10], если *допустить*, что эта молекула находится внутри U_0 в начальный момент. Однако сначала я должен объяснить смысл, который придаю слову *вероятность*. Пусть $\varphi(x, y, z)$ — какая-нибудь положительная функция трех координат x, y, z; я условлюсь говорить, что вероятность того, что в момент $t=0$ молекула находится внутри некоторого объема, пропорциональна интегралу

$$J = \int \varphi(x, y, z)\, dx dy dz,$$

распространенному на этот объем. Следовательно, она равна интегралу J, деленному на значение этого же интеграла, распространенного на весь сосуд V.

Мы можем произвольным образом выбрать функцию φ, и вероятность окажется, таким образом, определенной полностью; так как траектория молекулы зависит только от ее начального положения, то вероятность того, что молекула будет вести себя тем или иным образом, является полностью определенной величиной, как только выбрана функция φ.

При этих условиях я приму сначала просто $\varphi=1$ и буду искать вероятность p того, что молекула не пересечет более k раз области U_0 между моментом $-n\tau$ и нулевым моментом.

Итак, пусть σ_0 — область, составляющая часть U_0 и определенная следующим свойством. Всякая молекула, которая в начальный момент находится внутри σ_0, пересечет U_0 не более k раз между моментами $-n\tau$ и 0.

Если мы допустим, что наша молекула находится внутри U_0 в нулевой момент, то искомая вероятность будет

$$p = \frac{\sigma_0}{U_0}. \tag{1}$$

Пусть

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$$

— первые n последующих области σ_0. Среди $n+1$ областей

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$$

не может существовать более k областей, имеющих общую часть, ибо в противном случае всякая молекула, которая в нулевой момент находилась бы в этой общей области, пересекла бы σ_0 и, следовательно, U_0 более чем k раз между моментами $-n\tau$ и 0.

Таким образом, мы имеем

$$(n+1)\sigma_0 < kV$$

и, следовательно,

$$p < \frac{kV}{(n+1)U_0}.$$

Каким бы малым ни был объем U_0 и сколь велико бы ни было k, всегда можно взять n достаточно большим, чтобы правая часть этого неравенства была сколь угодно малой. Таким образом, когда n стремится к бесконечности, p стремится к нулю.

Итак, вероятность того, что молекула, находящаяся в начальный момент в области U_0, пересечет эту область не более k раз между моментами $-\infty$ и 0, эта вероятность, говорю я, бесконечно мала.

Также бесконечно мала вероятность того, что эта молекула пересечет эту область не более k раз между моментами 0 и $+\infty$.

Положим теперь $n=k^3+x$. Вероятность того, что молекула пересечет U_0 не более k раз между моментами $-(k^3+x)\tau$ и 0, будет меньше

$$\frac{kV}{(k^3+x+1)\,U_0}.$$

Она стремится к нулю, когда k неограниченно возрастает.

Вероятность P того, что молекула не пересекает U_0 бесконечное число раз между моментами $-\infty$ и 0, таким образом, бесконечно мала.

В самом деле, эта вероятность P является суммой вероятностей того, что молекула пересечет U_0 только один раз, что она пересечет U_0 два и только два раза, что она пересечет U_0 три и только три раза и т. д.

Но вероятность того, что молекула пересечет U_0 k и только k раз между моментами $-\infty$ и 0, очевидно, меньше, чем вероятность того, что она пересечет U_0 k раз или менее k раз между моментами $-(k^3+x)\ \tau$ и 0, меньше, следовательно, чем

$$\frac{kV}{(k^3+x+1)\,U_0}.$$

Таким образом, общая вероятность P будет

$$P<\frac{V}{(x+2)\,U_0}+\frac{2V}{(x+9)\,U_0}+\ldots+\frac{kV}{(k^3+x+1)\,U_0}+\ldots.$$

Ряд в правой части сходится равномерно. Каждый из членов стремится к нулю, когда x стремится к бесконечности. Таким образом, сумма этого ряда стремится к нулю. Следовательно, вероятность P бесконечно мала.

Также бесконечно мала вероятность того, что молекула не пересечет U_0 бесконечное число раз между моментами 0 и $+\infty$.

Те же результаты имеют место, когда вместо того, чтобы принять $\varphi=1$, выбирают функцию φ любым другим образом.

Тогда равенство (1) должно быть заменено следующим:

$$p=\frac{J(\sigma_0)}{J(U_0)},$$

где $J(\sigma_0)$ и $J(U_0)$ означают интеграл J, распространенный соответственно на области σ_0 и U_0.

Я предполагаю, что функция φ непрерывна; следовательно, она не становится бесконечной, и я могу назначить ей верхний предел μ; тогда будем иметь

$$J(\sigma_0) < \mu\sigma_0,$$

и поскольку

$$(n+1)\sigma_0 < kV,$$

то отсюда выведем

$$p < \frac{\mu k V}{(n+1) J(U_0)}.$$

Каким бы малым ни было значение $J(U_0)$ и сколь велико бы ни было k, всегда можно взять n достаточно большим, чтобы правая часть этого неравенства была сколь угодно малой. Итак, мы снова приходим к тем же результатам, *которые, таким образом, не зависят от выбора функции* φ.

В итоге молекулы, пересекающие U_0 только конечное число раз, исключительны в той же мере, что и рациональные числа, представляющие исключение в ряду чисел, тогда как иррациональные числа являются правилом.

Таким образом, если Пуассон полагал возможным ответить утвердительно на тот вопрос об устойчивости, который он поставил, хотя он не исключил случай, когда средние движения соизмеримы, мы также имеем право считать устойчивость доказанной, в смысле нашего определения, хотя вынуждены исключить особые молекулы, о которых только что говорили.

Я добавлю, что существование асимптотических решений в достаточной мере доказывает, что эти исключительные молекулы существуют в действительности.

Обобщение предыдущих результатов

297. До сих пор мы ограничивались весьма частным случаем несжимаемой жидкости, заключенной в сосуде, т. е., говоря аналитическим языком, уравнениями вида

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

где X, Y, Z — три функции, связанные между собой соотношением

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0,$$

и такие, что во всех точках замкнутой поверхности (поверхности сосуда) мы имеем

$$lX + mY + nZ = 0,$$

где l, m, n — направляющие косинусы нормали к этой замкнутой поверхности.

Все предыдущие результаты, однако, останутся верными и в гораздо более общих случаях; при этом ничего не надо менять ни в самих результатах, ни в рассуждениях, которые к ним приводят.

Пусть n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}, \tag{1}$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — любые однозначные функции, удовлетворяющие условию

$$\frac{dMX_1}{dx_1} + \frac{dMX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dMX_n}{dx_n} = 0,$$

так что уравнения (1) допускают интегральный инвариант

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \tag{2}$$

Я предполагаю, кроме того, что M — положительно; мы будем говорить тогда, что уравнения (1) допускают положительный интегральный инвариант.

Еще я предполагаю, что уравнения (1) таковы, что если точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ находится в начальный момент внутри некоторой области V (играющей ту же роль, которую только что играл сосуд с заключенной в нем жидкостью), то она будет оставаться неопределенно долго внутри этой области.

Наконец, я предполагаю, что интеграл

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

распространенный на эту область, конечен.

В этих условиях, если рассматривается область U_0, содержащаяся в V, можно будет выбрать бесконечным числом способов начальное положение точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таким образом, чтобы эта точка пересекала эту область U_0 бесконечно много раз. Если этот выбор начального положения делается наудачу внутри U_0, то вероятность того, что точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не пересечет область U_0 бесконечное число раз, будет бесконечно мала.

Другими словами, если начальные условия не являются исключительными в смысле, который я придал этому слову выше, то точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пройдет бесконечно много раз сколь угодно близко от своего начального положения.

При этом в предыдущих доказательствах ничего не нужно изменять. Мы вновь найдем, например, неравенство

$$V < (n+1)\, U_0,$$

где V и U_0 означают интеграл (2), распространенный соответственно на области V и U_0.

Мы сможем вывести отсюда те же следствия; в самом деле, интеграл (2), будучи по предположению существенно положительным, обладает тем же свойством, что и объем, а именно, распространенный на всю область, он будет больше интеграла, взятого только по части этой области.

298. Как нам теперь узнать, существует ли такая область V, чтобы точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ всегда оставалась внутри этой области, если она находилась в ней в начальный момент времени?

Предположим, что уравнения (1) допускают интеграл

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const}.$$

Рассмотрим область V, определенную неравенствами

$$h < F < h',$$

где h и h' — две какие-нибудь постоянные, сколь угодно близкие друг другу.

Ясно, что если эти неравенства удовлетворяются в начальный момент времени, то они будут выполнены всегда. Следовательно, область V удовлетворяет поставленным условиям.

Приложение к ограниченной задаче

299. Сейчас мы применим эти принципы к ограниченной задаче п. 9 [11]: нулевая масса, круговое движение двух других масс, нулевой наклон Если мы отнесем нулевую массу, движение которой изучаем, к двум осям, вращающимся вокруг общего центра тяжести двух других масс с постоянной угловой скоростью n, равной угловой скорости этих двух других масс; если обозначим через ξ, η координаты нулевой массы относительно двух подвижных осей и через V — силовую функцию, то уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi', \qquad \frac{d\eta}{dt} = \eta',$$
$$\frac{d\xi'}{dt} = 2n\eta' + n^2\xi + \frac{dV}{d\xi}, \tag{1}$$
$$\frac{d\eta'}{dt} = -2n\xi' + n^2\eta + \frac{dV}{d\eta},$$

и мы видим тотчас, что они допускают положительный интегральный инвариант

$$\int d\xi d\eta d\xi' d\eta'. \tag{2}$$

С другой стороны, они допускают интеграл Якоби

$$\frac{\xi'^2+\eta'^2}{2}=V+\frac{n^2}{2}(\xi^2+\eta^2)+h, \tag{3}$$

где h — постоянная.

Поскольку сумма $\xi'^2+\eta'^2$ существенно положительна, то мы должны иметь

$$V+\frac{n^2}{2}(\xi^2+\eta^2)>-h. \tag{4}$$

Следовательно, приходим к построению кривых

$$V+\frac{n^2}{2}(\xi^2+\eta^2)=\text{const}.$$

Левая часть соотношения (4) существенно положительна, так как мы имеем

$$V=\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2},$$

где m_1 и m_2 — массы двух главных тел, r_1 и r_2 — их расстояния от нулевой массы. Левая часть (4) обращается в бесконечность при $r_1=0$, при $r_2=0$, а также на бесконечности; следовательно, она должна иметь, по меньшей мере, один минимум и две точки, в которых ее две первые производные обращаются в нуль, не имея в них ни максимума, ни минимума.

Вообще, если имеется n относительных минимумов или максимумов, мы будем иметь $n+1$ точек, в которых обе производные обращаются в нуль, но нет ни максимума, ни минимума.

Однако очевидно, что эти точки, в которых обе производные обращаются в нуль, соответствуют тем частным решениям задачи трех тел, которые Лаплас изучал в главе VI его книги X «Небесная механика».

Но мы получаем две из этих точек, строя на m_1m_2 равносторонний треугольник либо сверху, либо снизу от прямой m_1m_2, которую мы принимаем за ось ξ. Третья вершина этого треугольника является одним из решений задачи.

Все другие точки, удовлетворяющие задаче, лежат на оси ξ. Легко видеть, что левая часть (4), когда ξ меняется от $-\infty$ до $+\infty$, представляет три и только три минимума, первый — между бесконечностью и массой m_1, второй — между обеими массами m_1 и m_2, третий — между бесконечностью и массой m_2.

Действительно, производная $\frac{dV}{d\xi}+n^2\xi$ обращается в нуль (при $\eta=0$) только один раз в каждом из этих интервалов, поскольку она является суммой трех членов, которые все возрастают.

Уравнения

$$\frac{dV}{d\xi}+n^2\xi=\frac{dV}{d\eta}+n^2\eta=0,$$

которые выражают тот факт, что две производные левой части (4) равны нулю, имеют, следовательно, только пять решений, а именно, точки B_1 и B_2 — вершины равносторонних треугольников, точки A_1, A_2 и A_3, расположенные на оси ξ; мы предположим, что эти точки встречаются в следующем порядке

$$-\infty,\ A_1,\ m_1,\ A_2,\ m_2,\ A_3,\ +\infty.$$

Остается узнать, какие из этих точек соответствуют минимуму; мы знаем заранее, что их существует две.

Заметим, что если мы заставим меняться непрерывным образом обе массы m_1 и m_2, то любая из пяти точек A и B всегда будет соответствовать минимуму или же не будет ему соответствовать никогда.

В самом деле, от одного случая к другому можно перейти, только если гессиан левой части (4) обратится в нуль, если две точки A и B совпадают, чего не произойдет никогда.

Следовательно, достаточно будет изучить частный случай, например тот, когда $m_1=m_2$.

В этом случае из соображений симметрии можно предугадать, что оба решения A_1 и A_3 должны быть одной и той же природы, так же, как и оба решения B_1 и B_2; следовательно, только A_1 и A_3 или же только B_1 и B_2 соответствуют минимуму. Итак, A_2 не соответствует минимуму.

Можно установить, что A_1 не соответствует минимуму.

Следовательно, оба минимума соответствуют решениям B_1 и B_2.

Предположим теперь, что m_1 намного меньше m_2, что представляет собой случай, имеющий место в природе.

Для достаточно больших значений $-h$ кривая

$$V+\frac{n^2}{2}(\xi^2+\eta^2)=-h$$

будет состоять из трех замкнутых ветвей: C_1, окружающей m_1, C_2, окружающей m_2, и C_3, охватывающей C_1 и C_2. Для меньших значений она будет содержать две замкнутые ветви: C_1, охватывающую m_1 и m_2, C_2, окружающую C_1.

Для еще более малых значений мы имели бы единственную замкнутую ветвь, оставляющую m_1 и m_2 снаружи и охватывающую B_1 и B_2.

Наконец, для еще более малых значений мы будем иметь две симметричные одна другой замкнутые ветви, охватывающие соответственно B_1 и B_2.

То, что мы сейчас скажем, будет применимо только к двум первым случаям; следовательно, два последних случая мы оставим в стороне.

В первом случае множество точек, удовлетворяющих неравенству (4), распадается на три частичных множества: множество точек, внутренних по отношению к C_1, множество точек, внутренних по отношению к C_2, множество точек, внешних по отношению к C_3.

Во втором случае множество точек, удовлетворяющих (4), распадается на два частичных множества: множество точек, внутренних по отношению к C_1, множество точек, внешних по отношению к C_2.

То, что мы сейчас скажем, неприложимо ни к множеству точек, внешних по отношению к C_3 в первом случае, ни к множеству точек, внешних по отношению к C_2 во втором случае.

Напротив, оно будет приложимо в первом случае к множеству точек, внутренних по отношению к C_1, или к множеству точек, внутренних по отношению к C_2, и во втором случае — к множеству точек, внутренних по отношению к C_1.

Для определенности рассмотрим первый случай и множество точек, внутренних по отношению к C_2.

В этом случае мы возьмем в качестве области V область, определенную неравенствами

$$+h+\varepsilon > \frac{\xi'^2+\eta'^2}{2} - V - \frac{n^2}{2}(\xi^2+\eta^2) > +h-\varepsilon. \tag{5}$$

Предположим, что ε очень мало́ и что h имеет такое значение, что мы находимся в условиях первого случая; наконец, для завершения определения области V поместим точку (ξ, η) внутрь кривой C_2.

Тогда ясно, что если точка (ξ, η, ξ', η') находится в области V в начальный момент времени, то она останется там навсегда.

Чтобы показать, что результаты предыдущих пунктов применимы к случаю, который нас интересует, остается показать, что интеграл

$$\int d\xi d\eta d\xi' d\eta', \tag{2}$$

распространенный на область V, конечен.

Каким образом этот интеграл может стать бесконечным? Так как кривая C_2 замкнута, то ξ и η ограничены; следовательно, интеграл может стать бесконечным, только если ξ' и η' бесконечны. Но в силу неравенств (5) ξ' и η' могут стать бесконечными, только если

$$V + \frac{n^2}{2}(\xi^2+\eta^2)$$

станет бесконечным, или, поскольку ξ и η ограничены, если V станет бесконечным.

Но V становится бесконечным при $r_1=0$ и при $r_2=0$. Но так как точка m_1 — внешняя по отношению к C_2, то мы должны исследовать только случай

$$r_2 = 0.$$

Итак, оценим ту часть интеграла, которая лежит в окрестности точки m_2. Если r_2 очень мало́, то сумма $\xi^2+\eta^2$ очень близка к $(Om_2)^2$, член m_1/r_1 также близок к постоянной; так что, если положим

$$h+\frac{n^2}{2}(\xi^2+\eta^2)+\frac{m_1}{r_1}=H,$$

H можно будет считать постоянной.

Тогда, если положим

$$(\xi-Om_2)=r_2\cos\omega,\quad \eta=r_2\sin\omega,\quad \xi'=\rho\cos\varphi,\quad \eta'=\rho\sin\varphi,$$

то неравенства (5) примут вид

$$H+\varepsilon>\frac{\rho^2}{2}-\frac{m_2}{r_2}>H-\varepsilon, \tag{5bis}$$

и интеграл (2) примет вид

$$\int\rho r_2 d\rho dr_2 d\omega d\varphi. \tag{2bis}$$

Мы присоединим к неравенствам (5bis) неравенство

$$r_2<\alpha,$$

где α — очень мало́, поскольку речь идет о том, чтобы оценить часть интеграла, лежащую в окрестности m_2, а оставшаяся часть наверняка конечна.

Если проинтегрируем сначала по ω и по φ, то интеграл (2bis) примет вид

$$4\pi^2\int\rho r_2 d\rho dr_2. \tag{2ter}$$

Проинтегрируем сначала по ρ. Необходимо вычислить интеграл

$$\int\rho d\rho=\frac{\rho^2}{2},$$

взятый в пределах

$$\rho=\sqrt{2\left(H-\varepsilon+\frac{m_2}{r_2}\right)}\ \text{ и }\ \rho=\sqrt{2\left(H+\varepsilon+\frac{m_2}{r_2}\right)},$$

что дает 2ε.

Следовательно, интеграл (2ter) приводится к интегралу

$$8\pi^2\varepsilon\int\limits_0^\alpha r_2 dr_2=4\pi^2\varepsilon\alpha^2,$$

следовательно, он конечен.

Теоремы, доказанные выше, применимы, следовательно, к интересующему нас случаю. Нулевая масса пройдет бесконечное число раз сколь угодно близко от своего начального положения, если не налагаются некоторые исключительные начальные условия, вероятность которых бесконечно мала.

Следовательно, если в ограниченной задаче допустить, что начальные условия таковы, что точка ξ, η должна оставаться внутри замкнутой кривой C_1 или C_2, то первое из условий устойчивости, в смысле п. 290, оказывается выполненным.

Но, более того, равным образом выполнено третье условие: следовательно, имеет место *устойчивость по Пуассону.*

300. Очевидно, результат будет тем же, каков бы ни был закон притяжения.

В самом деле, если движение материальной точки ξ, η определяется уравнениями

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{dV}{d\xi}, \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{dV}{d\eta}$$

или в случае относительного движения уравнениями

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}-2n\frac{d\eta}{dt}=\frac{dV}{d\xi},$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}+2n\frac{d\xi}{dt}=\frac{dV}{d\eta},$$

так что интеграл живых сил записывается в виде

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right]-V=h,$$

и если функция V и постоянная h таковы, что значения ξ и η остаются ограниченными, то будет иметь место устойчивость по Пуассону.

Но это не все, то же самое будет в более общем случае.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты $n/3$ материальных точек.

Пусть V — силовая функция, зависящая от этих n переменных.

Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — соответствующие массы, так что мы обозначаем через m_1, m_2 или через m_3 массу материальной точки, координаты которой суть x_1, x_2 и x_3.

Уравнения запишутся в виде

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{dV}{dx_i},$$

а интеграл живых сил будет иметь вид

$$\sum\frac{m_i}{2}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2=V+h.$$

Если функция V и постоянная h таковы, что в силу этого равенства координаты x_i ограничены, то мы будем иметь устойчивость по Пуассону.

Действительно, речь идет о том, чтобы доказать, что интегральный инвариант

$$\int dx'_1 dx'_2 \ldots dx'_n dx_1 dx_2 \ldots dx_n \quad \left(x'_i = \frac{dx_i}{dt}\right)$$

конечен, когда интегрирование распространено на область, которую я назвал V и которая определяется неравенствами

$$V + h - \varepsilon < \sum \frac{m_i}{2}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 < V + h + \varepsilon. \tag{1}$$

Обозначим через A интеграл

$$\int dx'_1 dx'_2 \ldots dx'_n,$$

взятый по области, определенной неравенством

$$\sum \frac{m_i}{2} x_i'^2 < 1.$$

Этот же интеграл, распространенный на область

$$\sum \frac{m_i}{2} x_i'^2 < R^2,$$

очевидно, будет равен

$$AR^n.$$

Взятый по области, определенной неравенствами (1), он будет равен

$$A\left[(V + h + \varepsilon)^{n/2} - (V + h - \varepsilon)^{n/2}\right],$$

или, поскольку ε очень мало,

$$nA\varepsilon\,(V + h)^{\frac{n}{2} - 1}.$$

Следовательно, интегральный инвариант равен

$$nA\varepsilon \int (V + h)^{\frac{n}{2} - 1} dx_1 dx_2 \ldots dx_n, \tag{2}$$

причем интегрирование должно быть распространено на все такие точки, чтобы выражение $V+h$ было положительным.

Согласно моему предположению, область $V+h > 0$ ограничена.

В таком случае будет легко узнать, является ли интеграл (2) конечным или бесконечным.

Он всегда будет конечным, если $n=2$, ибо в этом случае показатель степени у $V+h$ равен нулю.

Предположим теперь, что $n>2$ и что выражение $V+h$ становится бесконечно большим порядка p, когда расстояние между двумя точками x_1, x_2, x_3 и x_4, x_5, x_6 становится бесконечно малым первого порядка. Тогда величина под знаком интеграла в (2) будет порядка

$$p\left(\frac{n}{2}-1\right).$$

Многообразие

$$x_1=x_4, \qquad x_2=x_5, \quad x_3=x_6$$

имеет $n-3$ измерения; интеграл имеет порядок n; условие того, чтобы интеграл был конечен, записывается, следовательно, в виде

$$n-(n-3)>p\left(\frac{n}{2}-1\right),$$

откуда

$$p<\frac{6}{n-2}.$$

Это условие того, чтобы имела место устойчивость по Пуассону.

Приложение к задаче трех тел

301. Предыдущие рассуждения приложимы к случаю, когда уравнение

$$\sum \frac{m_i}{2}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2=V+h \tag{1}$$

влечет за собой следствие, что x_i могут изменяться только в конечных пределах.

К сожалению, в задаче трех тел этого нет. Я приму обозначения п. 11; я обозначу через x_1, x_2, x_3 координаты второго тела относительно первого; через x_4, x_5, x_6 — координаты третьего тела относительно центра тяжести двух первых; через a, b, c — расстояния между тремя телами; через M_1, M_2, M_3 — их массы и, наконец, через

$$m_1=m_2=m_3=\beta,$$
$$m_4=m_5=m_6=\beta'$$

— величины, которые в п. 11 я назвал β и β'.

Тогда мы будем иметь

$$V=\frac{M_2M_3}{a}+\frac{M_3M_1}{b}+\frac{M_1M_2}{c}.$$

Равенство (1) влечет за собой неравенство

$$V+h>0. \tag{2}$$

Функция V существенно положительна; если, следовательно, постоянная h положительна, то неравенство будет удовлетворяться всегда; но вопрос заключается в том, чтобы узнать, можно ли давать h достаточно малые отрицательные значения, чтобы неравенство могло удовлетворяться только для *ограниченных* значений координат x_i. Это сводится к вопросу о том, может ли удовлетворяться неравенство

$$\frac{M_2M_3}{a}+\frac{M_3M_1}{b}+\frac{M_1M_2}{c}+h>0, \tag{3}$$

присоединенное к неравенствам, налагаемым на три стороны треугольника

$$a+b>c, \quad b+c>a, \quad a+c>b \tag{4}$$

только для конечных значений a, b, c.

Примем $a=c$ и очень большим; примем b очень малым; неравенства (4) выполняются сами собой.

Что касается неравенства (3), которое принимает вид

$$\frac{M_2M_3+M_1M_2}{a}+\frac{M_3M_1}{b}+h>0,$$

то оно может быть удовлетворено, каково бы ни было h, сколь угодно большими значениями a.

Как бы мало ни было h, как бы велико ни было a, всегда можно взять b достаточно малым, чтобы левая часть была положительной.

Существование интегралов площадей не изменяет этого заключения; в самом деле, интегралы эти записываются в виде

$$\begin{aligned}
\beta(x_2x_3'-x_3x_2')+\beta'(x_5x_6'-x_6x_5')&=a_1,\\
\beta(x_3x_1'-x_1x_3')+\beta'(x_6x_4'-x_4x_6')&=a_2,\\
\beta(x_1x_2'-x_2x_1')+\beta'(x_4x_5'-x_5x_4')&=a_3.
\end{aligned} \tag{5}$$

В силу этих уравнений имеем

$$\frac{\beta}{2}(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2)+\frac{\beta'}{2}(x_4'^2+x_5'^2+x_6'^2)>\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2I}, \tag{6}$$

где I — момент инерции, которым обладала бы система, образованная двумя материальными точками, массы которых были бы β и β', а координаты относительно трех неподвижных осей — x_1, x_2, x_3; x_4, x_5, x_6; момент инерции, говорю я, который эта система имела бы относительно прямой, служащей мгновенной осью вращения твердого тела, которое совпадало бы

в данный момент времени с этой системой и вращалось бы таким образом, что постоянные площадей были бы те же, что и для системы.

Тогда неравенство (2) должно быть заменено следующим:

$$V + h > \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2I}. \tag{2bis}$$

Но это неравенство, как и само неравенство (2), может быть удовлетворено сколь угодно большими значениями x_i; ибо для очень больших значений x_i момент инерции I очень велик, и, так как правая часть очень близка к нулю, мы снова возвращаемся к неравенству (2).

Следовательно, мы должны заключить, что рассуждения предыдущего пункта неприменимы.

Для того чтобы лучше отдать себе в этом отчет, вычислим интегральный инвариант

$$\int dx_1' dx_2' \ldots dx_6' dx_1 dx_2 \ldots dx_6,$$

распространяя его на область, определенную следующими неравенствами:

$$\begin{gathered} h - \varepsilon < T - V < h + \varepsilon, \\ a_1 - \varepsilon_1 < K_1 < a_1 + \varepsilon_1, \\ a_2 - \varepsilon_2 < K_2 < a_2 + \varepsilon_2, \\ a_3 - \varepsilon_3 < K_3 < a_3 + \varepsilon_3. \end{gathered} \tag{7}$$

Величины ε очень малы; K_i суть левые части равенств (5), а T — приведенная живая сила, т. е. левая часть (6).

Проинтегрируем сначала по x_i'; найдем

$$\frac{64\pi}{(\beta\beta')^{3/2}} \varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \int \left(V + h - \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2I}\right)^{3/2} \frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_6}{\sqrt{I_1 I_2 I_3}},$$

где I_1, I_2, I_3 представляют три главных момента инерции системы.

Я замечу мимоходом, что если выбрать оси координат, параллельные главным осям инерции, то согласно определению I мы будем иметь

$$\frac{a_1^2}{I_1} + \frac{a_2^2}{I_2} + \frac{a_3^2}{I_3} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{I}.$$

Мы видим, что интеграл, распространенный на все такие системы значений, что

$$V + h - \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2I} > 0,$$

конечен, хотя знаменатель $\sqrt{I_1 I_2 I_3}$ становится бесконечным, когда одна из точек x_1, x_2, x_3 или x_4, x_5, x_6 бесконечно удаляется. В самом деле,

в этом случае область интегрирования есть бесконечность третьего порядка, а знаменатель обращается в бесконечность лишь второго порядка [12].

302. Но хотя рассуждения предыдущих пунктов более неприменимы, тем не менее, из существования интегрального инварианта можно извлечь некоторые заключения, не лишенные интереса.

Итак, предположим, что расстояние b между двумя из тел становится малым и что третье тело удаляется в бесконечность. Третье тело из-за его большого расстояния перестанет возмущать движение двух первых тел, которое станет весьма близким к эллиптическому.

Это третье тело притом будет описывать почти гиперболу вокруг центра тяжести двух первых тел.

Для того чтобы лучше пояснить мою мысль, я сначала возьму простой пример: я предполагаю, что тело описывает гиперболу относительно неподвижной точки. Гипербола состоит из двух ветвей; одна из этих ветвей является *аналитическим* продолжением другой, хотя для механика траектория состоит только из одной единственной ветви.

Тогда мы можем задаться вопросом, допускает ли траектория в случае задачи трех тел аналитическое продолжение и как его можно определить.

Координаты второго тела относительно первого суть x_1, x_2, x_3, координаты третьего тела относительно центра тяжести двух первых тел суть x_4, x_5, x_6, так что мы приходим к рассмотрению движения двух фиктивных точек, координаты которых относительно трех неподвижных осей суть x_1, x_2, x_3 для первого и x_4, x_5, x_6 — для второго.

Первая из этих точек будет описывать почти эллипс, вторая — почти гиперболу и будет двигаться, бесконечно удаляясь по одной из ветвей этой гиперболы. Для того чтобы получить искомое аналитическое продолжение, построим вторую ветвь этой гиперболы и присоединим ее к эллипсу, описанному первой точкой.

Рассмотрим теперь две частные траектории нашей системы. Для первой начальные условия движения будут таковы, что если t положительно и очень велико, точка x_4, x_5, x_6 находится очень близко к первой ветви гиперболы, а точка x_1, x_2, x_3 — очень близко к эллипсу, так что расстояние этих двух точек как от гиперболы, так и от эллипса стремится к нулю, когда t неограниченно возрастает.

Примем асимптоту гиперболы за ось x_4 и пусть V — скорость точки, описывающей эту гиперболу для положительного и очень большого значения t. Тогда

$$x_4 - Vt$$

будет стремиться к конечному и определенному пределу X, когда t будет неограниченно возрастать.

Пусть также n — среднее движение по эллипсу, а l — средняя аномалия, тогда разность

$$l - nt$$

будет стремиться к конечному и определенному пределу l_0.

Если мы зададим эллипс и гиперболу и, следовательно, V и n, если кроме того зададим X и l_0, то начальные условия движения, соответствующего первой траектории, будут полностью определены.

Рассмотрим теперь вторую траекторию и предположим, что начальные условия движения таковы, что для отрицательного и очень большого t точка x_4, x_5, x_6 будет очень близка ко второй ветви гиперболы, а точка x_1, x_2, x_3 — очень близка к эллипсу и что эти две точки приближаются к этим двум кривым, когда t стремится к $-\infty$.

Разности

$$x_4 - Vt, \quad l - nt$$

стремятся к конечным и определенным пределам X' и l'_0, когда t стремится к бесконечности.

Начальные условия, соответствующие второй траектории, полностью определены, когда заданы эллипс, гипербола, X' и l'_0.

Если мы имеем

$$X = X', \quad l_0 = l'_0,$$

то обе траектории могут быть рассматриваемы как аналитическое продолжение одна другой.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где функции X_i, зависящие только от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяют соотношению

$$\sum \frac{dX_i}{dx_i} = 0;$$

эти уравнения допускают интегральный инвариант

$$\int dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \tag{2}$$

Допустим, что мы узнали каким-то образом, что точка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ должна оставаться внутри некоторой области V, аналогичной области V, рассмотренной в предыдущих пунктах, но неограниченно простирающейся таким образом, что интеграл (2), распространенный на эту область, бесконечен. Заключения пунктов 297 и 298 не будут более применимы.

Однако заменим уравнения (1) следующими:

$$\frac{dx_i}{dt'} = \frac{X_i}{M} = X'_i, \tag{1bis}$$

где M — любая заданная функция $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Точка $x_1, x_2, \ldots, x_n$, движение которой определяется уравнениями (1bis), будет описывать те же траектории, что и точка, движение которой определяется уравнениями (1). В самом деле, дифференциальные уравнения этих траекторий как в одном, так и в другом случае суть

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Однако если я называю P точку, движение которой определено уравнениями (1), и P' — точку, движение которой определено уравнениями (1bis), то мы видим, что эти две точки описывают одну и ту же траекторию, но по различным законам.

Если я назову t момент времени, когда P проходит через точку своей траектории, а t' — момент, когда P' проходит эту же самую точку, то эти два момента времени будут связаны соотношением

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{M}.$$

При этом мы имеем

$$\sum \frac{d(MX'_i)}{dx_i} = 0,$$

что означает, что уравнения

$$\frac{dx_i}{dt'} = X'_i \tag{1bis}$$

допускают интегральный инвариант

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \tag{2bis}$$

Допустим, что функция M всегда положительна и что она стремится к нулю, когда точка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удаляется в бесконечность, *и притом достаточно быстро, чтобы интеграл* (2bis), *распространенный на область* V, *был конечен.*

Выводы п. 297 и следующих приложимы к уравнениям (1bis). Следовательно, уравнения (1bis) обладают устойчивостью по Пуассону.

Я уточняю мою мысль.

Мы имеем

$$t = \int_0^{t'} \frac{dt'}{M}. \tag{3}$$

Поскольку функция M существенно положительна, t будет возрастать вместе с t'; но, так как M может обратиться в нуль, то может случиться, что интеграл в правой части (3) будет бесконечен.

Предположим, например, что M обращается в нуль при $t' = T$; тогда t будет бесконечным при

$$t' = T \text{ или } t' > T.$$

Рассмотрим траекторию точки P'; мы можем разделить ее на две части — первую C, которую P' проходит от момента $t'=0$ до момента $t'=T$, вторую — C', которую P' проходит от момента $t'=T$ до $t'=\infty$.

Точка P будет описывать ту же траекторию, что и P', но она опишет только часть C, ибо она может достигнуть части C' только по истечении бесконечного времени t.

Для механика траектория P будет состоять, следовательно, только из C; для аналитика она состоит не только из C, но и из C', являющейся ее *аналитическим продолжением*.

Рассмотрим точку P_1, положение которой определено следующим образом: точка P_1 будет занимать в момент t_1 то же положение, что и точка P' в момент t'; что же касается t_1, оно будет определено равенством

$$t_1 = \int_{t'_0}^{t'} \frac{dt'}{M} \quad (\text{где } t'_0 > T).$$

Движение точки P_1 будет происходить в соответствии с уравнениями (1), и эта точка опишет C', так что можно рассматривать траектории точек P и P_1 как аналитическое продолжение одна другой.

Предположим теперь, что точка P в начальный момент времени лежит внутри некоторой области U_0. Если начальные условия движения не являются исключительными в смысле, данном этому слову в п. 296, то траектория точки P и *ее последовательные аналитические продолжения* пересекут бесконечное число раз область U_0, какой бы малой она ни была. Однако может случиться, что точка P никогда не войдет в эту область, потому что эта область пересекается не траекториями точки P в собственном смысле, а их аналитическими продолжениями [13].

303. Это приложимо к задаче трех тел.

Выше мы видели, что необходимо рассмотреть интеграл

$$\int dx_1 \ldots dx_6 dx'_1 \ldots dx'_6,$$

который мы свели при этом к шестикратному интегралу

$$\int \left(V + h - \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2I}\right)^{3/2} \frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_6}{\sqrt{I_1 I_2 I_3}}.$$

Но мы видели, что этот интеграл, взятый по области V, бесконечен, и это помешало нам заключить об устойчивости по Пуассону.

Запишем уравнения движения в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \qquad \frac{dx'_i}{dt} = Y_i,$$

где X_i и Y_i — функции от x_i и x'_i.

Тогда пусть

$$M=\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_6^2+1)^2},$$

и запишем новые уравнения

$$\frac{dx_i}{dt'}=\frac{X_i}{M}, \qquad \frac{dx_i'}{dt'}=\frac{Y_i}{M}.$$

Новые уравнения допускают в качестве интегрального инварианта

$$\int M dx_1 \ldots dx_6 dx_1' \ldots dx_6',$$

или же

$$\int \left(V+h-\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2I}\right)^{3/2} \frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_6}{\sqrt{I_1 I_2 I_3}} M.$$

Но этот интеграл конечен.

Следовательно, если начальное положение системы таково, что точка P пространства двенадцати измерений, координаты которой суть x_1, x_2, ..., x_6; x_1', x_2', ..., x_6', в начальный момент времени лежит внутри некоторой области U_0, то траектория этой точки и ее аналитические продолжения [13], как мы их определили в конце п. 302, пересекут эту область U_0 бесконечное число раз, по крайней мере, если начальное положение системы не является исключительным в смысле, данном этому слову в п. 296.

304. На первый взгляд кажется, что это следствие может интересовать только аналитика и не имеет никакого физического смысла. Однако этот взгляд не совсем оправдан.

В самом деле, можно заключить, что если система не проходит вновь бесконечное число раз сколь угодно близко от своего первоначального положения, то интеграл

$$\int\limits_{t=0}^{\infty} \frac{dt}{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_6^2+1)^2}$$

будет конечен.

Это предложение верно, если оставить в стороне некоторые исключительные траектории, вероятность которых равна нулю в смысле, данном этому слову в п. 296.

Если этот интеграл конечен, то мы заключим, что промежуток времени, в течение которого периметр треугольника, составленного тремя телами, остается меньше заданного количества, всегда конечен.

Глава XXVII

ТЕОРИЯ ПОСЛЕДУЮЩИХ [14]

305. Представляя теорию интегральных инвариантов в слегка видоизмененной форме, мы можем вывести из нее еще ряд заключений, которые будут полезны в дальнейшем.

Начнем с изучения простого примера. Пусть дана точка, координаты которой в пространстве суть x, y и z и движение которой определяется уравнениями

$$\frac{dx}{dt}=X, \quad \frac{dy}{dt}=Y, \quad \frac{dz}{dt}=Z. \tag{1}$$

Величины X, Y и Z суть заданные и однозначные функции от x, y, z; предположим сначала, что X и Y обращаются в нуль на всей оси z, так что

$$x=y=0$$

есть решение уравнений (1).

Далее положим

$$x=\rho\cos\omega, \quad y=\rho\sin\omega;$$

тогда уравнения (1) примут вид

$$\frac{d\rho}{dt}=R, \quad \frac{d\omega}{dt}=\Omega, \quad \frac{dz}{dt}=Z, \tag{2}$$

где R, Ω и Z — функции от ρ, ω, z, периодические с периодом 2π относительно ω.

Мы условимся давать ρ только положительные значения и сможем это легко сделать, поскольку $x=y=0$ есть решение.

Я предполагаю теперь, кроме того, что Ω никогда не может обратиться в нуль, оставаясь, например, положительной; тогда ω всегда будет возрастать вместе с t.

Вообразим, что мы проинтегрировали уравнения (2) и что их решение представлено в форме

$$\rho=f_1(\omega, a, b), \quad z=f_2(\omega, a, b).$$

Буквы a и b представляют постоянные интегрирования.

Пусть

$$\rho_0=f_1(0,\ a,\ b),\qquad z_0=f_2(0,\ a,\ b),$$
$$\rho_1=f_1(2\pi,\ a,\ b),\qquad z_1=f_2(2\pi,\ a,\ b).$$

Пусть M_0 — точка, координаты которой суть

$$x=\rho_0,\qquad y=0,\qquad z=z_0,$$

а M_1 — точка с координатами

$$x=\rho_1,\qquad y=0,\qquad z=z_1.$$

Эти две точки принадлежат полуплоскости xz, расположенной со стороны положительных x.

Будем называть точку M_1 *последующей* точки M_0.

Это название оправдано тем, что если рассмотреть семейство кривых, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1), и если провести через точку M_0 кривую этого семейства и продолжить ее до тех пор, пока она снова не встретит полуплоскость ($y=0$, $x>0$), то это новое пересечение будет иметь место в M_1.

Если в этой полуплоскости построить любую фигуру F_0, то последующие различных точек F_0 образуют фигуру F_1, которую мы будем называть *последующей* F_0.

Ясно, что ρ_1 и z_1 — непрерывные функции от ρ_0 и z_0.

Следовательно, последующая непрерывной кривой будет непрерывной кривой, последующая замкнутой кривой будет замкнутой кривой, последующая n-связной области будет n-связной областью.

Предположим теперь, что три функции X, Y и Z связаны соотношением

$$\frac{dMX}{dx}+\frac{dMY}{dy}+\frac{dMZ}{dz}=0,$$

где M — положительная и однозначная функция от x, y, z.

Тогда уравнения (1) допускают интегральный инвариант

$$\int Mdxdydz,$$

а уравнения (2) допускают

$$\int M\rho d\rho d\omega dz.$$

Рассмотрим теперь уравнения

$$\frac{d\rho}{d\omega}=\frac{R}{\Omega},\qquad \frac{dz}{d\omega}=\frac{Z}{\Omega},\qquad \frac{d\omega}{d\omega}=1, \tag{3}$$

где ω рассматривается как независимая переменная.

Очевидно, они допускают интегральный инвариант

$$\int M\Omega\rho d\rho d\omega dz \tag{4}$$

(см. п. 253).

Так как M, Ω и ρ предполагались выше существенно положительными, то это — положительный интегральный инвариант.

Пусть F_0 — любая область, расположенная в полуплоскости

$$(y=0, \quad x>0),$$

а F_1 — ее последующая.

Пусть J_0 есть интеграл

$$\int M\Omega\rho d\rho dz, \tag{5}$$

распространенный на плоскую область F_0, а J_1 — тот же самый интеграл, распространенный на плоскую область F_1.

Пусть тогда Φ_0 — объем, порожденный областью F_0 при ее повороте вокруг оси z на бесконечно малый угол ε; интеграл (4), распространенный на Φ_1, будет равен $J_1\varepsilon$.

Так как интегральный инвариант (4) должен иметь одно и то же значение для Φ_0 и для Φ_1, то должно быть

$$J_0 = J_1.$$

Таким образом, *интеграл* (5) *имеет одно и то же значение для любой области и ее последующей.*

Это — новая форма фундаментального свойства интегральных инвариантов.

306. Итак, пусть дана замкнутая кривая C_0, лежащая в полуплоскости ($y=0$, $x>0$) и ограничивающая область F_0. Пусть C_1 — последующая кривой C_0, она будет также замкнутой кривой, ограничивающей область F_1, а эта область F_1 будет последующей F_0.

Если интеграл (5), распространенный на F_0 и на F_1, имеет значения J_0 и J_1, то

$$J_0 = J_1$$

и отсюда следует, что F_0 не может быть частью F_1, а F_1 — частью F_0.

Можно сделать четыре предположения об относительном расположении обеих замкнутых кривых C_0 и C_1:

1) C_1 лежит внутри C_0;
2) C_0 лежит внутри C_1;
3) обе кривые лежат вне друг друга;
4) обе кривые взаимно пересекаются.

Уравнение $J_0=J_1$ исключает две первые из этих гипотез.

Если по какой-либо причине исключается также и третье предположение, то наверняка обе кривые пересекаются.

Предположим, например, что X, Y, Z зависят от произвольного параметра μ и что для $\mu=0$ кривая C_0 будет своей собственной последующей; тогда для очень малых значений μ кривая C_0 будет очень мало отличаться от C_1; следовательно, не может случиться, чтобы обе кривые C_0 и C_1 лежали вне друг друга; они должны пересекаться.

Инвариантные кривые

307. Я назову *инвариантной кривой* всякую кривую, которая будет своей собственной последующей.

Легко построить инвариантные кривые; пусть, в самом деле, M_0 — любая точка полуплоскости, M_1 — ее последующая; соединим M_0 с M_1 любой дугой кривой C_0; пусть C_1 — последующая дуги C_0, C_2 — последующая C_1 и так далее. Множество дуг кривых C_0, C_1, C_2, . . ., очевидно, составит инвариантную кривую. Однако мы должны также рассмотреть инвариантные кривые, происхождение которых будет более естественным.

Допустим, что уравнения (1) допускают периодическое решение. Пусть уравнения

$$x=\varphi_1(t), \qquad y=\varphi_2(t), \qquad z=\varphi_3(t) \tag{6}$$

представляют это периодическое решение, так что функции φ_i периодичны по t с периодом T.

Я предполагаю, что когда t увеличивается на T, ω увеличивается на 2π.

Уравнения (6) представляют кривую; пусть M_0 — точка, в которой эта кривая пересекает полуплоскость; эта точка M_0, очевидно, будет своей собственной последующей.

Предположим теперь, что существуют асимптотические решения, очень близкие к периодическому решению (6). Пусть уравнения

$$x=\Phi_1(t), \qquad y=\Phi_2(t), \qquad z=\Phi_3(t) \tag{7}$$

представляют эти решения.

Функции Φ_i будут разложимы по степеням $Ae^{\alpha t}$, причем коэффициенты будут периодическими функциями от t. В этом выражении α — характеристический показатель, A — постоянная интегрирования.

В уравнениях (7) три координаты x, y, z выражены, следовательно, в функции двух параметров A и t; таким образом, эти уравнения представляют поверхность, которую можно назвать *асимптотической поверхностью*. Эта асимптотическая поверхность пройдет через кривую (6), потому что уравнения (7) приводятся к уравнениям (6), если в них положить $A=0$.

Асимптотическая поверхность пересечет полуплоскость вдоль некоторой кривой, проходящей через точку M_0 и, очевидно, являющейся инвариантной кривой.

308. Рассмотрим инвариантную кривую K. Я предполагаю, что X, Y, Z зависят от параметра μ так же, как и кривая K.

Я предполагаю, что при $\mu=0$ кривая K замкнута, но что она перестает быть замкнутой для малых значений μ.

Пусть A_0 — точка кривой K. Положение этой точки будет зависеть от μ; при $\mu=0$ кривая K замкнута, так что после обхода этой кривой, начиная с A_0, мы возвращаемся в точку A_0; если μ *очень мало*, этого более не произойдет, но мы вновь пройдем *очень близко* от A_0; следовательно, мы будем иметь на кривой K дугу кривой, отличной от той, на которой лежит A_0, но которая пройдет очень близко от A_0. Пусть B_0 — точка этой дуги кривой, которая наиболее близка к A_0.

Я соединяю A_0 с B_0.

Пусть A_1 и B_1 — последующие A_0 и B_0; эти две точки будут лежать на K; пусть A_1B_1 — последующая кривая малого отрезка прямой A_0B_0.

Мы должны будем рассмотреть замкнутую кривую C_0, которая состоит из дуги A_0MB_0 кривой K, заключенной между A_0 и B_0, и малого отрезка прямой A_0B_0. Какова будет ее последующая?

Предположим для определенности, что четыре точки A_1, A_0, B_1, B_0 следуют на K в порядке $A_1A_0B_1B_0$. Последующая C_1 кривой C_0 будет

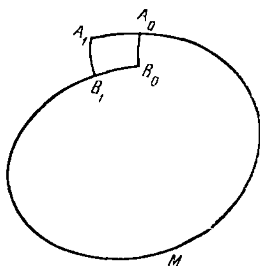


Рис. 1

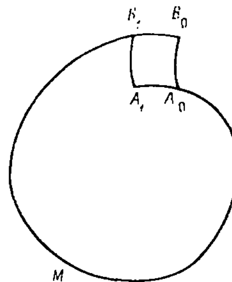


Рис. 2

состоять из дуги A_1MB_1 кривой K и малой дуги A_1B_1 — последующей малого отрезка прямой A_0B_0.

Можно сделать несколько предположений.

1. *Малый криволинейный четырехугольник* $A_0B_0A_1B_1$ — *выпуклый*; я хочу сказать, что ни одна из его криволинейных сторон не имеет двойной точки и что единственными точками, общими для двух сторон, являются вершины. При этом предположении кривая представится в том виде, как это указано на одном из следующих двух рисунков (рис. 1 и 2).

Эта гипотеза должна быть отброшена, ибо очевидно, что интеграл J в случае рис. 1 больше для C_1, чем для C_0, и меньше в случае рис. 2.

2. *Дуга A_0A_1 или A_1B_1 имеет двойную* точку. Если бы инвариантная кривая K имела двойную точку, то мы должны были бы иметь двойную точку на дуге, соединяющей любую точку кривой с ее первой последующей; мы *предположим*, что это не так; и, в самом деле, это обстоятельство не представится ни в одном из приложений, которые я имею в виду; в частности, оно не представится в случае инвариантной кривой, порожденной *асимптотической поверхностью*, как я это объяснил в конце предыдущего пункта. В самом деле, легко установить, что асимптотическая поверхность не содержит кривых, состоящих из двойных точек, если ограничиться частью этой поверхности, соответствующей малым значениям величин, которые я назвал выше $Ae^{\alpha t}$.

С другой стороны, прямая A_0B_0 не имеет двойной точки, и то же самое должно быть на ее последующей A_1B_1. В итоге мы можем предположить, что четыре стороны нашего четырехугольника не имеют двойной точки.

3. *Дуга A_0A_1 пересекает дугу B_0B_1*. (Этот случай содержит как частный случай тот, когда кривая K замкнута.) Тогда наши кривые имеют вид, представленный на рис. 3.

4. *Дуга A_0B_0 пересекает свою последующую A_1B_1*. В этом случае наши кривые будут иметь вид, представленный на рис. 4.

Имеются случаи, когда это предположение следует отбросить. Предположим, например, что X, Y, Z зависят от параметра μ, что при $\mu=0$ кривая K замкнута и что каждая из ее точек является своей собственной последующей, так что при $\mu=0$ четыре вершины четырехугольника совпадают.

Тогда четыре расстояния A_0B_0, A_1B_1, A_1A_0, B_1B_0 будут бесконечно малыми, если μ является основной бесконечно малой. Предположим, что A_1A_0 — бесконечно малая порядка p, A_0B_0 — бесконечно малая порядка q и что q больше p.

Так как A_1B_1 — последующая A_0B_0, то длина дуги A_1B_1 должна быть порядка q. Пусть тогда C — одна из точек пересечения дуги A_0B_0. В треугольнике, у которого две стороны — прямые A_1A_0 и A_0C, а третьей стороной является дуга кривой A_1C, составляющая часть A_1B_1, сторона A_1C больше разности двух других; следовательно, она должна быть порядка p, а мы видели, что она должна быть порядка q.

Следовательно, это предположение должно быть отброшено.

5. *Две смежные стороны четырехугольника пересекаются*, *например* A_1A_0 и A_1B_1. В этом случае необходимо, чтобы дуга A_0B_0, являющаяся предшествующей A_1B_1, сама пересекала K; если A_0' — точка пересечения A_0B_0 с K, а A_1' — точка пересечения A_1B_1 с дугой A_0A_1, то A_1' будет последующей A_0', и мы получим следующую фигуру (рис. 5).

Очевидно, что A_0' и A_1' могут играть ту же самую роль, что и A_0 и A_1, и что мы приходим снова к первому случаю.

Следовательно, это новое предположение должно быть отброшено. В итоге две дуги A_0A_1 и B_0B_1 будут пересекаться всякий раз, когда по той или иной причине предположения 2 и 4 должны быть отброшены.

Остается изучить случай, когда точки A_1, A_0, B_1, B_0 следуют на кривой K в другом порядке. Порядки $B_1B_0A_1A_0$, $B_0B_1A_0A_1$, $A_0A_1B_0B_1$ не отличаются существенным образом от того, который мы только что изучили.

Такие порядки, как $A_1B_1B_0A_0$, $A_1B_0B_1A_0$, $A_1B_0A_0B_1$, . . ., не представятся в последующих приложениях; в самом деле, мы всегда будем предполагать, что если μ — очень мало́, то расстояния A_0A_1 и B_0B_1 будут очень малы по сравнению с длиной дуг A_0MB_0 или A_1MB_1.

Остается порядок $A_1A_0B_0B_1$ или эквивалентные порядки; мы также не будем говорить о них; ясно, что если будет иметь место этот порядок, то на дуге A_0MB_0 будет существовать точка, являющаяся своей собственной последующей.

309. Предположим, например, что уравнения (1) допускают периодические решения

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t) \tag{6}$$

и асимптотические решения

$$x = \Phi_1(t), \qquad y = \Phi_2(t), \qquad z = \Phi_3(t). \tag{7}$$

Предположим, что уравнения (1) зависят от очень малого параметра μ и что X, Y, Z разложимы по степеням этого параметра.

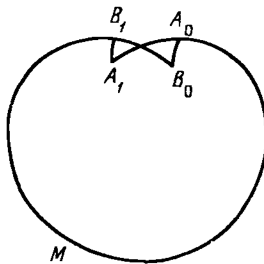


Рис. 3

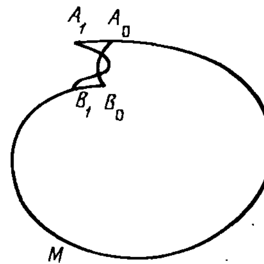


Рис. 4

Предположим, что при $\mu=0$ асимптотические решения (7) приводятся к периодическим решениям. Вот каким образом это может произойти. Мы сказали, что Φ_i разложимы по степеням $Ae^{\alpha t}$, причем коэффициенты будут периодическими функциями от t. Но показатель α зависит от μ; предположим, что он обращается в нуль при $\mu=0$; тогда при $\mu=0$ функции Φ_i станут периодическими функциями от t, а решения (7) сведутся к периодическим решениям.

Асимптотическая поверхность пересечет полуплоскость по некоторой кривой C_0, проходящей через точку M_0 — точку пересечения полуплоскости с пространственной кривой (6).

Кривая C_0, очевидно, инвариантна, как я сказал в конце п. 307; при $\mu=0$ каждая из точек C_0 является своей собственной последующей.

Кроме того, я предположу, что при $\mu=0$ кривая C_0 замкнута.

Обратимся к главе VII тома I; мы видели в п. 107 и следующих, что в случае динамики характеристические показатели разложимы по степеням $\sqrt{\mu}$ и притом попарно равны и противоположны по знаку. Мы предположим, что имеет место этот случай.

Тогда мы имеем в действительности две асимптотические поверхности, соответствующие двум равным и противоположным по знаку показателям α и $-\alpha$; следовательно, мы имеем две кривые C_0, которые пересекутся в точке M_0.

Будем различать четыре ветви кривой

$$C_0',\ C_0'',\ C_1',\ C_1'',$$

сходящиеся в точке M_0; C_0' и C_0'' будут соответствовать показателю α, C_1' и C_1'' — показателю $-\alpha$.

Эти различные ветви кривой представлены на рис. 6. Ветвью C_0' является ветвь $M_0P_0P_1A_0A_1$, ветвью C_0'' — ветвь $M_0E_0E_1$; ветвью C_1' является ветвь $M_0Q_1Q_0$ и ветвью C_1'' — ветвь $M_0R_1R_0B_1B_0$.

Эти четыре ветви кривой, очевидно, инвариантны.

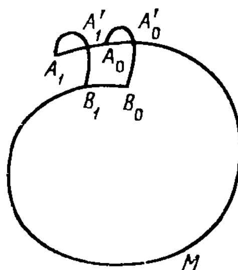


Рис. 5

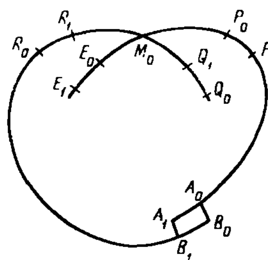


Рис. 6

Теперь, при $\mu=0$, C_0' сливается с C_1', C_0'' — с C_1'', и (если мы предположим, что при $\mu=0$ кривая C_0, которую мы назовем тогда C_0^0, замкнута) эти четыре ветви кривой совпадут с замкнутой кривой C_0^0.

Отсюда можно заключить, что для очень малого μ эти ветви кривой будут мало отличаться друг от друга; что C_0' будет мало отличаться от C_1'; C_0'' — от C_1'' и что если достаточно продолжить кривую C_0', то она пройдет очень близко от C_1'', если и ее достаточно продолжить.

Я отметил на рисунке различные точки этих ветвей кривой и их последующие. Так, A_1, B_1, E_1, P_1, Q_1, R_1 суть соответственно последующие точек A_0, B_0, E_0, P_0, Q_0, R_0.

Мы отметим сначала, что точки A_1, A_0, B_1, B_0 следуют одна за другой (как мы предположили в начале п. 308) в порядке $A_1A_0B_1B_0$, если обходить инвариантную кривую, образованную двумя ветвями C_0' и C_1'', от A_1 к B_0.

Эта инвариантная кривая не замкнута, но она мало отличается от замкнутой кривой C_0^0.

Рассмотрим пять предположений п. 308 относительно этой инвариантной кривой. Первое предположение, как мы видели, всегда следует отбрасывать. Второе также не будет иметь места. В самом деле, оно могло бы осуществиться лишь в том случае, если бы асимптотическая поверхность (7) имела линию, состоящую из двойных точек.

Мы сказали, что Φ_i разложимы по степеням $Ae^{\alpha t}$; итак, пусть

$$\Phi_i = \Phi_i^0 + Ae^{\alpha t}\Phi_i^1 + A^2e^{2\alpha t}\Phi_i^2 + \ldots .$$

Если бы наша поверхность имела линию двойных точек, то эта линия должна была бы удовлетворять уравнениям (1); действительно, асимптотическая поверхность порождена бесконечным числом линий, удовлетворяющих этим уравнениям, так что если два куска этой поверхности пересекаются, то пересечение не может быть не чем иным, как одной из этих линий.

Так как Φ_i зависит одновременно от времени t и от параметра A, то мы подчеркиваем это, записывая

$$\Phi_i = \Phi_i(t, A).$$

Если бы существовала линия двойных точек, то мы должны были бы иметь три тождества:

$$\Phi_i(t, A) = \Phi_i(t', B) \quad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

где A и B — две постоянные и где t' — функция от t; эти три тождества должны существовать, каково бы ни было t.

Дифференцируя, будем иметь

$$\frac{d\Phi_i}{dt} = \frac{d\Phi_i}{dt'}\frac{dt'}{dt}.$$

Но в силу уравнений (1) мы будем иметь

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = X\,[\Phi_1(t, A),\ \Phi_2(t, A),\ \Phi_3(t, A)]$$

и также

$$\frac{d\Phi_1}{dt'} = X\,[\Phi_1(t', B),\ \Phi_2(t', B),\ \Phi_3(t', B)],$$

откуда

$$\frac{d\Phi_i}{dt} = \frac{d\Phi_i}{dt'}, \qquad \frac{dt'}{dt} = 1,$$

откуда, наконец,

$$t' = t + h,$$

где h — постоянная.

Отсюда мы выводим, что

$$\Phi_i^0(t) + Ae^{\alpha t}\Phi_i^1(t) + A^2e^{2\alpha t}\Phi_i^2(t) + \ldots = \Phi_i^0(t+h) + Ce^{\alpha t}\Phi_i^1(t+h) + \ldots,$$

где

$$C = Be^{\alpha h}.$$

Это тождество должно быть справедливым при $t = -\infty$, откуда

$$Ae^{\alpha t} = Ce^{\alpha t} = 0$$

и

$$\Phi_i^0(t) = \Phi_i^0(t+h),$$

откуда $h=0$ и

$$\Phi_i^0(t) + Ae^{\alpha t}\Phi_i^1(t) + \ldots = \Phi_i^0(t) + Ce^{\alpha t}\Phi_i^1(t) + \ldots,$$

или

$$A\Phi_i^1(t) + A^2e^{\alpha t}\Phi_i^2(t) + \ldots = C\Phi_i^1(t) + C^2e^{\alpha t}\Phi_i^2(t) + \ldots,$$

или, полагая снова $t = -\infty$,

$$A = C = B.$$

Если оба значения A и B равны, то линии двойных точек не существует, что и требовалось доказать.

Третье предположение — то, которое следует принять.

Перейдем к четвертому; для того чтобы посмотреть, должно ли оно быть отброшено, необходимо постараться дать себе отчет о порядке величины расстояний A_1A_0 и A_0B_0; это мы и сделаем в различных приложениях, которые последуют в дальнейшем.

Наконец, пятое предположение всегда сводится к первому, как мы это видели.

Обобщение предыдущих результатов

310. Выше мы сделали об уравнениях (1) очень частные предположения, но не все они одинаково необходимы.

В самом деле, рассмотрим *односвязную* область D, составляющую часть полуплоскости ($y=0$, $x > 0$), и предположим, что мы каким-то образом узнали, что если точка (x, y, z) находится в начальный момент времени в точке M_0 этой области, то ω переходит от 0 к 2π, постоянно возрастая,

когда t возрастает от 0 до t_0, так что кривая, удовлетворяющая уравнениям (1) и проходящая через точку M_0, при ее продолжении от этой точки M_0 до ее нового пересечения с полуплоскостью никогда не будет касаться плоскости, проходящей через ось z.

Тогда мы сможем определить, как и в п. 305, последующую точки M_0, и ясно, что все предыдущее будет снова применимо к фигурам, находящимся внутри области D.

Кривые, удовлетворяющие уравнениям (1) и пересекающие полуплоскость вне области D, не обязаны подчиняться требованию не соприкасаться с плоскостью, проходящей через ось z. Также не обязательно, чтобы $x=y=0$ было решением уравнений (1).

Тогда если C_0 — замкнутая кривая внутри D и если C_1 — ее последующая, то обе кривые будут внешними относительно друг друга или пересекаться.

Результаты п. 308 будут равным образом применимы к инвариантным кривым, не выходящим из области D; и если даже инвариантная кривая выходит из области D при ее достаточном продолжении, то результаты будут снова приложимы к той части этой кривой, которая лежит внутри этой области.

311. Рассмотрим теперь вместо плоской области D односвязную криволинейную область S. Проведем через точку M_0 этой криволинейной области кривую γ, удовлетворяющую уравнениям (1), и продолжим эту кривую до тех пор, пока она снова не пересечет S; новая точка пересечения M_1 может быть опять названа последующей точки M_0.

Если мы рассмотрим две точки M_0 и M'_0, очень близкие друг к другу, то их последующие будут, вообще, очень близки друг к другу; исключение будет иметь место, если точка M_1 окажется на границе S или если кривая γ касается поверхности в точке M_1 или в точке M_0. Кроме этих исключительных случаев, координаты M_1 являются аналитическими функциями координат точки M_0.

Чтобы избежать этих исключительных случаев, я рассмотрю область D, составляющую часть S, и такую, что кривая γ, выходящая из точки M_0 внутри D, снова пересекает S в точке M_1, которая никогда не попадает на границу S; такую также, что кривая γ не касается S ни в точке M_0, ни в M_1. Наконец, я предположу, что область D односвязна.

Примем частную систему координат, которую я назову, например, ξ, η и ζ и о которой я предположу только следующее.

1. Когда $|\xi|$ и $|\eta|$ будут меньше 1, прямоугольные координаты x, y и z будут аналитическими и однозначными функциями от ξ, η и ζ, периодическими с периодом 2π относительно ζ.

2. Одной точке (x, y, z) пространства не может соответствовать более одной системы значений ξ, η, ζ, такой, что,

$$|\xi|<1, \quad |\eta|<1, \quad 0<\zeta<2\pi. \tag{λ}$$

3. При $\zeta=0$ или $\zeta=2\pi$ и изменении ξ и η от -1 до $+1$ точка x, y, z описывает поверхность S или часть этой поверхности, заключающую в себе область D.

4. Из условий (1) и (2) вытекает, что функциональный определитель Δ от ξ, η, ζ относительно x, y, z никогда не обращается ни в бесконечность, ни в нуль, когда выполняются неравенства (λ).

5. Можно преобразовать уравнения (1), приведя их к виду

$$\frac{d\xi}{dt}=\Xi, \quad \frac{d\eta}{dt}=H, \quad \frac{d\zeta}{dt}=Z^*. \tag{1bis}$$

Я предположу, что Z^* остается положительным для

$$|\xi|<1, \quad |\eta|<1, \quad \zeta=0.$$

Уравнения (1bis) будут допускать интегральный инвариант

$$\int \frac{M}{\Delta} d\xi d\eta d\zeta,$$

а уравнения

$$\frac{d\xi}{d\zeta}=\frac{\Xi}{Z^*}, \quad \frac{d\eta}{d\zeta}=\frac{H}{Z^*}, \quad \frac{d\zeta}{d\zeta}=1 \tag{3bis}$$

будут допускать интегральный инвариант

$$\int \frac{MZ^*}{\Delta} d\xi d\eta d\zeta.$$

Пусть F_0 — какая-нибудь фигура, составляющая часть D, и F_1 — ее последующая; предположим, что различные точки F_0 и F_1 смещаются таким образом, что ξ и η остаются постоянными и что ζ возрастает от 0 до ε, где ε — очень мало́; фигура F_0 породит объем Φ_0, а фигура F_1 — объем Φ_1; интеграл

$$\int \frac{MZ^*}{\Delta} d\xi d\eta d\zeta = \varepsilon \int \frac{MZ^*}{\Delta} d\xi d\eta$$

будет иметь одно и то же значение для Φ_0 и для Φ_1; следовательно, двойной интеграл

$$\int \frac{MZ^*}{\Delta} d\xi d\eta,$$

аналогичный интегралу (5) из п. 305, будет иметь одно и то же значение для F_0 и F_1. Кроме того, он существенно положителен.

Отсюда вытекает, что результаты п. 306 применимы к замкнутым кривым C_0, лежащим внутри D, и что результаты п. 308 приложимы к инвариантным кривым K или, по крайней мере, к части этих кривых, лежащих внутри D.

Даже если инвариантная кривая покидает область D при достаточном продолжении, результаты будут приложимы к части этой кривой, лежащей внутри этой области.

Приложение к уравнениям динамики

312. Пусть F — функция четырех переменных x_1, x_2, y_1, y_2; составим канонические уравнения

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i},\qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i}. \tag{1}$$

Я предположу, как я это обычно делаю, что:

1) F — периодическая функция от y_1 и y_2;

2) F зависит от параметра μ и разложима по степеням этого параметра в виде

$$F=F_0+\mu F_1+\mu^2F_2+\ldots;$$

3) F_0 — функция только от x_1 и x_2.

При этих условиях мы будем иметь интеграл

$$F=C, \tag{2}$$

где C — постоянная.

Установив это, дадим C значение, определенное раз навсегда, и пусть M — подвижная точка, прямоугольные координаты которой суть

$$[1+\varphi(x_1)\cos y_1]\cos y_2,\quad [1+\varphi(x_1)\cos y_1]\sin y_2,\quad \varphi(x_1)\sin y_1.$$

Функция $\varphi(x_1)$ — функция от x_1, которую я в дальнейшем определю более точно.

Предположим сначала, что F, которое будет зависеть каким-то образом от x_2, разложимо по возрастающим степеням $x_1\cos y_1$ и $x_1\sin y_1$. Отсюда следует, что при $x_1=0$ функция F не будет зависеть более от y_1 и, с другой стороны, что функция F не будет изменяться при замене x_1 на $-x_1$ и y_1 на $y_1+\pi$. Таким образом, мы предположим, что $\varphi(x_1)$ — *нечетная* функция от x_1, которая возрастает от 0 до 1, когда x_1 растет от 0 до $+\infty$; например, можно взять

$$\varphi(x_1)=\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}}.$$

Если принять это предположение, точка M всегда будет находиться внутри тора радиуса 1, касающегося оси z.

Каждой точке M внутри этого тора будет соответствовать бесконечное число систем значений x_1, y_1 и y_2; однако эти системы не будут существенно различаться между собой, поскольку они переходят друг в друга при увеличении y_1 или y_2 на кратное 2π или при замене x_1 на $-x_1$ и y_1 на $y_1+\pi$.

Если задать x_1, y_1 и y_2, то x_2 получится из них при помощи уравнения (2). Предположим, что переменные x и y меняются согласно уравнениям (1); тогда соответствующая точка M опишет некоторую кривую, которую я назову *траекторией*.

Через каждую точку внутри тора проходит одна и только одна траектория.

Легко видеть, каков вид этих траекторий при $\mu=0$.

При $\mu=0$ дифференциальные уравнения сводятся к следующим:

$$\frac{dx_i}{dt}=0, \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF_0}{dx_i}.$$

Следовательно, x_i — постоянные, что показывает, что наши траектории расположены на торах и что y_i — линейные функции времени; ибо производная

$$-\frac{dF_0}{dx_i}=n_i,$$

зависящая только от x_i, есть постоянная.

Если n_1 и n_2 — соизмеримы, то траектории суть замкнутые кривые, они, наоборот, не замкнуты, если эти величины несоизмеримы.

Пусть m_1, m_2, p_1, p_2 — четыре таких целых числа, что

$$m_1p_2-m_2p_1=1;$$

положим

$$y_1'=m_1y_1+m_2y_2,$$
$$y_2'=p_1y_1+p_2y_2,$$
$$x_1'=p_2x_1-p_1x_2,$$
$$x_2'=-m_2x_1+m_1x_2.$$

Тождество

$$x_1'y_1'+x_2'y_2'=x_1y_1+x_2y_2$$

показывает, что при переходе от переменных x_i, y_i к переменным x_i', y_i' мы не изменяем канонической формы уравнений.

Предположим, что n_2 не обращается в нуль, когда x_1 остается меньше некоторого предела a. Тогда dy_2/dt всегда будет сохранять один и тот же знак, и мы будем иметь, например,

$$\frac{dy_2}{dt}>0.$$

Это неравенство, верное при $\mu=0$, будет верным также при малых значениях μ.

В таком случае соотношения

$$y_2=0, \qquad |x_1|<a-\varepsilon$$

определят некоторую плоскую область D, которая притом будет иметь форму круга.

Тогда траектории, выходящие из точки этой области, никогда не будут касаться плоскости, проходящей через ось z, по крайней мере, до нового пересечения с полуплоскостью $y_2=0$.

Следовательно, наша область сможет играть роль области D из п. 310.

Уравнения (1) допускают интегральный инвариант

$$\int dx_1 dx_2 dy_1 dy_2,$$

откуда мы выводим следующий интегральный инвариант при помощи интеграла $F=\text{const}$:

$$J=-\int \frac{dx_1 dy_1 dy_2}{\frac{dF}{dx_2}}.$$

Но производная dF/dx_2 равна $-dy_2/dt$ и, следовательно, отрицательна. В таком случае инвариант J является положительным инвариантом.

Результаты пунктов 306 и 308 применимы, следовательно, к кривым, проведенным в области D.

При этих предположениях пусть b — значение x_1, меньшее $a-\varepsilon$, и такое, что соответствующие значения n_1 и n_2 удовлетворяют соотношению

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0,$$

где m_1 и m_2 — два целых взаимно простых числа.

Кривая

$$x_1=b,$$

являющаяся окружностью, будет инвариантной кривой при $\mu=0$.

Предполагая опять $\mu=0$, получим для траекторий, выходящих из различных точек этой окружности, общее уравнение

$$y_1=n_1 t+\text{const}, \quad y_2=n_2 t+\text{const},$$

откуда

$$y_1=\frac{n_1}{n_2} y_2+\text{const}.$$

Для того чтобы получить последовательные последующие заданной точки, достаточно положить последовательно

$$y_2=0, \quad y_2=2\pi, \quad y_2=4\pi, \ \ldots, \ y_2=2k\pi.$$

Чтобы перейти от точки к ее последующей, достаточно, следовательно, увеличить y_1 на

$$\frac{2\pi n_1}{n_2}=-\frac{2\pi m_2}{m_1},$$

откуда следует, что все точки инвариантной окружности $x_1=b$ совпадут с их m_1-й последующей.

Эта точка и ее m_1-1 первых последующих распределены на этой окружности в круговом порядке, который легко восстановить, зная два целых числа m_1 и m_2; я назову этот порядок Ω.

Не будем предполагать более, что $\mu=0$; уравнения (1), согласно главе III, снова будут допускать периодические решения, мало отличающиеся от решений

$$x_1=b,\quad y_1=n_1t+\text{const},\quad y_2=n_2t+\text{const}.$$

Они допускают, по крайней мере, два таких решения, из которых одно неустойчиво, а другое устойчиво. Каждому из этих периодических решений будет соответствовать замкнутая траектория; я рассматриваю одну из этих траекторий, которую обозначаю T и которую буду считать соответствующей неустойчивому решению, с тем, чтобы через T проходили две асимптотические поверхности.

Пусть M_0 — точка, в которой эта траектория пересекает полуплоскость $y_2=0$, M_1, M_2, ... — ее последовательные последующие (рис. 7). Точка M_0 совпадет со своей m_1-й последующей M_{m_1}.

Я соединяю точку M_k с центром окружности $x_1=b$; проведенный таким образом радиус пересекает окружность в точке M'_k, очень близкой к M_k.

Различные точки M'_k будут следовать на окружности в круговом порядке Ω.

Я сделал рисунок, предполагая для определенности, что $m_1=5$, $m_2=2$.

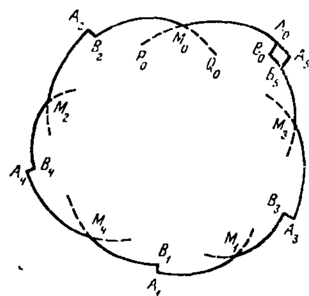


Рис. 7

Замкнутая траектория T пересекает полуплоскость в пяти точках M_0, M_1, M_2, M_3, M_4. Через эту траекторию проходят две пересекающиеся асимптотические поверхности.

Пересечение этих асимптотических поверхностей с полуплоскостью будет состоять из различных кривых; мы будем иметь две кривые, пересекающиеся в M_0, две — в M_1, две — в M_2, две — в M_3, две — в M_4. Все эти кривые представлены на рисунке.

Рассмотрим, в частности, две кривые, проходящие через M_0; будем различать четыре ветви кривой, а именно, M_0A_0, M_0B_2, M_0P_0, M_0Q_0; две первые представлены сплошной линией, две последние — пунктиром; первая и третья, так же как вторая и четвертая, лежат на продолжении друг друга.

Аналогично, в каждую из точек M входят четыре ветви кривой, из которых две представлены сплошной линией, а две — пунктиром, и которые лежат попарно на продолжении друг друга.

Пусть A_0 — точка ветви M_0B_0; проведем через A_0 радиус, идущий к центру окружности $x_1=b$, и продолжим этот радиус до пересечения его в точке

B_0 с кривой, изображенной сплошной линией M_3B_0. Так как μ очень мало́ и все наши кривые мало отличаются от окружности $x_1=b$, отрезок A_0B_0 будет очень малым.

Тогда мы видим, что M_1A_1, M_2A_2, M_3A_3, M_4A_4, M_0A_5 являются последовательными последующими M_0A_0; что M_4B_1, M_0B_2, M_1B_3, M_2B_4, M_3B_5 есть последующие M_3B_0 и, наконец, что A_1B_1, A_2B_2, . . ., A_5B_5 — последующие A_0B_0.

Дуги A_1B_1, A_2B_2, . . ., A_5B_5, вообще, более не прямолинейны, а являются очень малыми дугами кривой.

Часть фигуры, состоящая из сплошной линии, воспроизводит рис. 1 или 2 из п. 308, а множество сплошных кривых представляет инвариантную кривую K.

Я сделал рисунок при первом предположении, которое, как мы видели, должно быть отброшено, так же как и пятое; согласно сказанному в п. 309, то же относится и ко второму предположению.

Четвертое предположение необходимо изучить более детально. Для этого найдем уравнение асимптотических поверхностей. Согласно тому, что мы видели в п. 207, это уравнение можно получить следующим образом.

Построим функцию S, разложимую по степеням $\sqrt{\mu}$ так, что

$$S=S_0+\sqrt{\mu}\,S_1+\ldots+\mu^{\frac{p}{2}}S_p+\ldots.$$

Что касается S_p, то это периодическая функция с периодом 2π относительно y'_2 и с периодом 4π по y'_1.

Далее мы имеем

$$\begin{gathered}x'_1=\frac{dS}{dy'_1},\qquad x'_2=\frac{dS}{dy'_2},\\ x_1=m_1\frac{dS}{dy'_1}+m_2\frac{dS}{dy'_2}.\end{gathered}\tag{4}$$

Уравнение (4) является уравнением асимптотической поверхности. Если бы ряд S сходился, то из периодичности S_p следовало, что кривые должны быть замкнуты, а две точки A_0 и B_0 совпали бы. Но это не так (см. п. 225 и след.).

Что же означает тогда уравнение (4)? Оно может быть верным только с формальной точки зрения, т. е. если Σ_p есть сумма $p+1$ первых членов ряда S так, что

$$\Sigma_p=S_0+\sqrt{\mu}\,S_1+\ldots+\mu^{\frac{p}{2}}S_p,$$

то уравнение

$$x_1=m_1\frac{d\Sigma_p}{dy'_1}+m_2\frac{d\Sigma_p}{dy'_2}\tag{4bis}$$

будет верным с точностью до величин порядка $\mu^{\frac{p+1}{2}}$.

Но уравнение (4bis) представляет замкнутую поверхность, а p — сколь угодно велико.

Следовательно, мы должны заключить, что расстояние A_0B_0 — бесконечно малая бесконечно высокого порядка (см. п. 225 и след.). С другой стороны, расстояние A_0A_5 (или B_0B_5) имеет порядок $\sqrt{\mu}$ и, следовательно, есть бесконечно малая порядка $^1/_2$.

Итак, расстояние A_0B_0 бесконечно мало по отношению к A_0A_1, что показывает, что четвертое предположение должно быть отброшено.

Следовательно, единственным возможным предположением является третье.

Итак, две дуги A_0B_5 и B_0B_5 пересекаются.

Приложение к ограниченной задаче

313. Я применю сейчас предыдущие принципы к задаче п. 9 и приму обозначения этого пункта; мы будем иметь, следовательно, канонические уравнения

$$\frac{dx_i'}{dt}=\frac{dF'}{dy_i'},\qquad \frac{dy_i'}{dt}=-\frac{dF'}{dx_i'},$$

где мы положили

$$\begin{aligned} x_1'&=L, & x_2'&=G,\\ y_1'&=l, & y_2'&=g-t, \end{aligned}\tag{5}$$

и, с другой стороны,

$$F'=R+G=F_0+\mu F_1+\ldots,$$

$$F_0=\frac{1}{2x_1'^2}+x_2'.$$

Положим теперь

$$\begin{aligned} x_1&=L-G, & x_2&=L+G,\\ 2y_1&=l-g+t, & 2y_2&=l+g-t; \end{aligned}$$

уравнения сохранят каноническую форму и примут вид

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF'}{dy_i},\qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF'}{dx_i},$$

кроме того, будем иметь

$$F_0=\frac{2}{(x_1+x_2)^2}+\frac{x_2-x_1}{2},$$

откуда

$$n_1=\frac{+4}{(x_1+x_2)^3}+\frac{1}{2},\qquad n_2=\frac{+4}{(x_1+x_2)^3}-\frac{1}{2}.$$

Если мы предположим, что эксцентриситет очень мал, то L и G будут очень мало отличаться по абсолютной величине; следовательно, одно из двух количеств x_1 и x_2 очень мало́.

Я замечаю, кроме того, что равенства

$$L = \sqrt{a}, \quad G = \sqrt{a(1-e^2)}$$

показывают, что G всегда меньше L по абсолютной величине. Следовательно, x_1 и x_2 существенно положительны.

Предположим, что x_1 очень мало́; функция F' будет функцией a и $l+g-t$, разложимой, кроме того, по степеням $e\cos g$ и $e\sin g$. Следовательно, она будет также функцией x_2 и y_2, разложимой, кроме того, по степеням

$$\sqrt{x_1}\cos y_1 \quad \text{и} \quad \sqrt{x_1}\sin y_1.$$

Она будет периодической с периодом 2π как по y_1, так и по y_2.

Если, наоборот, x_2 очень мало́, то функция F' будет функцией x_1 и y_1, разложимой, кроме того, по степеням

$$\sqrt{x_2}\cos y_2 \quad \text{и} \quad \sqrt{x_2}\sin y_2.$$

Но мы предполагаем, что четыре переменные x и y связаны уравнением живых сил

$$F = C;$$

это уравнение приближенно приводится к

$$F_0 = C.$$

Построим кривую $F_0 = C$, принимая x_1 и x_2 в качестве координат точки на плоскости.

Уравнение это можно записать в виде

$$(x_1 + x_2)^2 (2C + x_1 - x_2) = 4.$$

Эта кривая имеет две асимптоты

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_2 - x_1 = 2C$$

и симметрична относительно первой из этих двух асимптот.

Но важно заметить, что единственная часть кривой, которая нам полезна, расположена в первом квадранте

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0.$$

В зависимости от значений C кривая может представлять одну из форм, изображенных на рис. 8 и 9.

Оси координат представлены штрих-пунктиром, асимптоты и полезные части кривой — сплошной линией, ненужные части кривой — пунктирной линией.

Предположим, что C дано такое значение, что кривая имеет форму, представленную рис. 9, и что она содержит две полезные дуги AB и CD. При этом рассмотрим только дугу AB.

Заметим, что при обходе дуги AB x_1 монотонно убывает от OA до нуля, x_2 монотонно возрастает от нуля до OB, а x_2/x_1 монотонно возрастает от нуля до $+\infty$.

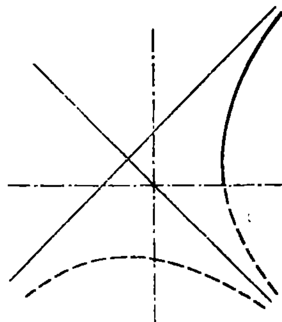
Если мы построим теперь кривую $F=C$, считая y_1 и y_2 постоянными, а x_1 и x_2 — координатами точки на плоскости, то кривая будет мало отличаться от $F_0=C$, и мы сможем снова представлять ее на рис. 9; она будет иметь полезную дугу AB, и при обходе этой дуги отношение x_2/x_1 будет монотонно возрастать от нуля до $+\infty$.

Так мы приходим к следующему способу геометрического представления: представим положение системы точкой, прямоугольные координаты которой есть

$$\frac{\sqrt{x_2}\cos y_2}{\sqrt{x_2+4x_1-2\sqrt{x_1}\cos y_1}}, \quad \frac{\sqrt{x_2}\sin y_2}{\sqrt{x_2+4x_1-2\sqrt{x_1}\cos y_1}},$$

$$\frac{2\sqrt{x_1}\sin y_1}{\sqrt{x_2+4x_1-2\sqrt{x_1}\cos y_1}};$$

эти три функции разложимы по степеням $\sqrt{x_1}\cos y_1$ и $\sqrt{x_1}\sin y_1$, если x_1


Рис. 8

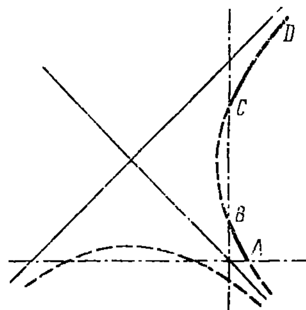


Рис. 9

очень мало́, и по степеням $\sqrt{x_2}\cos y_2$ и $\sqrt{x_2}\sin y_2$, если x_2 очень мало́. Они зависят только от отношения x_1/x_2.

Каждой системе значений y_1 и y_2 и каждой точке полезной дуги AB соответствует, таким образом, одна и только одна точка пространства.

Функциональный определитель от трех координат относительно y_1, y_2 и отношения $\sqrt{x_1/x_2}$ всегда сохраняет один и тот же знак.

Следовательно, мы можем применить результаты предыдущего пункта внутри всей области D, где n_2 не обращается в нуль.

Но n_2 обращается в нуль при $x_1+x_2=2$.

Однако если $x_1+x_2=2$, $x_1>0$, $x_2>0$, то мы, очевидно, будем иметь

$$\frac{2}{(x_1+x_2)^2}+\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{2}{(x_1+x_2)^2}+\frac{x_2+x_1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Но левая часть этого равенства есть F_0, а строя кривую $F_0=C$, мы предположили, что имеют место условия случая, соответствующего рис. 9; в случае же рис. 9 предполагается, что

$$C>\frac{3}{2}.$$

Поскольку F_0 очень мало отличается от F и, следовательно, от C, то мы не можем иметь одновременно

$$C>\frac{3}{2}, \quad F<\frac{3}{2}$$

(если только C не очень близко к своему пределу $^3/_2$, чего мы не предполагаем).

Следовательно, при наших условиях мы не будем иметь $n_2=0$.

Итак, результаты предыдущего пункта применимы, и если построить асимптотические поверхности и рассмотреть пересечение этих поверхностей с полуплоскостью $y_2=0$, то две дуги, аналогичные дугам, названным нами выше A_0A_5 и B_0B_5, пересекаются.

Я добавлю еще несколько слов.

Координаты третьего тела относительно большой и малой оси описываемого им эллипса согласно известной формуле суть

$$L^2(\cos l+\ldots),$$
$$LG(\sin l+\ldots).$$

Таким образом, мы видим, что когда G меняет знак, вторая из этих координат меняет знак.

Отсюда вытекает, что возмущаемая планета обращается в том же направлении, что и возмущающая планета, если G положительно, и в противоположном направлении, если G отрицательно.

Глава XXVIII

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

314. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где X_i — функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и t, периодические с периодом T относительно t.

Пусть

$$x_i = \varphi_i(t) \tag{2}$$

— периодическое решение с периодом T уравнений (1).

Мы сейчас посмотрим, допускают ли уравнения (1) другие периодические решения, близкие к (2), период которых кратен T.

Эти решения, если они существуют, будут называться *периодическими решениями второго рода.*

Рассмотрим решение уравнений (1), очень близкое к (2). Пусть

$$\varphi_i(0) + \beta_i$$

— значение x_i при $t=0$ и

$$\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i = \varphi_i(kT) + \beta_i + \psi_i$$

— значение x_i при $t=kT$ (k — целое).

Величины β_i и ψ_i, определение которых, таким образом, то же, что и в главе III, будут очень малы, и, как в главе III, мы увидим, что ψ — функции от β, разложимые по возрастающим степеням β.

Для того чтобы решение было периодическим с периодом kT, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0. \tag{3}$$

Так как $\varphi_i(t)$ — периодические функции, то ψ обращаются в нуль вместе с β.

Предположим, что функции X_i, фигурирующие в уравнениях (1), зависят от некоторого параметра μ. Тогда функции $\varphi_i(t)$ будут зависеть не

только от t, но и от μ; относительно t они будут периодическими с периодом T, где T — постоянная, не зависящая от μ.

При этих условиях функции ψ, определение которых остается тем же самым, будут зависеть не только от β, но и от μ. Если мы будем считать

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \mu$$

координатами точки в пространстве $n+1$ измерений, то уравнения (3) представят кривую в этом пространстве. Каждой точке этой кривой будет соответствовать периодическое решение с периодом kT.

Поскольку все ψ обращаются в нуль, когда все величины β одновременно обращаются в нуль, то эта кривая будет содержать прямую

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0. \tag{4}$$

Различным точкам этой прямой будет соответствовать решение (2), которое, будучи периодическим решением с периодом T, является периодическим решением с периодом kT.

Но мы должны поставить вопрос, существуют ли другие периодические решения, близкие к первому, или, другими словами, содержит ли кривая (3), кроме прямой (4), другие ветви кривой, приближающиеся очень близко к прямой (4)?

Другими словами, имеются ли точки прямой (4), через которые проходят ветви кривой (3), отличные от этой прямой?

Пусть

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0, \qquad \mu = \mu_0$$

— точка P прямой (4).

Для того чтобы через точку P проходило несколько ветвей кривой, *необходимо, чтобы в этой точке P функциональный определитель, или якобиан, величин ψ относительно β обращался в нуль.*

Как мы увидим дальше, это условие не является достаточным для того, чтобы через точку P проходило несколько действительных ветвей кривой.

Составим определитель от величин ψ по β, прибавим $-S$ ко всем членам на главной диагонали и приравняем полученный таким образом определитель нулю. Мы получим уравнение, известное под названием *S-уравнения*.

Корни этого уравнения (см. п. 60) суть

$$e^{k\alpha T} - 1,$$

где α — один из характеристических показателей уравнения (1).

Для того чтобы функциональный определитель был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы один из корней был равен нулю; следовательно, необходимо иметь

$$e^{k\alpha T} = 1,$$

что означает, что $k\alpha T$ есть кратное $2i\pi$.

Итак, чтобы через точку P проходило несколько ветвей кривой, необходимо, чтобы один из характеристических показателей был кратным $2i\pi/kT$.

315. Это условие не достаточно, и требуется более полное исследование. Положим

$$\mu = \mu_0 + \lambda$$

и попытаемся разложить величины β по целым или дробным степеням λ.

Мы предполагаем, что якобиан величин ψ относительно β равен нулю; этот якобиан обращается в нуль при $\lambda=0$, но вообще не будет тождественным нулем; для этого необходимо было бы, чтобы один из характеристических показателей был постоянным, не зависящим от μ и равным кратному $2i\pi/kT$.

Следовательно, мы предположим, что якобиан обращается в нуль при $\lambda=0$, но что его производная по λ в нуль не обращается.

Мы также предположим сначала, что миноры первого порядка этого якобиана не обращаются в нуль все одновременно.

В этом случае в силу теоремы п. 30 из $n-1$ уравнений (3) можно найти $n-1$ величин β в виде рядов, расположенных по целым степеням λ и n-й величины β, например β_n.

В n-е уравнение (3) подставим значения

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1},$$

найденные таким образом. Левая часть этого n-го уравнения окажется, таким образом, разложенной по степеням λ и β_n; запишем ее в форме

$$\Theta(\lambda, \beta_n) = 0.$$

Я замечаю сначала, что Θ должно делиться на β_n, так как прямая (4) должна составлять часть кривой (3).

С другой стороны, производная Θ по β_n должна обратиться в нуль при $\lambda=0$, поскольку якобиан обращается в нуль. При $\lambda=0$ Θ не содержит, следовательно, члена первой степени; предположим, что она также не содержит членов второй, . . ., $(p-1)$-й степени, но содержит член степени p.

Наконец, так как производная якобиана по λ не обращается в нуль, то мы будем иметь член с $\lambda\beta_n$.

Таким образом, я могу написать

$$\Theta = A\lambda\beta_n + B\beta_n^p + C,$$

где C — совокупность членов, содержащих множителем β_n^{p+1}, $\lambda\beta_n^2$ или $\lambda^2\beta_n$; A и B — постоянные коэффициенты, не равные нулю.

Мы видим, что отсюда можно получить β_n в виде ряда, расположенного по степеням $\lambda^{\frac{1}{p-1}}$, и вопрос заключается в том, чтобы установить, является ли этот ряд вещественным.

Если p — четное или если при нечетном p коэффициенты A и B имеют противоположные знаки, то ряд вещественный, и периодические решения второго рода существуют.

Если p — нечетное и если A и B одного знака, то ряд мнимый, и периодических решений второго рода нет.

Теперь я предполагаю, что не только якобиан, но и его миноры первого, второго,. . ., $(p-1)$-го порядков обращаются в нуль при $\lambda=0$. Однако я предполагаю, что миноры p-го порядка не обращаются в нуль все одновременно.

При этих условиях, согласно п. 57, мы будем иметь не один, а p характеристических показателей, которые будут кратны $2i\pi/kT$.

Тогда из $n-p$ уравнений (3) можно будет найти $n-p$ величин β в виде рядов, расположенных по степеням λ и p остальных величин β.

Для краткости я обозначу $n-p$ первых количеств β через β', а p остальных количеств β — через β''. Следовательно, мы будем иметь β' разложенными по степеням λ и β''.

Подставим эти разложения вместо β' в p последних уравнений (3), тогда получим p уравнений

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \ldots = \Theta_p = 0, \tag{5}$$

левые части которых будут разложимы по степеням λ и β''.

Поскольку якобиан и его миноры $p-1$ первых порядков равны нулю, эти левые части не будут содержать членов первой степени относительно β'', не зависящих от λ.

Пусть θ_i — совокупность членов Θ первой степени относительно β''; ясно, что θ_i можно будет разложить по степеням λ; пусть

$$\theta_i = \theta_i^{(0)} + \lambda\theta_i^{(1)} + \lambda^2\theta_i^{(2)} + \ldots$$

- это разложение; $\theta_i^{(k)}$ будут однородными полиномами первой степени относительно β''.

Согласно предыдущему, $\theta_i^{(0)}$ будет тождественным нулем; но необходимо посмотреть, не будет ли таким же $\theta_i^{(1)}$.

Якобиан величин ψ относительно β равен

$$\prod (1 - e^{k\alpha T}),$$

причем произведение, обозначенное знаком $\prod$, распространяется на n сомножителей, соответствующих n характеристическим показателям α.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n$ — эти n показателей и пусть

$$\varphi(\alpha) = (1 - e^{k\alpha T});$$

якобиан будет равен произведению

$$\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n).$$

При $\lambda=0$ якобиан, так же как его миноры $p-1$ первых порядков, обращается в нуль; отсюда вытекает, что p показателей кратны $2i\pi/kT$. Таким образом, p множителей $\varphi(\alpha)$ при $\lambda=0$ обращаются в нуль, и, следовательно, делятся на λ. Произведение их, т. е. якобиан, будет, следовательно, делиться на λ^p.

Предположим, что при $\lambda=0$ ни одна производная $d\alpha/d\lambda$ не обращается в нуль, что мы уже предположили выше. При этих условиях ни одно $\varphi(\alpha)$ не делится на λ^2. Следовательно, произведение не делится на λ^{p+1}.

Итак, якобиан делится на λ^p, но не на λ^{p+1}.

Отсюда вытекает, что определитель величин $\theta_i^{(1)}$ отличен от нуля и, следовательно, ни одна из величин $\theta_i^{(1)}$ не обращается тождественно в нуль.

Наиболее простым случаем является тот, когда при $\lambda=0$ члены второй степени не исчезают в Θ_i и когда эти члены второй степени не могут обратиться в нуль одновременно, если только все β'' не обращаются в нуль одновременно.

Пусть тогда η_i — совокупность членов второй степени из Θ_i при $\lambda=0$.

Тогда будет достаточно рассмотреть алгебраические уравнения

$$\eta_i+\lambda\theta_i^{(1)}=0,$$

левые части которых суть однородные полиномы второй степени относительно λ и величин β''.

Если эти уравнения допускают вещественные решения, мы будем иметь периодические решения второго рода.

Я не буду рассматривать другие случаи, имея в виду сделать это полностью для уравнений динамики.

Случай, когда время не входит явно

316. Предположим, что функции X_i, фигурирующие в уравнениях (1), не зависят от времени t.

В этом случае, как мы это видели в п. 61, один из характеристических показателей всегда равен нулю.

С другой стороны, если

$$x_i=\varphi_i(t)$$

— периодическое решение с периодом T, то таким же будет

$$x_i=\varphi_i(t+h),$$

какова бы ни была постоянная h.

В предыдущем пункте мы предполагали, что, каково бы ни было μ, существует периодическое решение

$$x_i = \varphi_i(t),$$

и период мог быть равен только T, поскольку X_i были периодическими функциями t с периодом T.

Таким образом, период не зависел от μ.

Здесь это уже не так. Мы всегда будем предполагать, что, каково бы ни было μ, уравнения (1) допускают периодическое решение

$$x_i = \varphi_i(t).$$

Но период будет, вообще говоря, зависеть от μ. Я назову T периодом, а T_0 — значением T при $\mu = \mu_0$, т. е. при $\lambda = 0$.

Тогда мы изменим слегка определение количеств β и ψ.

Обозначим снова через $\varphi_i(0) + \beta_i$ значение x_i при $t = 0$; но $\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i$ представит значение x_i при $t = k(T + \tau)$ (а не при $t = kT$).

В этом случае ψ_i будут функциями $n+2$ переменных

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \tau, \lambda.$$

Если продолжать считать β и λ координатами точки в пространстве $n+1$ измерений, то уравнения (3) п. 314

$$\psi_i = 0$$

будут представлять не кривую, а поверхность, поскольку мы можем менять независимым и непрерывным образом два параметра τ и λ.

Но важно заметить, что на этой поверхности проведены кривые, различные точки которых соответствуют периодическим решениям, которые нельзя считать существенно различными.

В самом деле, если

$$x_i = f_i(t)$$

— периодическое решение, то таким же будет

$$x_i = f_i(t + h),$$

какова бы ни была постоянная h, и это новое решение на самом деле не будет отличаться от первого.

Первому решению соответствует точка

$$\beta_i = f_i(0) - \varphi_i(0),$$

а второму — точка

$$\beta_i = f_i(h) - \varphi_i(0).$$

Когда h изменяется непрерывным образом, вторая точка описывает кривую, различные точки которой не соответствуют, следовательно, действительно разным решениям.

В частности, рассмотрим решение

$$x_i = \varphi_i(t).$$

Этому решению будет соответствовать точка

$$\beta_i = 0,$$

которая принадлежит прямой (4).

Решению

$$x_i = \varphi_i(t+h),$$

которое не отличается в действительности от первого, будет соответствовать точка

$$\beta_i = \varphi_i(h) - \varphi_i(0), \tag{4bis}$$

принадлежащая некоторой поверхности (4bis), составляющей часть поверхности (3).

Речь идет о том, чтобы узнать, содержит ли поверхность (3) другие ветви, кроме (4bis), и такие, которые очень близки к (4bis); т. е. существуют ли на поверхности (4bis) точки, через которые проходят другие ветви поверхности (3), кроме самой поверхности (4bis).

Без ограничения общности мы сможем предположить, что $\beta_1=0$ (или принять другое произвольное соотношение между величинами β).

Действительно, решения

$$x_i = f_i(t), \qquad x_i = f_i(t+h)$$

на самом деле не отличаются друг от друга, и будет достаточно рассмотреть одно из них.

Таким образом, мы можем выбрать произвольно постоянную h; и мы можем сделать это, например, так, чтобы

$$f_1(h) = \varphi_1(0),$$

откуда

$$\beta_1 = 0,$$

что и требовалось доказать.

Если мы примем условие $\beta_1=0$, то две поверхности (3) и (4bis) сведутся к кривым и, в частности, поверхность (4bis) сведется к прямой (4).

Мы снова приходим к исследованию того, проходит ли через точку прямой (4) другая ветвь кривой (3).

Для этого составим комбинацию уравнения $\beta_1=0$ с уравнениями (3); эти уравнения представят кривую (3) или же кривую, частью которой

будет кривая (3). Для того чтобы эта кривая не сводилась в рассматриваемой области к прямой (4), необходимо, чтобы якобианы величин ψ_1, ψ_2, ..., ψ_n, β_1 относительно β_1, β_2, ..., β_n, τ и якобиан от ψ_1, ψ_2, ..., ψ_n относительно β_2, β_3, ..., β_n, τ были равны нулю при $\lambda=0$.

Поскольку β_1 ничем не отличаются от остальных β, то все якобианы величин ψ относительно τ и $n-1$ любых β должны обращаться в нуль, т. е. все определители, содержащиеся в матрице пунктов 38 и 63, должны одновременно обращаться в нуль. Рассуждая так же, как в п. 63, мы увидим, что S-уравнение должно иметь два нулевых корня.

Отсюда вытекает, что два характеристических показателя должны быть кратными $2i\pi/kT$. Это уже справедливо для одного из них, равного нулю. Второй показатель должен быть кратным $2i\pi/kT$.

Если это условие выполняется, то мы составим систему $n+1$ уравнений, содержащую уравнения (3) и $\beta_1=0$. Из нее найдем τ и величины β в виде рядов, расположенных по целым и дробным степеням λ.

Если эти ряды вещественны, то будут существовать периодические решения второго рода; если ряды комплексные, то таких решений не будет.

Я не буду развивать это более подробно.

317. Предположим теперь, что уравнения

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i, \tag{1}$$

в которые время входит явно, допускают однозначный интеграл

$$F=C,$$

так что мы имеем

$$\sum\frac{dF}{dx_i}X_i=0.$$

Мы видели в п. 64, что в этом случае якобиан величин относительно ψ обращается в нуль и что один из характеристических показателей равен нулю.

Уравнения (3) п. 314

$$\psi_1=\psi_2=\ldots=\psi_n=0$$

в таком случае не являются независимыми, поскольку мы имеем тождественно

$$F[\varphi_i(0)+\beta_i+\psi_i]-F[\varphi_i(0)+\beta_i]=0.$$

Таким образом, они представляют не кривую, а поверхность.

Но в этом случае согласно принципам главы III мы имеем ∞^2 периодических решений с периодом T

$$x_i=\varphi_i(t),$$

поскольку каждому значению параметра $\mu = \mu_0 + \lambda$ и каждому значению постоянной C соответствует одно периодическое решение. Условимся придавать постоянной C определенное значение C_0 и получим только ∞^1 периодических решений с периодом T

$$x_i = \varphi_i(t),$$

каждое из которых соответствует одному значению λ.

Так как уравнения (3) не являются независимыми, то они могут быть заменены $n-1$ из их числа, например, следующими:

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_{n-1} = 0.$$

Рассмотрим тогда систему

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_{n-1} = 0, \qquad F[\varphi_i(0) + \beta_i] = C_0. \tag{3bis}$$

Уравнения (3bis) представляют уже не поверхность, а кривую, частью которой является прямая

$$\beta_i = 0. \tag{4}$$

Для того чтобы через точку прямой (4) проходила другая ветвь кривой, необходимо, чтобы якобиан величин

$$\psi_1, \ \psi_2, \ \ldots, \ \psi_{n-1}, \ F$$

относительно β обращался в нуль.

Это условие можно представить еще и в другой форме.

Предположим, что мы разрешили уравнение

$$F(x_i) = C_0$$

относительно x_n, и это решение дает

$$x_n = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Подставим θ вместо x_n в X_i, и пусть X'_i — результат этой подстановки. Таким образом, уравнения (1) окажутся замененными следующими:

$$\frac{dx_i}{dt} = X'_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{1bis}$$

Эти уравнения (1bis) будут допускать периодическое решение

$$x_i = \varphi_i(t).$$

Число характеристических показателей этого периодического решения, рассматриваемого как решение уравнений (1bis), будет равно $n-1$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ — эти $n-1$ показателей. Они будут теми же, что

и показатели этого периодического решения $x_i=\varphi_i(t)$, рассматриваемого как решение уравнений (1), исключая тот из n показателей, который равен нулю.

Для того чтобы в окрестности точки прямой (4) уравнения (1) допускали периодические решения второго рода, необходимо и достаточно, чтобы их допускали уравнения (1bis), т. е. чтобы в точке прямой (4) один из $n-1$ характеристических показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ был кратным $2i\pi/kT$.

Таким образом, условие, сформулированное выше, что якобиан величин $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}, F$ равен нулю, допускает совершенно иную формулировку. Для того чтобы оно выполнялось, необходимо, чтобы два показателя были кратными $2i\pi/kT$; это всегда справедливо для одного из них, равного нулю; это должно быть верным и для второго показателя.

Предположим, что это условие выполнено. Из уравнений (3bis) найдем β в виде рядов, расположенных по целым и дробным степеням λ.

Я не буду выяснять, являются ли эти ряды вещественными.

318. Предположим теперь, что X_i не зависят явно от времени и что уравнения (1) допускают интеграл

$$F=C.$$

В этом случае согласно п. 66 два из характеристических показателей равны нулю. Если для некоторой системы значений μ и C уравнения допускают периодическое решение, то они будут допускать его также для близких значений, так что мы будем иметь ∞^2 периодических решений

$$x_i=\varphi_i(t),$$

зависящих от двух параметров μ и C. Период T не будет постоянным, он будет функцией μ и C.

Дадим тогда C определенное значение C_0, и пусть снова

$$\varphi_i(0)+\beta_i, \quad \varphi_i(0)+\beta_i+\psi_i$$

— значения x_i при $t=0$ и при $t=k(T+\tau)$.

К уравнениям (3) п. 314

$$\psi_1=\psi_2=\ldots=\psi_n=0$$

присоединим сначала уравнение $F=C_0$, а затем произвольное соотношение между величинами β, например $\beta_1=0$.

В самом деле, мы можем без ограничения общности и по той же причине, что и в п. 316, предположить $\beta_1=0$.

Таким образом, получим систему

$$\psi_i=0, \quad F=C_0, \quad \beta_1=0. \tag{3ter}$$

Эти уравнения представляют кривую; в самом деле, число уравнений равно $n+2$; но n уравнений (3) не независимы и могут быть заменены $n-1$ из их числа по той же причине, что и в предыдущем пункте. Таким образом, система (3ter) сводится к $n+1$ уравнениям. Число переменных равно $n+2$, а именно:

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \tau, \mu.$$

Эта кривая (3ter) содержит прямую

$$\beta_i = 0.$$

Пусть $\beta_i=0$, $\mu=\mu_0$ — точка этой прямой. Для того чтобы через эту точку проходила другая ветвь кривой, необходимо, чтобы якобиан левых частей уравнений (3ter) был равен нулю, или, что означает то же, чтобы якобиан $n-1$ величин φ и F относительно $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ и τ был равен нулю, или, наконец, поскольку β_1 ничем не отличается от остальных β, чтобы якобианы от F и любых $n-1$ из величин β были все равны нулю.

Это условие допускает другую формулировку.

Как и в предыдущем пункте, из уравнения $F=C_0$ найдем

$$x_n = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

и получим уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i' \quad (i=1, 2, \ldots, n-1). \qquad (1\text{bis})$$

Тогда согласно п. 316 необходимо, чтобы из $n-1$ характеристических показателей [если периодическое решение считается принадлежащим уравнениям (1bis)] один был нулем, а второй — кратным $2i\pi/kT$; или, что означает то же, чтобы из n характеристических показателей [если периодическое решение считать принадлежащим уравнениям (1)] два были равны нулю, а третий был кратным $2i\pi/kT$.

Предположим, что это условие выполнено; из (3ter) найдем величины β и τ в виде рядов, расположенных по целым или дробным степеням λ; я воздержусь также здесь от их исследования.

Приложение к уравнениям динамики

319. Мне хотелось бы провести более полное исследование, связанное с уравнениями динамики; но для этого нужно сначала доказать одно важное свойство этих уравнений.

Пусть ξ_i и η_i — значения x_i и y_i при $t=0$; пусть X_i и Y_i — значения x_i и y_i при $t=T$. Мы знаем, что

$$\iint \sum dx_i dy_i$$

— интегральный инвариант; следовательно, будем иметь

$$\iint \sum (dX_i dY_i - d\xi_i d\eta_i) = 0,$$

где двойной интеграл распространен на какую-нибудь область A.

Это можно записать так:

$$\int \sum (X_i dY_i - Y_i dX_i - \xi_i d\eta_i + \eta_i d\xi_i) = 0,$$

где интеграл распространен на границу области A, т. е. на какой-нибудь замкнутый контур.

Другими словами, выражение

$$\sum (X_i dY_i - Y_i dX_i - \xi_i d\eta_i + \eta_i d\xi_i)$$

есть полный дифференциал.

Отсюда следует, что

$$dS = \sum [(X_i - \xi_i) d(Y_i + \eta_i) - (Y_i - \eta_i) d(X_i + \xi_i)]$$

есть тоже полный дифференциал.

320. Если изменять T, то ясно, что S будет функцией от T. Вычислим производную от S по T при помощи уравнений

$$\frac{dX_i}{dT} = \frac{dF}{dY_i}, \qquad \frac{dY_i}{dT} = -\frac{dF}{dX_i}.$$

Имеем

$$\frac{dS}{dT} = \int \sum \left[\frac{dX}{dT} d(Y + \eta) - \frac{dY}{dT} d(X + \xi) + (X - \xi) d\frac{dY}{dT} - (Y - \eta) d\frac{dX}{dT}\right],$$

или же

$$\frac{dS}{dT} = \int \sum \left[\frac{dF}{dY} d(Y + \eta) + \frac{dF}{dX} d(X + \xi) - (X - \xi) d\frac{dF}{dX} - (Y - \eta) d\frac{dF}{dY}\right],$$

или, интегрируя по частям,

$$\frac{dS}{dT} = -\sum \left[(X - \xi)\frac{dF}{dX} + (Y - \eta)\frac{dF}{dY}\right] + 2\int \sum \left(\frac{dF}{dX} dX + \frac{dF}{dY} dY\right),$$

или, наконец,

$$\frac{dS}{dT} = 2F - \sum \left[(X - \xi)\frac{dF}{dX} + (Y - \eta)\frac{dF}{dY}\right] + \text{произвольная функция от } T.$$

Мы примем произвольную функцию от T равной постоянной $-2C$ и будем иметь

$$\frac{dS}{dT} = 2(F - C) - \sum \left[(X - \xi)\frac{dF}{dX} + (Y - \eta)\frac{dF}{dY}\right].$$

При $T=0$ имеем $dS=0$ и, следовательно,

$$S=\text{const}.$$

Примем эту постоянную равной нулю, так что S обратится в нуль тождественно при $T=0$; таким образом, функция S определена полностью.

321. Будем искать максимумы и минимумы функции S. Будем сначала считать T постоянной. Для того чтобы функция S имела максимум или минимум, необходимо, *в предположении, что эту функцию S можно считать однозначной функцией переменных $X_i+\xi_i$ и $Y_i+\eta_i$ в рассматриваемой области*, необходимо, говорю я, чтобы ее производные по этим переменным были равны нулю, т. е. чтобы было

$$X_i=\xi_i, \qquad Y_i=\eta_i.$$

Следовательно, соответствующее решение является периодическим решением с периодом T, и этот период T здесь является одним из параметров задачи.

Не будем более считать T заданной величиной; для того чтобы S имела максимум или минимум, необходимо, чтобы было

$$X_i=\xi_i, \qquad Y_i=\eta_i$$

и, кроме того,

$$\frac{dS}{dT}=0.$$

Но если $X=\xi$, $Y=\eta$, то остается

$$\frac{dS}{dT}=2(F-C),$$

откуда

$$F=C.$$

Соответствующее решение снова будет периодическим с периодом T.

Но период T не будет более параметром задачи; в этом случае заданной будет постоянная живых сил C, которая не встречалась в предыдущем случае.

Два способа разыскания максимумов S связаны с двояким пониманием принципа наименьшего действия — принципа Гамильтона и принципа Мопертюи. Это станет более понятным после чтения следующей главы.

322. Определение функции S может быть изменено также следующим образом.

Очень часто в приложениях F — периодическая функция с периодом 2π относительно y_i. В этом случае решение можно также считать периодическим, когда $X_i=\xi_i$, а величина $Y_i-\eta_i$ кратна 2π.

Тогда ясно, что если мы положим

$$dS = \sum [(X_i - \xi_i)\, d(Y_i + \eta_i) - (Y_i - \eta_i - 2m_i\pi)\, d(X_i + \xi_i)],$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — какие-нибудь целые числа, то выражение dS снова будет полным дифференциалом.

При этом мы найдем

$$\frac{dS}{dT} = 2F - \sum\left[(X - \xi)\frac{dF}{dX} + (Y - \eta - 2m\pi)\frac{dF}{dY}\right] +$$

$$+ \text{произвольная функция от } T.$$

Примем

$$\frac{dS}{dT} = 2(F - C) - \sum\left[(X - \xi)\frac{dF}{dX} + (Y - \eta - 2m\pi)\frac{dF}{dY}\right].$$

При $T = 0$ имеем

$$dS = \sum 4m_i\pi d\xi_i.$$

Примем

$$S = 4\pi \sum m_i \xi_i,$$

что завершает определение функции S.

Максимумы и минимумы S в предположении, что период T задан, получаются приравниванием нулю ее производных, что дает

$$X_i = \xi_i, \quad Y_i = \eta_i + 2m_i\pi.$$

Соответствующее решение снова является периодическим, поскольку величина $Y_i - \eta_i$ кратна 2π. Период T задан.

Если T не задано, то необходимо сначала, чтобы было

$$X_i = \xi_i, \quad Y_i = \eta_i + 2m_i\pi$$

и, кроме того, чтобы

$$\frac{dS}{dT} = 0,$$

откуда

$$F = C.$$

323. Теперь нам нужно научиться распознавать истинные максимумы и истинные минимумы S; действительно, до сих пор мы искали условие того, чтобы первые производные от S были равны нулю; но известно, что этого условия недостаточно, чтобы существовал максимум; надо еще, чтобы вторые производные удовлетворяли определенным неравенствам.

Предположим сначала, что мы находимся в условиях п. 319, и будем считать T заданным.

Пусть

$$x_i = \varphi_i(t), \quad y_i = \varphi'_i(t)$$

— периодическое решение с периодом T, так что

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(T), \quad \varphi'_i(0) = \varphi'_i(T).$$

Этому решению может соответствовать максимум или минимум функции S.

Пусть

$$x_i = \varphi_i(t) + x'_i, \quad y_i = \varphi'_i(t) + y'_i,$$

$$x_i = \varphi_i(t) + x''_i, \quad y_i = \varphi'_i(t) + y''_i$$

— два решения, очень мало отличающиеся от этого периодического решения.

Я предположу, что x'_i, y'_i, x''_i, y''_i достаточно малы, чтобы можно было пренебречь их квадратами и считать эти количества удовлетворяющими уравнениям в вариациях (ср. главу IV).

Пусть ξ'_i и η'_i — значения x'_i и y'_i при $t=0$; X'_i и Y'_i — значения x'_i и y'_i при $t=T$.

Для того чтобы узнать, имеет ли S максимум или минимум, достаточно изучить совокупность членов второй степени в разложении S по степеням ξ'_i и η'_i.

Но легко видеть, что эта совокупность членов сводится к

$$\sum (X'_i\eta'_i - Y'_i\xi'_i).$$

Изучим выражение

$$\sum (x''_i y'_i - y''_i x'_i). \tag{1}$$

Согласно п. 56, это выражение должно сводиться к постоянной.

Каков вид общего решения уравнений в вариациях?

Если имеется n степеней свободы, мы будем иметь $n-1$ частных решений вида

$$x'_i = e^{\alpha_k t}\theta_{k,i}(t), \quad y'_i = e^{\alpha_k t}\theta'_{k,i}(t).$$

Величины α_k — характеристические показатели, а θ — периодические функции с периодом T.

Мы будем иметь еще $n-1$ решений вида

$$x'_i = e^{-\alpha_k t}\theta''_{k,i}(t), \quad y'_i = e^{-\alpha_k t}\theta'''_{k,i}(t),$$

соответствующих показателям $-\alpha_k$, которые равны $n-1$ показателям α_k и противоположны им по знаку.

Мы будем иметь очевидное решение

$$x'_i = \frac{d\varphi_i}{dt}, \quad y'_i = \frac{d\varphi'_i}{dt}$$

и, наконец, $2n$-е частное решение будет

$$x'_i = t\frac{d\varphi_i}{dt} + \psi_i, \quad y'_i = t\frac{d\varphi'_i}{dt} + \psi'_i.$$

Следовательно, общее решение можно записать в виде

$$x'_i = \sum A_k e^{\alpha_k t}\theta_{k,i}(t) + \sum B_k e^{-\alpha_k t}\theta''_{k,i}(t) + C\frac{d\varphi_i}{dt} + D\left(t\frac{d\varphi_i}{dt} + \psi_i\right),$$

$$y'_i = \sum A_k e^{\alpha_k t}\theta'_{k,i}(t) + \sum B_k e^{-\alpha_k t}\theta'''_{k,i}(t) + C\frac{d\varphi'_i}{dt} + D\left(t\frac{d\varphi'_i}{dt} + \psi'_i\right),$$

где A, B, C, D — постоянные интегрирования.

Мы будем иметь также

$$x''_i = \sum A'_k e^{\alpha_k t}\theta_{k,i}(t) + \sum B'_k e^{-\alpha_k t}\theta''_{k,i}(t) + C'\frac{d\varphi_i}{dt} + D'\left(t\frac{d\varphi_i}{dt} + \psi_i\right)$$

с аналогичной формулой для y''_i.

Величины A', B', C', D' — новые постоянные.

Подставим эти значения в выражение (1); это выражение станет билинейной формой относительно двух рядов постоянных

$$A,\ B,\ C,\ D,$$
$$A',\ B',\ C',\ D'.$$

Так как эта форма должна обращаться тождественно в нуль при

$$A_k = A'_k,\ B_k = B'_k,\ C = C',\ D = D',$$

то она будет линейной формой относительно определителей, содержащихся в матрице

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & B_1 & A_2 & B_2 & \ldots A_{n-1} & B_{n-1} & C & D \\ A'_1 & B'_1 & A'_2 & B'_2 & \ldots A'_{n-1} & B'_{n-1} & C' & D' \end{matrix} \right\|.$$

Коэффициенты этой линейной формы должны быть постоянными, поскольку выражение (1) должно приводиться к постоянной.

Вообще говоря, ни один из характеристических показателей не будет нулем и никакие два из этих показателей не будут равны между собой.

Отсюда следует, что не должно быть члена, содержащего один из определителей

$$A_kA'_j - A_jA'_k, \quad A_kB'_j - B_jA'_k, \quad B_kB'_j - B_jB'_k,$$
$$A_kC' - CA'_k, \quad A_kD' - DA'_k, \quad B_kC' - CB'_k, \quad B_kD' - DB'_k,$$

так как коэффициент этого члена должен был бы содержать множителем одну из экспонент

$$e^{(\alpha_k+\alpha_j)t}, \quad e^{(\alpha_k-\alpha_j)t}, \quad e^{-(\alpha_k+\alpha_j)t}, \quad e^{\pm\alpha_k t}$$

и не мог бы сводиться к постоянной.

Итак, единственными определителями, которые могут входить в нашу форму, являются

$$A_kB'_k - B_kA'_k, \quad CD' - DC',$$

так что я могу написать

$$\sum (x''_iy'_i - y''_ix'_i) = \sum M_k (A_kB'_k - B_kA'_k) + N(CD' - DC'), \tag{2}$$

где M_k и N — постоянные.

Я говорю, что M_k не может быть нулем; в противном случае выражение (1) не зависело бы от постоянных A_k, A'_k, B_k, B'_k; если бы мы тогда предположили, что все постоянные A' и B', C' и D' равны нулю, за исключением двух постоянных A'_k и B'_k, которым мы приписали бы заданные значения, отличные от нуля, то мы имели бы соотношение

$$\sum (x''_iy'_i - x'_iy''_i) = 0,$$

которое было бы линейно относительно неизвестных x'_i и y'_i и в котором коэффициенты x''_i и y''_i были бы заданными функциями от времени, отличными от нуля. Подобное соотношение не может существовать, поскольку $2n$ переменных x'_i и y'_i независимы. Следовательно, M_k не может быть нулем.

Если мы заменим t на $t+T$, получим новые решения уравнений в вариациях, и эти новые решения получатся заменой постоянных

$$A_k, \ B_k, \ C, \ D$$

на

$$A_ke^{\alpha_kT}, \quad B_ke^{-\alpha_kT}, \quad C+DT, \quad D.$$

Для того чтобы получить

$$\sum (X'_i\eta'_i - Y'_i\xi'_i),$$

достаточно, следовательно, в выражении (1) положить

$$A'_k = A_ke^{\alpha_kT}, \quad B'_k = B_ke^{-\alpha_kT}, \quad C' = C + DT, \quad D' = D,$$

откуда

$$\sum (X'_i \eta'_i - Y'_i \xi'_i) = \sum M_k (e^{-\alpha_k T} - e^{\alpha_k T}) A_k B_k - NTD^2. \tag{3}$$

324. Для рассмотрения уравнения (3) необходимо различать несколько случаев:

1. Показатели $\pm\alpha_k$ вещественны; тогда функции

$$\theta_{k,i}, \quad \theta'_{k,i}, \quad \theta''_{k,i}, \quad \theta'''_{k,i}$$

также вещественны.

2. Показатели $\pm\alpha_k$ чисто мнимые, и квадрат α_k^2 — вещественное отрицательное число.

Тогда функции $\theta_{k,i}$ и $\theta''_{k,i}$, $\theta'_{k,i}$ и $\theta'''_{k,i}$ — комплексные сопряженные числа.

3. Показатели $\pm\alpha_k$ комплексные. Тогда среди характеристических показателей будем иметь показатели $\pm\alpha_j$, которые будут комплексными сопряженными с показателями $\pm\alpha_k$, а

$$\theta_{j,i}, \quad \theta'_{j,i}, \quad \theta''_{j,i}, \quad \theta'''_{j,i}$$

будут комплексными сопряженными с

$$\theta_{k,i}, \quad \theta'_{k,i}, \quad \theta''_{k,i}, \quad \theta'''_{k,i}.$$

Предположим теперь, что величины x'_i и y'_i вещественны. Для вычисления постоянных A, B, C, D будем иметь $2n$ уравнений, которые получатся, если в уравнении, дающем x'_i, положить, например,

$$t = 0, \quad t = T, \quad t = 2T, \ldots, t = (2n-1)T.$$

Эти $2n$ уравнений линейны относительно $2n$ неизвестных A, B, C, D. Правые части вещественны, а коэффициенты — вещественные или комплексные попарно сопряженные.

Если заменить $\sqrt{-1}$ на $-\sqrt{-1}$, то

1) A_k и B_k не меняются, если α_k — вещественное число;

2) A_k и B_k взаимно меняются местами, если α_k — чисто мнимое число;

3) A_k и B_k переходят в A_j и B_j, если α_k — комплексное число, сопряженное с α_j.

Итак:

1) A_k и B_k вещественны, когда α_k вещественно;

2) A_k и B_k комплексные сопряженные, когда α_k — чисто мнимое число;

3) A_k и A_j, B_k и B_j — комплексные сопряженные, когда α_k — комплексное число, сопряженное с α_j.

Наконец, C и D вещественны.

Эти условия, кроме того, достаточны, чтобы x'_i и y'_i были вещественны.

Дадим постоянным A_k, B_k, C, D так же, как и постоянным A'_k, B'_k, C', D', значения, удовлетворяющие этим условиям. Тогда правая часть (2) должна быть вещественной; а для того чтобы это было так, необходимо:

1) чтобы M_k было вещественным, если α_k — вещественное число;

2) чтобы M_k было чисто мнимым, если α_k — чисто мнимое число;

3) чтобы M_k и M_j были комплексными сопряженными, если α_k и α_j комплексные и сопряженные.

Форма (3) содержит член

$$M_k(e^{-\alpha_k T} - e^{\alpha_k T}) A_k B_k$$

и не содержит других членов, зависящих от A_k или B_k.

Если показатель α_k — вещественное число, то присутствия члена с $A_k B_k$ достаточно, чтобы квадратичная форма (3) не могла быть определенной.

Таким образом, если хотя бы один-единственный показатель α_k вещественен, то функция S не может иметь ни максимума, ни минимума.

Предположим теперь, что два показателя α_k и α_j комплексные и сопряженные.

Обратим в нуль все постоянные, за исключением

$$A_k, \ B_k, \ A_j, \ B_j,$$

тогда форма (3) примет вид

$$M_k(e^{-\alpha_k T} - e^{\alpha_k T}) A_k B_k + M_j(e^{-\alpha_j T} - e^{\alpha_j T}) A_j B_j.$$

Эти два члена — комплексные сопряженные, так что форма (3) вещественна.

Предположим, что A_k не изменяется, а B_k меняет знак; A_j, комплексно сопряженное с A_k, также не изменится, а B_j, комплексно сопряженное с B_k, изменится на $-B_j$.

Следовательно, форма (3) изменит знак; таким образом, она не может быть определенной.

Итак, если один из показателей α_k — комплексный, функция S не может иметь ни максимума, ни минимума.

Предположим теперь, что α_k — чисто мнимое число. Тогда A_k и B_k комплексно сопряжены, а произведение $A_k B_k$ равно сумме двух квадратов.

Для того чтобы функция S имела максимум, необходимо и достаточно, чтобы все количества

$$\frac{M_k}{\sqrt{-1}} \sin \frac{\alpha_k T}{\sqrt{-1}}, \quad -NT$$

были отрицательны; для того чтобы S имела минимум, необходимо и достаточно, чтобы все эти количества были положительны.

Важно заметить, что все эти количества вещественны, так как $\frac{M_k}{\sqrt{-1}}$ и $\frac{\alpha_k}{\sqrt{-1}}$ вещественны.

325. Как изменятся эти результаты, если предположить, что постоянная живых сил рассматривается как один из фиксированных параметров задачи? Тогда мы имеем тождественно

$$\sum\left(\frac{dF}{dx}x'+\frac{dF}{dy}y'\right)=0,$$

где предполагается, что в dF/dx, dF/dy величины x_i и y_i заменены периодическими функциями $\varphi_i(t)$ и $\varphi'_i(t)$.

Действительно, постоянное значение функции F должно быть одним и тем же для периодического решения

$$x_i=\varphi_i(t),\qquad y_i=\varphi'_i(t)$$

и для бесконечно близкого решения

$$x_i=\varphi_i(t)+x'_i,\qquad y_i=\varphi'_i(t)+y'_i.$$

Это соотношение является линейным уравнением, связывающим постоянные

$$A_k,\ B_k,\ C,\ D,$$

коэффициенты которого должны быть независимыми от t.

Отсюда вытекает, что A_k и B_k не должны фигурировать в этом соотношении, поскольку эти постоянные всегда умножаются на $e^{\pm\alpha_k t}$, а эта показательная функция не может исчезнуть.

Кроме того, C также не фигурирует в нем, поскольку решение

$$x_i=\varphi_i(t)+C\frac{d\varphi_i}{dt},\qquad y_i=\varphi'_i(t)+C\frac{d\varphi'_i}{dt},$$

где C — очень малая постоянная, получается из периодического решения, если дать времени бесконечно малое приращение C, и соответствует, следовательно, тому же значению постоянной живых сил, что и периодическое решение.

Наше соотношение, которое не может свестись к тождеству, приводится, таким образом, к равенству

$$D=0.$$

Но если D — нуль, то член NTD^2 исчезает из формы (3).

Для того чтобы функция S допускала максимум или минимум, необходимо, таким образом, чтобы все количества

$$\frac{M_k}{\sqrt{-1}}\sin\frac{\alpha_k T}{\sqrt{-1}}$$

имели один и тот же знак.

Если имеется только две степени свободы, то существует только одна из этих величин.

Таким образом, если имеется только две степени свободы и если α_k — чисто мнимое, то функция S всегда имеет либо максимум, либо минимум.

326. Предположим теперь, что мы находимся в условиях п. 322, так что

$$dS = \sum [(X_i - \xi_i)\, d(Y_i + \eta_i) - (Y_i - \eta_i - 2m_i\pi)\, d(X_i + \xi_i)],$$

и будем считать T постоянной. Чтобы функция S имела максимум или минимум, необходимо прежде всего, чтобы существовало периодическое решение

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \varphi'_i(t),$$

где

$$\varphi_i(t+T) = \varphi_i(t), \qquad \varphi'_i(t+T) = \varphi'_i(t) + 2m_i\pi$$

В таком случае рассмотрим близкое решение

$$x_i = \varphi_i(t) + x'_i, \qquad y_i = \varphi'_i(t) + y'_i,$$

и ход рассуждений будет таким же, как выше; результаты те же.

Для существования максимума или минимума необходимо прежде всего, чтобы все показатели α_k были чисто мнимыми; необходимо затем, чтобы все количества

$$\frac{M_k}{\sqrt{-1}} \sin\frac{\alpha_k T}{\sqrt{-1}}, \quad -NT$$

были одного и того же знака.

Если считать постоянную живых сил заданной, то D — нуль, член — NTD^2 исчезает, и достаточно, чтобы все количества

$$\frac{M_k}{\sqrt{-1}} \sin\frac{\alpha_k T}{\sqrt{-1}}$$

были одного знака.

327. Что произойдет теперь, если уравнения допускают еще другие однозначные интегралы, отличные от интеграла живых сил, и если, следовательно, некоторые из характеристических показателей равны нулю?

Как увидим, и в этом случае можно провести рассуждения, аналогичные предшествующим.

Предположим, например, что наши уравнения допускают кроме интеграла живых сил еще p однозначных интегралов

$$F_1, F_2, \ldots, F_p,$$

так что скобки $[F_i, F_k]$, составленные из пар этих интегралов, равны нулю. В таком случае мы знаем из п. 69, что $2p+2$ характеристических

показателей равны нулю. Предположим, что все остальные показатели отличны от нуля.

Тогда мы будем иметь $n-p-1$ пар постоянных, аналогичных постоянным A_k и B_k, и $p+1$ пар постоянных C_k и D_k, аналогичных постоянным C и D.

Тогда форма (3) примет вид

$$\sum M_k (e^{-\alpha_k T} - e^{\alpha_k T}) A_k B_k - \sum N_k T D_k^2,$$

где $\sum N_k T D_k^2$ означает сумму членов, аналогичных члену NTD^2.

Если мы будем считать теперь значения наших $p+1$ интегралов заданными, то все постоянные D_k будут нулями, члены $N_k T D_k^2$ исчезнут, и условием того, чтобы S имела максимум или минимум, будет снова условие, чтобы все количества

$$M_k (e^{-\alpha_k T} - e^{\alpha_k T})$$

были одного и того же знака.

Я, впрочем, не останавливаюсь на этом, ибо в случае задачи трех тел мы либо будем иметь дело с ограниченной задачей п. 9, либо сможем уменьшить число степеней свободы, употребляя методы пунктов 15 и 26.

Но в случае приведенных задач пунктов 9, 15 и 16 существует только один однозначный интеграл — интеграл живых сил — и только два показателя равны нулю, как мы это видели в п. 78.

Решения второго рода уравнений динамики

328. Заменим T последовательно на $2T, 3T, \ldots, mT, \ldots$; функция S, определенная выше, зависит от T; пусть

$$S_m = S(mT)$$

Будем искать максимумы и минимумы функции S_m, считая период T постоянным.

Если мы рассмотрим периодическое решение с периодом T, то оно будет также периодическим решением с периодом mT. Следовательно, первые производные S_m равны нулю.

Для существования максимума или минимума необходимо, прежде всего, чтобы все показатели α_k были чисто мнимыми.

Если, далее, все количества

$$\frac{M_k}{\sqrt{-1}} \sin \frac{m\alpha_k T}{\sqrt{-1}} \tag{1}$$

отрицательны, то будет максимум; если они все положительны, то мы будем иметь минимум.

Вот первый пункт, на который я хотел бы обратить внимание.

Если мы дадим целому m всевозможные целые значения, то $n-1$ количеств (1), вообще говоря, дадут всевозможные комбинации знаков.

Действительно, положим для краткости

$$\frac{a_k T}{\sqrt{-1}} = \omega_k$$

и пусть

$$z_k = m\omega_k + 2m_k\pi.$$

Дадим m и m_k всевозможные целые значения; если мы рассматриваем $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ как координаты точки в пространстве $n-1$ измерений, то получим таким образом бесконечное число точек. Я говорю, что в любой сколь угодно малой части пространства $n-1$ измерений будет бесконечно много этих точек.

Для того чтобы это показать, я должен только обратиться к рассуждениям, с помощью которых устанавливается, что однозначная функция от n вещественных переменных не может иметь $n+1$ различных периодов.

Величины, записанные в таблице

$$\begin{array}{llll} \omega_1, & \omega_2, & \ldots, & \omega_{n-1}, \\ 2\pi, & 0, & \ldots, & 0, \\ 0, & 2\pi, & \ldots, & 0, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & 2\pi, \end{array}$$

играют в этом рассуждении роль периодов.

Мы имели бы исключение, если бы эти периоды не были независимыми, т. е. если бы одна из величин ω была соизмерима с 2π или, если бы вообще существовала линейная комбинация z, допускающая только один период, т. е. существовало соотношение вида

$$b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + \ldots + b_{n-1}\omega_{n-1} + 2\pi b_n = 0, \tag{2}$$

где величины b — целые числа.

Оставим сначала в стороне этот исключительный случай; количества (1) будут равны

$$\frac{M_k}{\sqrt{-1}} \sin z_k.$$

Сказать, что можно выбрать целое число m так, чтобы эти количества составили комбинацию заданного знака, значит сказать, что имеются числа z_k, удовлетворяющие неравенствам вида

$$a_1 < z_1 < a_1 + \pi, \; a_2 < z_2 < a_2 + \pi, \ldots, a_{n-1} < z_{n-1} < a_{n-1} + \pi, \tag{3}$$

где величины a_k равны 0 или π.

Но это как раз и вытекает немедленно из того, что мы только что сказали выше.

Перейдем к случаю, когда имеется соотношение вида (2). Мы всегда можем предположить, что целые числа b взаимно простые; в этом случае выражение

$$b_1 z_1 + b_2 z_2 + \ldots + b_{n-1} z_{n-1} \tag{4}$$

допускает в качестве единственного периода 2π.

Для того чтобы не существовало чисел z_k, удовлетворяющих неравенствам (3), необходимо и достаточно, чтобы разность между наибольшим и наименьшим значением, которое принимает выражение (4), когда величинам z_k дают все значения, совместимые с неравенствами (3), чтобы эта разность, говорю я, была меньше 2π, т. е. периода выражения (4).

Но эта разность, очевидно, равна

$$\pi(|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_{n-1}|);$$

следовательно, мы должны иметь

$$|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_{n-1}| \leqslant 2. \tag{5}$$

Неравенство может иметь место только в том случае, если все b равны нулю, за исключением одного из них, которое должно быть равно ± 1.

В этом случае ω_k должно быть равно кратному 2π; это означает, что α_k должно быть нулем, поскольку α_k определено только с точностью до кратного $2\pi\sqrt{-1}/T$.

Но мы как раз исключили случай, когда один из показателей α_k равен нулю. Равенство может иметь место, только если все b нули, за исключением двух из них, которые должны быть равны ± 1.

Тогда сумма или разность двух из ω_k будет кратной 2π и если мы заметим, что α_k определены только с точностью до кратного $2\pi\sqrt{-1}/T$, мы можем сформулировать этот результат другим образом: два характеристических показателя будут равными.

Это единственный исключительный случай, который существует и который легко может быть исключен из рассмотрения.

329. Предположим теперь, что рассматриваемые уравнения динамики зависят от произвольного параметра μ, подобно тому как это имеет место, как мы знаем, в задаче трех тел.

Когда мы непрерывно меняем μ, периодическое решение

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \varphi'_i(t)$$

будет также меняться непрерывным образом, в чем можно убедиться при чтении главы III.

Количества M_k также будут изменяться непрерывным образом, но, как было объяснено в п. 323, они никогда не смогут обратиться в нуль; следовательно, они всегда будут сохранять один и тот же знак; но как раз только их знак нас и интересует.

Постоянная живых сил будет считаться одним из фиксированных параметров задачи; этот параметр может зависеть от μ, и мы выберем его так, чтобы период T периодического решения оставался постоянным.

Показатели α_k будут также изменяться непрерывно, когда мы будем непрерывно менять μ; посмотрим, как происходит это изменение в случае задачи трех тел. При $\mu=0$ все показатели равны нулю; но как только μ перестает быть нулем, показатели также перестают быть равными нулю; один из этих показателей сможет обратиться в нуль, или стать равным кратному $2\pi\sqrt{-1}/T$, или стать равным другому характеристическому показателю только для определенных частных значений μ.

330. Рассмотрим такое периодическое решение с периодом T, что все показатели α_k чисто мнимые; выше мы назвали это устойчивым решением; мы доказали существование этих решений в главах III и IV.

Рассмотрим один из показателей, например α_1; когда μ будет изменяться непрерывным образом, величина $\alpha_1/\sqrt{-1}$, которая вещественна, будет бесконечно много раз становиться соизмеримой с $2\pi/T$. Дадим μ такое значение μ_0, что

$$\frac{\alpha_1}{\sqrt{-1}}=\frac{2k\pi}{pT},$$

где k и p — взаимно простые целые числа, которые, кроме того, не соответствуют максимуму или минимуму величины $\alpha_1/\sqrt{-1}$.

Мы увидим дальше, в п. 334, почему я пишу в числителе $2k\pi$, а не $k\pi$.

На всяком сколь угодно малом интервале имеется бесконечное число подобных значений.

Если m — какое-нибудь целое число, то для этого значения μ_0 выражение

$$\frac{M_1}{\sqrt{-1}}\sin\frac{pm\alpha_1 T}{\sqrt{-1}}$$

равно нулю; кроме того, так как μ_0 не соответствует максимуму или минимуму величины $\alpha_1/\sqrt{-1}$, это выражение изменит знак, когда μ перейдет от $\mu_0-\varepsilon$ к $\mu_0+\varepsilon$.

Предположим, например, что оно переходит от отрицательного значения к положительному.

Рассуждая, как в п. 328, мы увидим, что можно выбрать такое целое число m, что выражения

$$\frac{M_k}{\sqrt{-1}}\sin\frac{pm\alpha_k T}{\sqrt{-1}} \qquad (k=2,\ 3,\ \ldots,\ n-1)$$

представляют все возможные комбинации знаков и, в частности, что все они отрицательны.

При этих предположениях при $\mu=\mu_0-\varepsilon$ наша функция $S_{m,p}$ будет иметь максимум, поскольку все наши выражения будут отрицательными, но при $\mu=\mu_0+\varepsilon$ периодическое решение не будет более соответствовать максимуму $S_{m,p}$, поскольку одно из этих выражений станет положительным.

Теоремы о максимумах

331. Для того чтобы идти дальше, необходимо доказать одно свойство максимумов; пусть V — функция трех переменных x_1, x_2 и z, разложимая по возрастающим степеням этих трех переменных. Я предполагаю:

1) что при $x_1=x_2=0$ функция V обращается в нуль так же, как и ее производные dV/dx_1, dV/dx_2, и это имеет место, каково бы ни было z;

2) что при $x_1=x_2=0$ V имеет максимум при $z>0$ и минимум при $z<0$.

Я говорю, что уравнения

$$\frac{dV}{dx_1}=\frac{dV}{dx_2}=0$$

будут допускать вещественные решения, отличные от решения

$$x_1=x_2=0.$$

Действительно, разложим V по степеням z, и пусть

$$V=V_0+zV_1+z^2V_2+\ldots.$$

Функции V_0, V_1, V_2, ... разложимы, в свою очередь, по степеням x_1 и x_2; но эти разложения не будут содержать ни членов степени 0, ни членов степени 1, так как при любом z мы должны иметь

$$V=\frac{dV}{dx_1}=\frac{dV}{dx_2}=0$$

при $x_1=x_2=0$.

Кроме того, V_0 также не содержит членов второй степени, в противном случае при переходе от $z>0$ к $z<0$ мы не смогли бы перейти от случая максимума к случаю минимума.

Напротив, V_1 будет содержать члены второй степени, по крайней мере, мы это предполагаем. Тогда рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} 0&=\frac{dV_0}{dx_1}+z\frac{dV_1}{dx_1}+z^2\frac{dV_2}{dx_1}+\ldots,\\ 0&=\frac{dV_0}{dx_2}+z\frac{dV_1}{dx_2}+z^2\frac{dV_2}{dx_2}+\ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

о разрешении которых идет речь.

Пусть U_0 и U_1 — члены наинизшей степени функций V_0 и V_1; согласно тому, что мы видели, U_1 — второй степени, а U_0 — степени p, где p больше двух; положим

$$(p-2)\mu=1; \quad x_1=y_1t; \quad x_2=y_2t; \quad V=Wt^p, \quad z=\pm t^{p-2}.$$

Функцию W можно разложить по степеням t; пусть

$$W=W_0+tW_1+t^2W_2+\ldots.$$

Очевидно, мы имеем

$$W_0=\pm U_1t^{-2}+U_0t^{-p}=\pm U_1'+U_0',$$

где $U_1'=U_1t^{-2}$ и $U_0'=U_0t^{-p}$ — два однородных полинома относительно y_1 и y_2, один — степени 2, другой — степени p. Я беру знак $+$ или $-$ согласно тому, каким я принял $z=\pm t^{p-2}$. Выражение

$$\frac{dV}{dx_1}\frac{dU_1}{dx_2}-\frac{dV}{dx_2}\frac{dU_1}{dx_1}$$

будет также разложенным по степеням t, когда мы заменим в нем x_1 и x_2 на y_1t и y_2t; оно будет содержать множителем определенную степень t; разделим его на этот множитель, и пусть H есть частное. Это частное. будучи разложенным по степеням t, запишется в виде

$$H=H_0+tH_1+t^2H_2+\ldots.$$

H_0 будет первым из выражений

$$\frac{dW_k}{dy_1}\frac{dU_1'}{dy_2}-\frac{dW_k}{dy_2}\frac{dU_1'}{dy_1},$$

не обращающимся в нуль.

Уравнения

$$\frac{dV}{dx_1}=\frac{dV}{dx_2}=0$$

можно заменить следующими:

$$H=0, \qquad \frac{dW}{dy_1}=0,$$

и я докажу что можно найти величины y из этих уравнений в виде рядов, расположенных по целым и дробным степеням t, обращающихся в нуль вместе с t, с вещественными коэффициентами.

Для этого достаточно установить, согласно пунктам 32 и 33, что при $t=0$ эти уравнения допускают *вещественное* решение *нечетного порядка*.

Но при $t=0$ эти уравнения сводятся к

$$H_0=0, \quad \frac{dW_0}{dy_1}=0$$

или же

$$\frac{dW_k}{dy_1}\frac{dU_1'}{dy_2}-\frac{dW_k}{dy_2}\frac{dU_1'}{dy_1}=0 \tag{2}$$

и

$$\pm\frac{dU_1'}{dy_1}+\frac{dU_0'}{dy_1}=0. \tag{3}$$

Уравнение (2) означает, что если предположить, что y_1 и y_2 связаны соотношением $U_1'=\text{const}$, то W_k допускает максимум или минимум.

Но, если считать y_1 и y_2 координатами точки на плоскости, то соотношение $U_1'=\text{const}$ представит эллипс, так как квадратичная форма U_1 (и, следовательно, форма U_1') должна быть определенной, чтобы функция V могла допускать максимум или минимум. Но так как эллипс — замкнутая кривая, то функция W_k должна иметь, по крайней мере, один максимум и один минимум, когда точка y_1, y_2 будет описывать эту замкнутую кривую.

Следовательно, каково бы ни было постоянное значение, присвоенное U_1', уравнение (2) будет допускать, по крайней мере, два корня, и *притом два корня нечетного порядка*, ибо мы видели в п. 34, что максимум или минимум всегда соответствует корню нечетного порядка. Впрочем, здесь, когда мы имеем только одну независимую переменную, теорема п. 34 почти очевидна.

При этих условиях следует различать два случая.

Первый случай. U_0' не является степенью U_1'; в этом случае мы не имеем тождественно

$$\frac{dW_0}{dy_1}\frac{dU_1'}{dy_2}-\frac{dW_0}{dy_2}\frac{dU_1'}{dy_1}=0.$$

Следовательно, мы имеем $W_k= W_0$ и

$$H_0=\frac{dU_0'}{dy_1}\frac{dU_1'}{dy_2}-\frac{dU_0'}{dy_2}\frac{dU_1'}{dy_1}=0.$$

Тогда уравнение $H_0=0$ однородно относительно y_1 и y_2. Каково бы ни было постоянное значение, присвоенное U_1', оно даст нам для отношения y_1/y_2 одно и то же значение.

Таким образом, мы найдем сначала y_1/y_2 из уравнения (2) и согласно предыдущему получим, по крайней мере, два решения нечетного порядка.

Пусть $y_1/y_2=\alpha_1/\alpha_2$ — одно из этих решений; положим $y_1=\alpha_1 u$, $y_2=\alpha_2 u$ и подставим в уравнение (3); получим

$$U_0'=Au^p, \quad U_1'=Bu^2,$$

и уравнение (3) приведется к следующему:

$$Au^{p-2} \pm B = 0.$$

Если $p-2$ — нечетно, это уравнение даст для u вещественное значение. Если $p-2$ — четное, следует различать два случая.

Если A и B — одного и того же знака, то мы возьмем нижний знак

$$Au^{p-2} - B = 0.$$

Если A и B — противоположных знаков, мы возьмем верхний знак

$$Au^{p-2} + B = 0$$

и будем всегда иметь для u два вещественных значения.

Во всех случаях эти вещественные решения суть простые.

Таким образом, уравнения (2) и (3) всегда допускают решения нечетного порядка.

Второй случай. Мы имеем

$$U'_0 = A\,(U'_1)^{p/2}.$$

В этом случае мы начнем с разрешения уравнения (3), которое записывается в виде

$$\frac{p}{2}A\,(U'_1)^{\frac{p}{2}-1} \pm 1 = 0.$$

Это уравнение дает значение U'_1; это значение вещественное и простое; но этого недостаточно, так как U'_1 — определенно-отрицательная форма; для того чтобы решение годилось, необходимо, чтобы найденное значение U'_1 было отрицательным; следовательно, мы выберем знак $\pm$.

После такого определения значения U'_1 мы приписываем U'_1 это постоянное значение и для разрешения уравнения (2) мы должны только искать максимумы и минимумы функций W_k. Как мы видели, найдем, по крайней мере, два решения нечетного порядка.

Итак, мы установили, что уравнения (2) и (3) всегда имеют вещественные решения нечетного порядка. Таким образом, теорема, сформулированная в начале этого пункта, доказана.

332. Пусть теперь V — функция $n+1$ переменных

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \text{ и } z.$$

Я предполагаю:

1) что V разложима по степеням x и z;

2) что при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

каково бы ни было z, мы имеем

$$V=\frac{dV}{dx_1}=\frac{dV}{dx_2}=\ldots=\frac{dV}{dx_n}=0;$$

3) рассмотрим совокупность членов V второй степени относительно x. Они представляют квадратичную форму, которую можно приравнять сумме n квадратов с положительными или отрицательными коэффициентами.

Я предполагаю, что когда z переходит от положительных к отрицательным значениям, два из этих n коэффициентов переходят от отрицательных к положительным значениям и что $n-2$ остальных коэффициентов не обращаются в нуль.

Я говорю, что при этих условиях уравнения

$$\frac{dV}{dx_1}=\frac{dV}{dx_2}=\ldots=\frac{dV}{dx_n}=0 \tag{1}$$

допускают вещественные решения, отличные от

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=0.$$

В самом деле, разложим V по степеням z, и пусть

$$V=V_0+V_1z+V_2z^2+\ldots.$$

Пусть U_0 и U_1 — совокупность членов второй степени из V_0 и V_1.

Совокупность U_0 является квадратичной формой, представимой в виде суммы $n-2$ квадратов, ибо мы знаем, что при $z=0$ два коэффициента, о которых шла речь выше, обращаются в нуль.

Таким образом, если мы рассмотрим дискриминант формы U_0, т. е. функциональный определитель от

$$\frac{dU_0}{dx_1}, \frac{dU_0}{dx_2}, \ldots, \frac{dU_0}{dx_n}$$

по

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_n,$$

то этот определитель, как и все его миноры первого порядка, обращается в нуль; однако не все миноры второго порядка обращаются в нуль, в противном случае третий коэффициент был бы нулем, чего мы не предполагаем.

Мы можем также предположить, что произведена такая линейная замена переменных, что U_0 принимает вид

$$U_0=A_3x_3^2+A_4x_4^2+\ldots+A_nx_n^2$$

и, следовательно, что функциональный определитель от

$$\frac{dU_0}{dx_3}, \frac{dU_0}{dx_4}, \ldots, \frac{dU_0}{dx_n}$$

относительно

$$x_3, \quad x_4, \ldots, \quad x_n$$

не равен нулю.

Рассмотрим теперь уравнения

$$\frac{dV}{dx_3} = \frac{dV}{dx_4} = \ldots = \frac{dV}{dx_n} = 0, \tag{2}$$

которые представляют собою $n-2$ уравнения из (1).

Я говорю, что из них можно найти

$$x_3, \quad x_4, \ldots, \quad x_n$$

в виде рядов, расположенных по степеням

$$z, \quad x_1, \quad x_2.$$

Для этого достаточно, в силу п. 30, чтобы функциональный определитель уравнений (2) относительно

$$x_3, \quad x_4, \ldots, \quad x_n$$

не обращался в нуль, если положить

$$z = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \ldots = x_n = 0.$$

Но уравнения (2), если положить $z=0$ и ограничиться членами первой степени относительно x, приводятся к следующим:

$$\frac{dU_0}{dx_3} = \frac{dU_0}{dx_4} = \ldots = \frac{dU_0}{dx_n} = 0,$$

и мы только что видели, что соответствующий функциональный определитель не равен нулю.

Заменим в функции V величины $x_3, x_4, \ldots, x_n$ их значениями, найденными таким образом из уравнений (2); я говорю, что мы окажемся теперь в условиях предыдущего пункта.

1) действительно, мы имеем только три независимых переменных z, x_1 и x_2;

2) функция V разложима по степеням этих переменных;

3) уравнения (1) можно заменить следующими:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0, \tag{3}$$

где символ ∂ означает производные, взятые в предположении, что x_3, $x_4, \ldots, x_n$ суть функции от x_1 и x_2, определенные уравнениями (2).

В самом деле, мы имеем

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}=\frac{dV}{dx_1}+\frac{dV}{dx_3}\frac{dx_3}{dx_1}+\frac{dV}{dx_4}\frac{dx_4}{dx_1}+\ldots+\frac{dV}{dx_n}\frac{dx_n}{dx_1},$$

откуда в силу уравнений (2)

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}=\frac{dV}{dx_1},$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2}=\frac{dV}{dx_2};$$

4) при $z>0$ функция V, рассматриваемая как функция от x_1 и x_2, имеет максимум, когда эти две переменные равны нулю.

Чтобы увидеть это, нам необходимо найти в V члены второй степени относительно x_1 и x_2. Пусть

$$W_0+zW_1+z^2W_2+\ldots$$

— эти члены. Чтобы получить члены

$$W_0+zW_1,$$

только и интересующие меня, я беру два члена

$$U_0+zU_1$$

и пренебрегаю остальными членами V, которые не могут повлиять на W_0+zW_1.

Я нахожу из уравнений (2)

$$x_3,\quad x_4,\ldots,\ x_n$$

в виде рядов, расположенных по степеням x_1 и x_2; я сохраняю в этих рядах только члены, которые имеют степень 1 относительно x_1 и x_2 и степень 0 или 1 относительно z; другими членами можно пренебречь, ибо они не влияют на

$$W_0+zW_1.$$

Тогда уравнения (2) сведутся к

$$2A_3x_3+z\frac{dU_1}{dx_3}=0,$$

$$2A_4x_4+z\frac{dU_1}{dx_4}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2A_nx_n+z\frac{dU_1}{dx_n}=0.$$

Если в U_0 мы подставим вместо $x_3, x_4, \ldots, x_n$ значения, полученные таким образом, мы увидим, что U_0 станет делиться на z^2; что же касается U_1, то оно сведется к

$$U_1^0 + zU_1^1 + z^2U_1^2 + \ldots,$$

где U_1^0 не что иное, как значение функции U_1, когда $x_3, x_4, \ldots, x_n$ обращаются в нуль, и где U_1^1 и U_1^2 — две другие квадратичные формы от x. Итак, мы будем иметь

$$U_0 = z^2U_0^2; \qquad U_1 = U_1^0 + zU_1^1 + z^2U_1^2$$

и

$$U_0 + zU_1 = zU_1^0 + z^2(U_0^2 + U_1^1) + z^3U_1^2.$$

При вычислении $W_0 + zW_1$ я могу пренебречь двумя последними членами, которые делятся на z^2 и z^3, и получу просто

$$W_0 + zW_1 = zU_1^0.$$

Я докажу, что V имеет максимум при $x_1 = x_2 = 0$ и при положительном и очень малом z; но достаточно показать это для $W_0 + zW_1$, т. е. для zU_0^1.

Таким образом, окончательно остается доказать, что U_1^0 — определенно-отрицательная форма.

Для того чтобы убедиться в этом, запишем квадратичную форму U_1 следующим образом:

$$U_1 = U_1' + U_1'';$$

U_1' — сумма двух квадратов с коэффициентами, знак которых я не предрешаю; U_1'' зависит только от $n-2$ переменных

$$x_3, x_4, \ldots, x_n.$$

Это всегда возможно в силу общих свойств квадратичных форм.

Рассмотрим форму

$$U_0 + zU_1 = zU_1' + (U_0 + zU_1''),$$

где z предполагается положительным и очень малым. Форму $U_0 + zU_1''$, зависящую только от $n-2$ переменных $x_3, x_4, \ldots, x_n$, можно приравнять сумме $n-2$ квадратов с коэффициентами, знаки которых должны быть теми же, что и знаки $A_3, A_4, \ldots, A_n$, поскольку эта форма очень мало отличается от U_0, так как z очень мало́. *Следовательно, они не изменяют знака, когда z переходит от положительных значений к отрицательным.*

Согласно нашим предположениям, когда z переходит от положительных значений к отрицательным, наши $n-2$ коэффициента не обращаются

в нуль, а два коэффициента переходят, напротив, от отрицательных значений к положительным.

Эти два последних могут быть только коэффициентами формы U_1'.

Таким образом, U_1' *является суммой двух квадратов с отрицательными коэффициентами.*

Чтобы получить U_1^0, необходимо в U_1 положить

$$x_3 = x_4 = \ldots = x_n = 0.$$

Тогда U_1'' обращается в нуль, а U_1 сводится к U_1'. Таким образом, U_1^0 — определенно-отрицательная форма, что требовалось доказать.

Итак, функция V, рассматриваемая как функция от x_1 и x_2, имеет максимум при положительном и очень малом z и при $x_1 = x_2 = 0$.

Мы могли бы увидеть также, или, скорее, видим в то же время, что V имеет минимум при отрицательном и очень малом z и при $x_1 = x_2 = 0$.

Таким образом, мы пришли, как я это утверждал, к условиям предыдущего пункта, и теорему, сформулированную в начале этого пункта, можно считать установленной.

Существование решений второго рода

333. Обратимся вновь к предположениям п. 330; мы определили функцию S_{mp}, которая зависит от μ, от $2n$ переменных

$$\begin{gathered} X_1 + \xi_1, \ \ldots, \ X_n + \xi_n, \\ Y_1 + \eta_1, \ Y_2 + \eta_2, \ \ldots, \ Y_n + \eta_n. \end{gathered} \tag{α}$$

Величины ξ_i и η_i являются значениями x_i и y_i при $t = 0$; X_i и Y_i суть значения x_i и y_i при $t = mpT$.

Мы хотим изучить решения уравнений

$$\frac{dS_{mp}}{d(X_i + \xi_i)} = \frac{dS_{mp}}{d(Y_i + \eta_i)} = 0; \tag{1}$$

согласно пунктам 321 и 322 эти решения соответствуют периодическим решениям с периодом mpT. Из них мы уже знаем одно решение, поскольку периодическое решение с периодом T является в то же время периодическим с периодом mpT; я покажу, что в их числе имеются и другие.

Но прежде я хочу показать, с помощью какого приема можно сделать S_{mp} зависящей только от μ и $n-1$ переменных

$$\begin{gathered} X_1 + \xi_1, \quad X_2 + \xi_2, \quad \ldots, \quad X_{n-1} + \xi_{n-1}, \\ Y_1 + \eta_1, \quad Y_2 + \eta_2, \quad \ldots, \quad Y_{n-1} + \eta_{n-1}, \quad Y_n + \eta_n. \end{gathered} \tag{β}$$

Для этого предположим, что

$$X_n + \xi_n = 0.$$

Рассмотрим теперь уравнения

$$\frac{\partial S_{mp}}{\partial (X_i+\xi_i)}=\frac{\partial S_{mp}}{\partial (Y_i+\eta_i)}=0. \qquad (1\text{bis})$$

Мы применяем символ d, чтобы обозначить производные от функции S, рассматриваемой как функция переменных (α), и ∂, чтобы обозначить производные этой же самой функции S, рассматриваемой как функция переменных (β).

Я докажу эквивалентность уравнений (1) и (1bis). Из п. 322 имеем

$$dS=\sum[(X_i-\xi_i)\,d(Y_i+\eta_i)-(Y_i-\eta_i-2m_i\pi)\,d(X_i+\xi_i)].$$

Таким образом, уравнения (1) можно записать

$$-(Y_i-\eta_i-2m_i\pi)=X_i-\xi_i=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

а уравнения (1bis)

$$-(Y_i-\eta_i-2m_i\pi)=(X_i-\xi_i)=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$
$$X_n-\xi_n=0.$$

Но в соответствии с уравнением живых сил мы имеем тождественно

$$F(X_i,\ Y_i)=F(\xi_i,\ \eta_i+2m_i\pi).$$

Однако согласно уравнениям (1bis) все X_i равны ξ_i и все Y_i (за исключением одного) равны $\eta_i+2m_i\pi$.

Итак, предыдущее тождество можно записать следующим образом; я пишу для краткости

$$F(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n;\ \eta_1+2m_1\pi,\ \eta_2+2m_2\pi,\ \ldots,\ \eta_{n-1}+2m_{n-1}\pi,\ Y_n)=F(Y_n).$$

Тождество можно написать в виде

$$F[\eta_n+2m_n\pi+(Y_n-\eta_n-2m_n\pi)]-F(\eta_n+2m_n\pi)=0$$

или в силу теоремы о конечных приращениях

$$(Y_n-\eta_n-2m_n\pi)F'[\eta_n+2m_n\pi+\theta(Y_n-\eta_n-2m_n\pi)]=0, \qquad (2)$$

где θ заключено между 0 и 1 и где F' — производная от F по Y_n.

Пусть ξ_i^0 и η_i^0 — значения ξ_i и η_i, соответствующие периодическому решению с периодом T; рассматриваемая область содержит только близкую окрестность точки $\mu=\mu_0$, $\xi_i=\xi_i^0$, $\eta_i=\eta_i^0$; следовательно, ξ_i и X_i никогда не отклоняются намного от ξ_i^0, а η_i или $Y_i-2m_i\pi$ — от η_i^0; таким образом, второй множитель F' в соотношении (2) никогда не отклоняется сильно от своего значения при $\xi_i=\xi_i^0$, $\eta_i=\eta_i^0$ и это значение, вообще говоря, не будет нулем.

Следовательно, первый множитель соотношения (2) должен обратиться в нуль, и мы имеем

$$Y_n - \eta_n - 2m_n\pi = 0.$$

Другими словами, уравнения (1bis) влекут за собой уравнения (1). Таким образом, мы можем считать S_{mp} функцией переменных (β), и когда она будет иметь максимумы как функция переменных (β), она будет также иметь максимумы как функция переменных (α).

Я назвал ξ_i^0 и η_i^0 значения ξ_i и η_i, которые соответствуют периодическому решению с периодом T; соответствующие значения $X_i+\xi_i$ и $Y_i+\eta_i$ будут $2\xi_i^0$ и $2\eta_i^0+2m_i mp\pi$ (если в периодическом решении с периодом T переменная y_i меняется на $y_i+2m_i\pi$ в соответствии с предположениями п. 322).

Пусть S_0 — соответствующее значение S_{mp}; положим

$$\mu = \mu_0 + \mu'; \qquad V = S_{mp} - S_0; \qquad X_i + \xi_i = 2\xi_i^0 + \xi_i',$$
$$Y_i + \eta_i = 2\eta_i^0 + 2m_i mp\pi + \eta_i'$$

и будем считать V функцией μ' и величин ξ' и η'; функция V будет находиться в тех же самых условиях, что и функция V предыдущего пункта.

Действительно, каково бы ни было μ', функция V и ее первые производные по ξ' и η' обращаются в нуль, когда

$$\xi_i' = \eta_i' = 0.$$

Если рассмотреть совокупность членов V второй степени относительно величин ξ' и η' и считать эту совокупность квадратичной формой, состоящей из суммы квадратов, то мы увидим, что два из коэффициентов при этих квадратах переходят от отрицательных значений к положительным или от положительных значений к отрицательным, когда μ' изменяет знак, и что другие коэффициенты не обращаются в нуль.

Действительно, выражение

$$\frac{M_1}{\sqrt{-1}} \sin \frac{pm\alpha_1 T}{\sqrt{-1}}$$

меняет знак, а другие выражения

$$\frac{M_k}{\sqrt{-1}} \sin \frac{pm\alpha_k T}{\sqrt{-1}}$$

не обращаются в нуль. Коэффициент, который в п. 323 я назвал D, также не обращается в нуль и притом других коэффициентов нет, так как мы имеем только $2n-1$ переменных — переменные (β).

Таким образом, мы находимся в условиях предыдущего пункта и можем утверждать, что уравнения

$$\frac{dV}{d\xi_i'} = \frac{dV}{d\eta_i'} = 0$$

допускают вещественные решения, отличные от решения $\xi_i' = \eta_i' = 0$, или, что то же, что уравнения

$$\frac{dS_{mp}}{d(X_i + \xi_i)} = \frac{dS_{mp}}{d(Y_i + \eta_i)} = 0 \tag{1}$$

допускают вещественные решения, отличные от решений, соответствующих периодическому решению с периодом T.

Но максимумы функции S_{mp} или вообще решения уравнений (1) соответствуют периодическим решениям с периодом mpT.

Таким образом, мы должны заключить, что наши дифференциальные уравнения допускают периодические решения с периодом mpT, отличные от решения с периодом T, сливающиеся с этим решением при $\mu = \mu_0$ и очень мало отличающиеся от него при μ, близком к μ_0.

Если мы обратим внимание на предыдущее рассуждение, то увидим, что не требуется, чтобы периодическое решение с периодом T соответствовало максимуму S_{mp}.

Итак, мы сможем предположить, что $m=1$.

Не требуется даже, чтобы решение с периодом T было устойчивым; достаточно, чтобы один из характеристических показателей α_1 при $\mu = \mu_0$ был равен

$$\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{pT}.$$

Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Если уравнения динамики допускают такое периодическое решение с периодом T, что один из характеристических показателей близок к

$$\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{pT},$$

то они будут также допускать периодические решения с периодом pT, мало отличающиеся от решения с периодом T и сливающиеся с ним, когда характеристический показатель становится равным

$$\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{pT}.$$

Это решения второго рода [15].

Замечание

334. При всех этих рассуждениях предполагают, что S_{mp} — однозначная функция от $X_i+\xi_i$, $Y_i+\eta_i$. Только благодаря этому условию можно утверждать, что все максимумы S_{mp} соответствуют периодическому решению (см. п. 321). Это обстоятельство, на которое следует обратить самое серьезное внимание, представляет препятствие, с которым мы часто встречаемся, когда хотим вывести следствия из теоремы п. 321.

Проверим, действительно ли S_{mp} является однозначной функцией от этих переменных. Мы можем предположить, что $m=1$ согласно тому, что мы только что видели. С другой стороны, S_p, очевидно, является однозначной функцией от величин ξ_i и η_i; она будет также однозначной функцией от $X_i+\xi_i$ и $Y_i+\eta_i$, если только функциональный определитель величин $X_i+\xi_i$ и $Y_i+\eta_i$ относительно ξ_i и η_i не обращается в нуль в рассматриваемой области; так как эта область сводится к близкой окрестности значений

$$\mu=\mu_0, \quad \xi_i=\xi_i^0, \quad \eta_i=\eta_i^0,$$

то достаточно, чтобы функциональный определитель не был равен нулю в этой точке. Этот функциональный определитель записывается в виде (для определенности предполагается, что $n=2$)

$$\begin{vmatrix} \frac{dX_1}{d\xi_1}+1 & \frac{dX_1}{d\eta_1} & \frac{dX_1}{d\xi_2} & \frac{dX_1}{d\eta_2} \\ \frac{dY_1}{d\xi_1} & \frac{dY_1}{d\eta_1}+1 & \frac{dY_1}{d\xi_2} & \frac{dY_1}{d\eta_2} \\ \frac{dX_2}{d\xi_1} & \frac{dX_2}{d\eta_1} & \frac{dX_2}{d\xi_2}+1 & \frac{dX_2}{d\eta_2} \\ \frac{dY_2}{d\xi_1} & \frac{dY_2}{d\eta_1} & \frac{dY_2}{d\xi_2} & \frac{dY_2}{d\eta_2}+1 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, необходимо проверить, что S-уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{dX_1}{d\xi_1}-S & \frac{dX_1}{d\eta_1} & \frac{dX_1}{d\xi_2} & \frac{dX_1}{d\eta_2} \\ \frac{dY_1}{d\xi_1} & \frac{dY_1}{d\eta_1}-S & \frac{dY_1}{d\xi_2} & \frac{dY_1}{d\eta_2} \\ \frac{dX_2}{d\xi_1} & \frac{dX_2}{d\eta_1} & \frac{dX_2}{d\xi_2}-S & \frac{dX_2}{d\eta_2} \\ \frac{dY_2}{d\xi_1} & \frac{dY_2}{d\eta_1} & \frac{dY_2}{d\xi_2} & \frac{dY_2}{d\eta_2}-S \end{vmatrix}=0$$

не имеет корня, равного -1.

Корни этого уравнения, согласно п. 60, равны

$$e^{\alpha_p T},$$

где α — характеристические показатели; следовательно, необходимо проверить, что не имеет места равенство

$$\alpha = \frac{(2k+1)\pi\sqrt{-1}}{pT},$$

где k — целое, но показатель α_1 равен по предположению

$$\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{pT},$$

где k — целое, а другие показатели, вообще говоря, несоизмеримы с $\pi\sqrt{-1}/T$.

Итак, трудности, которая нас интересует, не представится.

Для того чтобы избежать ее, я и предположил в п. 330, *что*

$$\alpha_1 = \frac{2k\pi\sqrt{-1}}{pT} \qquad (k \text{ — целое}),$$

а не

$$\alpha_1 = \frac{k\pi\sqrt{-1}}{pT} \qquad (k \text{ — целое}).$$

Частные случаи

335. Скажем несколько слов о наиболее простых случаях; предположим, что имеются только две степени свободы.

Предположим, что форма, аналогичная той, которую я при анализе п. 331 назвал U_0, однородна и имеет только третью степень относительно x_1 и x_2.

Уравнение

$$\frac{dU_0}{dx_1}\frac{dU_1}{dx_2} - \frac{dU_0}{dx_2}\frac{dU_1}{dx_1} = 0 \tag{1}$$

всегда допускает, как мы это видели, вещественные корни.

Теорема здесь, впрочем, очевидна, поскольку это уравнение третьей степени относительно x_1/x_2. Оно может иметь один или три вещественных корня; предположим сначала для определенности, что оно имеет только один корень.

Тогда, если мы положим

$$x_1 = a_1\rho\cos\varphi + b_1\rho\sin\varphi,$$
$$x_2 = a_2\rho\cos\varphi + b_2\rho\sin\varphi,$$

выбирая здесь коэффициенты a и b таким образом, чтобы U_1 сводилась к $-\rho^2$, то отношение

$$\frac{U_0}{U_1^{3/2}},$$

рассмотренное в п. 331, будет допускать только один максимум и один минимум, когда φ будет изменяться от 0 до 2π; эти максимум и минимум, притом равные и противоположные по знаку, будут соответствовать значениям φ, отстоящим друг от друга на π.

Тогда мы получим

$$U_0 + zU_1 = \rho^3 f(\varphi) - z\rho^2.$$

Функция $f(\varphi)$ имеет максимум и минимум, равные и противоположные по знаку; тогда функция U_0+zU_1 имеет:

при $z > 0$ максимум при $\rho=0$ и два минимакса [16];

при $z < 0$ минимум при $\rho=0$ и два максимума.

По примеру англичан я называю *минимаксом* точку, в которой первые производные обращаются в нуль и нет ни максимума, ни минимума.

Функция V будет вести себя таким же образом, поскольку если z очень мало́, влияют только члены U_0+zU_1.

Следовательно, каково бы ни было z, дифференциальные уравнения будут допускать:

решение с периодом T, первого рода, устойчивое;

решение с периодом pT, второго рода, устойчивое при $z < 0$ и неустойчивое при $z > 0$.

Предположим теперь, что уравнение (1) имеет три вещественных корня.

Функция $f(\varphi)$ будет иметь три максимума и три минимума, попарно равные и противоположные по знаку.

В этом случае U_0+zU_1 и, следовательно V, имеет:

при $z > 0$ максимум при $\rho=0$ и шесть минимаксов;

при $z < 0$ минимум при $\rho=0$ и шесть максимумов.

Таким образом, каково бы ни было z, дифференциальные уравнения будут допускать:

решение с периодом T, первого рода, устойчивое;

три решения с периодом pT, второго рода.

Дальше мы увидим, что с определенной точки зрения не все эти решения являются различными.

Перейдем к немного более сложному случаю и предположим, что U_0 — четвертой степени.

В этом случае уравнение (1) четвертой степени, а так как оно всегда имеет, согласно п. 331, по крайней мере два вещественных корня, то оно будет их иметь два или четыре. Тогда мы будем иметь уже не

$$f(\varphi) = -f(\varphi+\pi),$$

а

$$f(\varphi) = f(\varphi+\pi).$$

Предположим сначала, что имеется только два вещественных корня. Тогда функция $f(\varphi)$ будет иметь один максимум и один минимум, когда φ меняется от 0 до π и столько же, когда φ меняется от π до 2π.

Необходимо различать три случая в зависимости от знаков этих максимума и минимума.

Первый случай. Максимум и минимум положительны.

Функции U_0+zU_1 и V имеют:

при $z>0$ максимум при $\rho=0$, два минимума и два минимакса;

при $z<0$ минимум при $\rho=0$.

Дифференциальные уравнения допускают, кроме решения первого рода, которое существует всегда, два решения второго рода при $z>0$ и не допускают ни одного решения при $z<0$; из этих двух решений одно устойчивое и одно неустойчивое.

Второй случай. Максимум положителен, а минимум отрицателен.

Функции U_0+zU_1 и V имеют:

при $z>0$ максимум при $\rho=0$, два минимакса;

при $z<0$ минимум при $\rho=0$, два минимакса.

Дифференциальные уравнения всегда допускают, кроме решения первого рода, которое устойчиво, неустойчивое решение второго рода.

Третий случай. Сам максимум отрицателен.

Тогда дифференциальные уравнения имеют:

при $z>0$ устойчивое решение первого рода;

при $z<0$ устойчивое решение первого рода и два решения второго рода, из которых одно устойчиво, другое — неустойчиво.

Остается изучить случай, когда уравнение (1) имеет четыре вещественных корня.

Тогда уравнения допускают:

при $z>0$ устойчивое решение первого рода, h неустойчивых решений второго рода, k устойчивых решений второго рода;

при $z<0$ устойчивое решение первого рода, $2-h$ устойчивых решений второго рода, $2-k$ неустойчивых решений второго рода.

В зависимости от знаков максимумов и минимумов функции $f(\varphi)$, целые числа h и k могут принимать следующие значения:

$h=k=2$; $h=2$, $k=1$; $h=2$, $k=0$; $h=1$, $k=0$; $h=k=0$; $h=k=1$.

Глава XXIX

РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

336. Пусть

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,$$
$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$$

двойной ряд переменных и F — какая-нибудь функция этих переменных. Рассмотрим интеграл

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\left(-F+\sum y_i\frac{dx_i}{dt}\right)dt.$$

Вариацию этого интеграла можно записать в виде

$$\delta J=\int\left(-\delta F+\sum\delta y_i\frac{dx_i}{dt}+\sum y_i\frac{d\delta x_i}{dt}\right)dt.$$

Чтобы эта вариация была равна нулю, необходимо сначала, чтобы было

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i},\qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i},\tag{1}$$

что дает нам канонические уравнения, но это условие не является достаточным. Если оно выполнено, то

$$\delta J=\sum\left[y_i\delta x_i\right]_{t=t_0}^{t=t_1}$$

и необходимо еще, чтобы правая часть этого равенства была нулем. Это как раз имеет место, если предположить, что δx_i обращаются в нуль при обоих пределах, т. е. что начальные и конечные значения x_i заданы. В этих условиях интеграл J, называемый *действием*, есть минимум.

Заменим переменные; пусть x'_i, y'_i — новые переменные, и вообразим, что они выбраны таким образом, чтобы выражение

$$\sum y'_i dx'_i-\sum y_i dx_i=dS\tag{2}$$

было полным дифференциалом. Мы видели, что в этом случае замена переменных не изменяет канонической формы уравнений; этот результат является, впрочем, непосредственным следствием различных предложений, которые сейчас последуют; пусть

$$J' = \int_{t_0}^{t_1} \left(-F + \sum y_i' \frac{dx_i'}{dt}\right) dt.$$

Мы имеем

$$J' - J = \int \frac{dS}{dt} dt = S_1 - S_0,$$

где S_0 и S_1 — значения функции S при $t=t_0$ и $t=t_1$.

Таким образом,

$$\delta J' = \delta J + [\delta S]_{t=t_0}^{t=t_1}. \tag{3}$$

Если канонические уравнения (1) удовлетворяются, то мы имеем

$$\delta J = +[\sum y_i \delta x_i]_{t=t_0}^{t=t_1} \tag{4}$$

и, следовательно, в силу (2) и (3)

$$\delta J' = +[\sum y_i' \delta x_i']_{t=t_0}^{t=t_1}. \tag{4bis}$$

Подобно тому как соотношение (4) эквивалентно уравнениям (1), соотношение (4bis) эквивалентно уравнениям

$$\frac{dx_i'}{dt} = \frac{dF}{dy_i'}, \qquad \frac{dy_i'}{dt} = -\frac{dF}{dx_i'}. \tag{1bis}$$

Но мы только что видели, что (4) равносильно (4bis); уравнения (1) эквивалентны уравнениям (1bis), что означает, что, как мы уже знаем, замена переменных не изменяет канонической формы уравнений.

Тогда действие J' будет минимумом, если предположить, что начальные и конечные значения переменных x_i' заданы. Каждой системе канонических переменных соответствует, таким образом, новая форма принципа наименьшего действия.

Уравнения (1) влекут за собой интеграл живых сил

$$F=h, \tag{5}$$

где h — постоянная.

До сих пор мы предполагали два предела t_0 и t_1 заданными; что произойдет, если считать эти пределы переменными? Так как F не зависит явно от времени, то мы не ограничим общности, предполагая, что t_0 постоянно и давая приращение δt_1 только пределу t_1. Предположим, например, что $t_0=0$ и вообразим, что после вариации переменные x_i и y_i

имеют в момент времени $t\ (t_1+\delta t_1)/t_1$ те же значения, которые они имели в момент t_1 до вариации.

До вариации мы будем иметь

$$J = -ht_1 + \sum \int y_i \frac{dx_i}{dt} dt.$$

Но интеграл

$$\int y_i \frac{dx_i}{dt} dt = \int y_i dx_i$$

не зависит от времени; следовательно, его вариация равна нулю. Таким образом, получаем

$$\delta J = -h\delta t_1.$$

Производная от действия J по верхнему пределу интегрирования t_1 равна, следовательно, постоянной энергии h с обратным знаком.

Если эта постоянная равна нулю, действие J снова является минимумом, если считать начальные и конечные значения переменных x_i заданными *и если даже не считать заданными начальное и конечное значения времени* t_0 *и* t_1.

Если заменить F на $F-h$, J заменится на

$$J + h(t_1 - t_0); \tag{6}$$

так как уравнения (1) не изменяются, то это выражение (6) опять есть минимум.

Но если заменить F на $F-h$, постоянная живых сил, которая была равна h, становится нулем; следовательно, выражение (6) есть минимум, даже если мы не считаем t_1 и t_0 заданными.

Действие J есть минимум, каковы бы ни были переменные x_i и y_i; таким образом, оно будет a fortiori минимумом, если на него налагается новое условие, совместное с уравнениями (1).

Наложим, например, условие, чтобы удовлетворялся первый ряд уравнений (1), т. е.

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i},$$

откуда

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left(-F + \sum y_i \frac{dF}{dy_i}\right) dt = \int_{t_0}^{t_1} H dt,$$

если положить

$$H = -F + \sum y_i \frac{dF}{dy_i}.$$

Действие J, определенное таким образом, есть минимум.

Это принцип наименьшего действия, взятый в его гамильтоновой форме.

Предположим теперь, что

$$h=0.$$

Таким образом, мы не будем более считать переменные x_i и y_i независимыми, а подчиним их условию

$$F=0.$$

Это ограничение, совместное с уравнениями (1), не мешает действию J быть минимумом.

Тогда

$$J=\int\sum y_i \frac{dx_i}{dt}\,dt,$$

и, так как h равно нулю, этот интеграл является минимумом, если даже не считать заданными t_1 и t_0.

Тогда наложим условия

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i},$$

откуда найдем величины y_i в функции dx_i/dt

$$y_i=\varphi_i\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ \frac{dx_1}{dt},\ \frac{dx_2}{dt},\ \ldots,\ \frac{dx_n}{dt}\right)$$

или же

$$y_i=\varphi_i\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ \frac{dx_1}{dt},\ \frac{dx_2}{dx_1}\frac{dx_1}{dt},\ \frac{dx_3}{dx_1}\frac{dx_1}{dt},\ \ldots,\ \frac{dx_n}{dx_1}\frac{dx_1}{dt}\right). \tag{7}$$

Подставим вместо y_i их значения (7) в J и в уравнение

$$F=0.$$

Из этого уравнения найдем dx_1/dt в функции величин x_k и dx_k/dx_1. Затем подставим это значение dx_1/dt в выражения (7) и в J; этот последний интеграл примет вид

$$\int\sum y_i\frac{dx_i}{dx_1}dx_1=\int\Phi dx_1,$$

где Φ — функция переменных x_k и производных dx_k/dx_1. Этот интеграл, взятый таким образом в форме, независимой от времени, снова есть минимум. Это принцип наименьшего действия в форме Мопертюи.

Если бы h не было нулем, то мы должны были бы только заменить F на $F-h$.

337. Изучим сначала наиболее важный частный случай. Предположим, что мы имеем

$$F = T - U,$$

где T — однородная функция второй степени относительно переменных y_i, тогда как U не зависит от этих переменных.

Тогда

$$\sum y_i \frac{dF}{dy_i} = 2T, \qquad H = T + U.$$

Согласно принципу Гамильтона, интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt$$

должен быть минимумом.

Посмотрим, какую форму принимает принцип Мопертюи; уравнение живых сил записывается в виде

$$T - U = h.$$

Тогда действие в смысле Мопертюи выражается в виде

$$\int (T + U + h)\, dt.$$

В уравнениях

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i} = \frac{dT}{dy_i}$$

правые части линейны и однородны относительно переменных y_i; следовательно, T — однородная функция второй степени относительно dx_i/dt; пусть тогда $d\tau^2$ означает результат замены в T производных dx_i/dt дифференциалами dx_i; мы получим

$$T = \frac{d\tau^2}{dt^2}$$

и $d\tau^2$ будет квадратичной и однородной формой относительно n дифференциалов dx_i; отсюда выводим

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{T}} = \frac{d\tau}{\sqrt{U + h}}.$$

Тогда выражение действия по Мопертюи имеет вид

$$2 \int d\tau \sqrt{U + h}.$$

338. Чтобы можно было изучить другие частные случаи, положим для краткости

$$x_i' = \frac{dx_i}{dt};$$

найдем y_i из уравнений

$$x'_i = \frac{dF}{dy_i}$$

так, чтобы принять за новые переменные величины x_i и x'_i; обозначим через обычные d производные, взятые по x_i и y_i, и через ∂ производные, взятые по x_i и x'_i.

Мы легко найдем хорошо известные соотношения:

$$y_i = \frac{\partial H}{\partial x'_i}, \qquad \frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{dF}{dx_i},$$

$$F = \sum x'_i \frac{\partial H}{\partial x'_i} - H$$

и увидим, что уравнения (1) эквивалентны уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x'_i} = \frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

При этих условиях исследуем случай, когда H имеет вид

$$H = H_0 + H_1 + H_2,$$

где H_0, H_1, H_2 — однородные функции соответственно степени 0, 1, 2 относительно переменных x'_i.

Тогда мы имеем

$$\sum x'_i \frac{\partial H}{\partial x'_i} = 2H_2 + H_1,$$

$$F = H_2 - H_0,$$

и величины

$$y_i = \frac{\partial H_2}{\partial x'_i} + \frac{\partial H_1}{\partial x'_i}$$

будут линейными функциями, но не однородными относительно x'_i.

Гамильтоново действие сохраняет ту же форму

$$\int H dt.$$

Посмотрим, какой вид примет действие по Мопертюи.

Пусть h — постоянная живых сил; выражение действия по Мопертюи будет иметь вид

$$\int (H + h)\, dt,$$

но его необходимо привести к форме, независимой от времени.

Для этого положим

$$H_2 = \frac{d\tau^2}{dt^2}$$

и

$$H_1 = \frac{d\sigma}{dt}.$$

Функция H_2 является не чем иным, как живой силой, а $d\tau^2$ есть результат замены в живой силе переменных x_i' дифференциалами dx_i. Аналогично, $d\sigma$ представляет собой функцию H_1 после замены в ней x_i' на dx_i; таким образом, это линейная однородная форма относительно дифференциалов dx_i.

Если принять во внимание уравнение живых сил

$$H_2 = H_0 + h,$$

откуда

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{H_0 + h}},$$

то действие по Мопертюи примет вид

$$\int [2d\tau \sqrt{H_0 + h} + d\sigma].$$

Таким образом, принцип Мопертюи приложим к случаю, который нас интересует, как и к случаю абсолютного движения; но здесь имеется существенное различие с точки зрения того, что сейчас последует.

Во всех задачах, с которыми мы встретимся, живая сила T или H_2 существенно положительна; это определенно-положительная квадратичная форма. В случае абсолютного движения (п. 337) действие

$$\int 2d\tau \sqrt{U + h}$$

существенно положительно; оно не изменяется при взаимной перестановке пределов. Напротив, в настоящем случае действие состоит из двух членов; первый

$$\int 2d\tau \sqrt{H_0 + h}$$

всегда положителен и не изменяет знака при перестановке пределов.

Второй

$$\int d\sigma$$

меняет знак, если переставить пределы; таким образом, он может быть положительным или отрицательным.

Если заметить, кроме того, что в некоторых случаях первый член обращается в нуль без того, чтобы обратился в нуль второй член, то мы увидим, что действие не всегда положительно, и это обстоятельство доставит нам в последующем много затруднений.

339. Для того чтобы показать, как предыдущие рассуждения применяются к относительному движению, рассмотрим сначала абсолютное движение системы; итак, пусть

$$H=T+U,$$

и представим себе, что положение системы определено $n+1$ переменными

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \omega,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ достаточны для определения *относительного* положения различных точек системы, а ω — для определения ориентации системы в пространстве.

Если система изолированная, то U будет зависеть только от x_1, $x_2, \ldots, x_n$; T будет однородной квадратичной формой относительно x_1', $x_2', \ldots, x_n'$, ω', коэффициенты которой зависят только от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Тогда мы будем иметь уравнение

$$\frac{dT}{d\omega'}=p,$$

где p есть постоянная; это интеграл площадей.

При этих предположениях пусть J есть гамильтоново действие

$$J=\int_{t_0}^{t_1} H\,dt;$$

если уравнения движения удовлетворяются, мы будем иметь

$$\delta J=\left[\sum \frac{dT}{dx_i'}\delta x_i+\frac{dT}{d\omega'}\delta\omega\right]_{t=t_0}^{t=t_1}.$$

Действие будет минимумом (или, вернее, его первая вариация будет равна нулю), если начальные и конечные значения переменных x_i и ω считать заданными, т. е. если $\delta x_i=\delta\omega=0$ при $t=t_0$ и $t=t_1$.

Предположим теперь, что мы считаем заданными начальные и конечные значения x_i, но не ω; мы получим

$$\delta J=[p\delta\omega]_{t=t_0}^{t=t_1}=p\,[\delta\omega]_{t=t_0}^{t=t_1}.$$

Тогда пусть

$$H'=H-p\omega'$$

и

$$J' = \int H' dt;$$

очевидно, будет

$$\delta J' = 0.$$

Из уравнения $\frac{dT}{d\omega'} = p$ мы находим величину ω', которая является линейной неоднородной функцией от x'_i; мы видим, следовательно, что H' является неоднородной квадратичной функцией относительно x'_i.

Таким образом, H' имеет вид $H_0 + H_1 + H_2$, изученный в п. 338. Следовательно, интеграл J' будет минимумом, если даже начальные и конечные значения ω не считаются заданными.

Притом мы имеем

$$J' = J - p(\omega_1 - \omega_0),$$

где ω_0 и ω_1 — значения ω при $t = t_0$ и $t = t_1$.

340. Предположим теперь, что система отнесена к подвижным осям и подвержена действию сил, которые зависят только от относительного положения системы относительно подвижных осей. Предположим, кроме того, что оси равномерно вращаются с постоянной угловой скоростью ω'.

Эта проблема немедленно сводится к предыдущей; необходимо только приписать подвижным осям очень большой момент инерции таким образом, чтобы угловая скорость оставалась постоянной.

Тогда для абсолютного движения имеем

$$H = T + U = T_1 + T_2 + U.$$

Силовая функция U зависит только от переменных x_i, которые определяют положение системы относительно подвижных осей; живая сила системы T_1 зависит от x_i и является квадратичной формой относительно x'_i и ω'; живая сила подвижных осей T_2 равна

$$\frac{1}{2}\omega'^2,$$

а момент инерции I очень велик.

Тогда получается

$$p = \frac{dT_1}{d\omega'} + I\omega'$$

и

$$H' = H - p\omega' = (T_1 + T_2 + U) - \frac{dT_1}{d\omega'}\omega' - I\omega'^2$$

или

$$H' = T_1 + U - \frac{dT_1}{d\omega'}\omega' - \frac{I\omega'^2}{2}.$$

Но

$$I\omega' = p - \frac{dT_1}{d\omega'}.$$

Так как I и p очень велики по отношению к $dT_1/d\omega'$, то это уравнение приближенно дает

$$\omega' = \frac{p}{I}$$

и точнее

$$\omega' = \frac{p}{I} - \frac{1}{I}\frac{dT_1}{d\omega'}.$$

Кроме того,

$$\frac{I\omega'^2}{2} = \frac{p^2}{2I} - \frac{p\dfrac{dT_1}{d\omega'}}{I} + \frac{1}{2I}\left(\frac{dT_1}{d\omega'}\right)^2.$$

Мы находим таким образом

$$H' = T_1 + U - \frac{p^2}{2I} + \frac{1}{2I}\left(\frac{dT_1}{d\omega'}\right)^2.$$

Предпоследний член в правой части является постоянной; последним можно пренебречь, потому что I очень велико.

Так как можно прибавить к H', ничего не изменяя в принципе Гамильтона, какую угодно постоянную, то мы сможем положить

$$H'' = T_1 + U,$$

а мы знаем, что интеграл

$$J'' = \int H'' dt$$

должен быть минимумом (даже тогда, когда начальное и конечное значения ω не заданы).

В выражении H'' следует считать ω' заданной постоянной; тогда H'' является квадратичной неоднородной функцией от x_i' вида $H_0 + H_1 + H_2$.

Пусть, например, материальная точка массы 1 движется в плоскости, и ее координаты относительно подвижных осей суть ξ и η.

Мы будем иметь

$$T_1 = \frac{(\xi' - \omega'\eta)^2 + (\eta' + \omega'\xi)^2}{2}.$$

Следовательно,

$$H_2 = \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{2}, \quad H_1 = \omega'(\xi\eta' - \xi'\eta), \quad H_0 = \frac{\omega'^2}{2}(\xi^2 + \eta^2) + U.$$

Интеграл

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (H_2 + H_1 + H_0)\, dt$$

будет тогда минимумом, если считать заданными пределы t_0 и t_1, а также начальные и конечные значения ξ и η.

Тогда интеграл живых сил запишется в виде

$$H_2 = H_0 + h,$$

и мы видели, что интеграл

$$J' = \int (H_2 + H_1 + H_0 + h)\, dt = J + h(t_1 - t_0)$$

есть минимум, если даже не считать заданными t_0 и t_1.

Тогда мы находим

$$J' = \int (2H_2 + H_1)\, dt = \int \left[ds\sqrt{2(H_0 + h)} + \omega'(\xi d\eta - \eta d\xi)\right],$$

полагая

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2.$$

Это обобщенный принцип Мопертюи.

В задачах, которые мы будем рассматривать, U будет всегда положительной, и, следовательно, J будет существенно положительным.

Это не всегда будет иметь место относительно J'. Действительно, если h — отрицательно, то мы должны предположить, что точка ξ, η не выходит за пределы области, определенной неравенством

$$H_0 + h > 0.$$

Первый член выражения под знаком интеграла, равный $ds\sqrt{H_0 + h}$, существенно положителен; это не выполнено для второго члена, который меняет знак при перемене направления, в котором предполагается обход траектории.

Если точка ξ, η очень близка к границе области, в которой она заключена, если, следовательно, сумма H_0+h очень мала, то первый член будет очень малым, и знак будет определяться вторым членом.

Итак, J' не является существенно положительным. В этом мы убеждаемся также при помощи уравнения

$$J' = J + h(t_1 - t_0).$$

Если h отрицательно, то первый член J положителен, а второй — отрицателен.

Кинетические фокусы

341. До сих пор, когда я говорил, что *такой-то интеграл есть минимум*, я пользовался сокращенным, но неправильным оборотом речи, который, впрочем, никого не мог ввести в заблуждение; я хотел сказать,

что *первая вариация этого интеграла есть нуль*; это условие необходимо для того, чтобы имел место минимум, но оно недостаточно.

Теперь мы исследуем, каково условие того, чтобы интегралы J и J', которые мы изучили в предыдущих параграфах, *действительно* были минимальны. Это исследование связано с трудным вопросом о вторых вариациях и с изящной теорией кинетических фокусов.

Напомним принципы этих теорий.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — функции от t; пусть $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ — их производные; рассмотрим интеграл

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(x_i, x_i')\, dt,$$

первая вариация которого δJ равна нулю, если считать заданными начальные и конечные значения функций x_i.

Для того чтобы этот интеграл был минимумом, требуется сначала условие, необходимое, но не достаточное, которое я назову условием (A).

Именно, чтобы разность

$$f(x_i, x_i' + \varepsilon_i) - \sum \varepsilon_i \frac{df}{dx_i'},$$

рассматриваемая как функция от ε_i, *была минимумом* [17].

Условие (A) не является достаточным, по крайней мере, если пределы интегрирования не близки. За исключением этого случая, к нему необходимо присоединить другое условие, которое я назову условием (B). Чтобы сформулировать его, мне необходимо сначала напомнить определение кинетических фокусов.

Чтобы

$$\delta J = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы функции x_i удовлетворяли n дифференциальным уравнениям второго порядка, которые я назову уравнениями (C).

Пусть

$$x_i = \varphi_i(t)$$

— решение этих уравнений.

Положим в качестве бесконечно близкого решения

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i$$

и составим уравнения в вариациях, линейные уравнения, которым удовлетворяют ξ_i и которые я назову (D).

Общее решение этих уравнений (D) будет иметь вид

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{k=2n} A_k \xi_{i,k} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Величины A_k есть $2n$ постоянных интегрирования, $\xi_{i,k}$ есть $2n^2$ функций от t, полностью определенных и соответствующих $2n$ частным решениям линейных уравнений (D).

В этих предположениях напишем, что все $\xi_{i,k}$ обращаются в нуль для двух заданных моментов $t=t'$ и $t=t''$; получим $2n$ линейных уравнений, из которых сможем исключить $2n$ неизвестных A_k.

Таким образом, мы получим уравнение

$$\Delta(t', t'')=0,$$

где Δ есть определитель:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \xi'_{1,1} & \xi'_{1,2} & \dots & \xi'_{1,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi'_{n,1} & \xi'_{n,2} & \dots & \xi'_{n,2n} \\ \xi''_{1,1} & \xi''_{1,2} & \dots & \xi''_{1,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi''_{n,1} & \xi''_{n,2} & \dots & \xi''_{n,2n} \end{vmatrix};$$

величины $\xi'_{i,k}$ и $\xi''_{i,k}$ означают результат замены t в функции $\xi_{i,k}$ на t' и на t''.

Если моменты t' и t'' удовлетворяют уравнению $\Delta=0$, мы скажем, что это два *сопряженных момента* и что две точки M' и M'' пространства n измерений, имеющие координатами соответственно

$$\varphi_1(t'), \ \varphi_2(t'), \ \dots, \ \varphi_n(t'),$$

$$\varphi_1(t''), \ \varphi_2(t''), \ \dots, \ \varphi_n(t''),$$

суть две *сопряженные точки*.

Если, кроме того, t'' — тот из моментов, сопряженных с t', который следует за t' и является самым близким к t', мы скажем, что M'' является *фокусом* точки M'.

Теперь мы можем сформулировать условие (B): оно состоит в требовании, чтобы между t_0 и t_1 не лежало ни одного момента, сопряженного с t_0.

Чтобы J было минимумом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (A) и (B).

Отсюда можно вывести одно непосредственное следствие.

Пусть t_0, t_1, t_2, t_3 — четыре момента.

Пусть M_0, M_1, M_2, M_3 — соответствующие точки кривой

$$x_1=\varphi_1(t), \ x_2=\varphi_2(t), \ \dots, \ x_n=\varphi_n(t).$$

Предположим, что M_1 — фокус M_0, а M_3 — фокус M_2.

Если условие (A) выполнено, то может быть

$$t_0 < t_1 < t_2 < t_3,$$

или

$$t_0 < t_2 < t_1 < t_3,$$

или

$$t_2 < t_3 < t_0 < t_1.$$

Но неравенства

$$t_0 < t_2 < t_3 < t_1$$

невозможны, иначе интеграл

$$\int\limits_{t_0}^{t_1-\varepsilon}$$

должен был бы быть минимумом, поскольку выполнено условие (B), а интеграл

$$\int\limits_{t_2}^{t_1-\varepsilon}$$

не был бы минимумом, поскольку условие (B) не было бы для него выполнено.

Это невозможно, поскольку можно варьировать функции x_i между t_2 и $t_1-\varepsilon$, не изменяя их в промежутке от t_0 до t_2.

Легко видеть геометрический смысл предыдущего.

Кривую в пространстве n измерений

$$x_i = \varphi_i(t),$$

представляющую решение уравнений (C), можно назвать траекторией, которую я обозначу через (T).

Кривая

$$x_i = \varphi_i + \xi_i$$

представит бесконечно близкую траекторию.

Пусть через точку M' проведена одна из этих траекторий (T'), бесконечно близких к (T), и эта траектория снова пересекает траекторию (T) в точке M'' (точнее, расстояние M'' от этой траектории будет бесконечно малой высшего порядка); точки M' и M'' будут сопряженными, если, кроме того, точка, которая описывает T', проходит через M' и бесконечно близко от M'' в моменты времени t' и t''.

342. В случае принципа Гамильтона условие (A) выполнено всегда; в самом деле, имеем

$$H = H_0 + H_1 + H_2$$

и H_2 — однородная квадратичная форма относительно x_i'.

Во всех задачах динамики эта квадратичная форма является положительно-определенной.

Если мы заменим x'_i на $x'_i+\varepsilon_i$, H_1 перейдет в

$$H_1(x'_1)+\sum \varepsilon_i \frac{dH_1}{dx'_i},$$

а H_2 заменится на

$$H_2(x'_i)+H_2(\varepsilon_i)+\sum \varepsilon_i \frac{dH_2}{dx'_i},$$

причем

$$\sum \varepsilon_i \frac{dH_0}{dx'_i}=0.$$

Следовательно,

$$H(x'_i+\varepsilon_i)=H_0+H_1+H_2+\sum \varepsilon_i \frac{d(H_0+H_1+H_2)}{dx'_i}+H_2(\varepsilon_i),$$

откуда, наконец,

$$H(x'_i+\varepsilon_i)-\sum \varepsilon_i \frac{dH}{dx'_i}=H+H_2(\varepsilon_i).$$

Левая часть соответствует функции

$$f(x'_i+\varepsilon_i)-\sum \varepsilon_i \frac{df}{dx'_i};$$

так как квадратичная форма $H_2(\varepsilon_i)$ положительно-определенна, мы видим, что это выражение является минимумом при $\varepsilon_i=0$, т. е. условие (A) выполнено.

343. Перейдем к случаю принципа Мопертюи в абсолютном движении. Тогда изучаемый интеграл записывается в виде

$$\int d\tau,$$

где $d\tau^2$ — положительно-определенная квадратичная форма относительно дифференциалов dx_i.

Примем на мгновение x_1 в качестве независимой переменной; интеграл примет вид

$$\int \frac{d\tau}{dx_1}\,dx_1,$$

где $(d\tau/dx_1)^2$ — полином второй степени P, неоднородный (но существенно положительный) относительно dx_i/dx_1. Итак, пусть

$$\frac{d\tau}{dx_1}=\sqrt{P\left(\frac{dx_i}{dx_1}\right)}.$$

Речь идет о том, чтобы узнать, является ли

$$\sqrt{P\left(\frac{dx_i}{dx_1}+\varepsilon_i\right)}-\sum \varepsilon_i \frac{d}{dx'_i}\sqrt{P(x'_i)}$$

минимумом при $\varepsilon_i=0$; или, другими словами, положительна ли вторая производная по t от корня

$$\sqrt{P\left(\frac{dx_i}{dx_1}+\varepsilon_i t\right)}.$$

Но каковы бы ни были dx_i/dx_1 и ε_i, мы будем иметь

$$P\left(\frac{dx_i}{dx_1}+\varepsilon_i t\right)=at^2+2bt+c,$$

где a, b, c — независимы от t; вторая производная от корня тогда равна

$$\frac{ac-b^2}{(at^2+2bt+c)^{3/2}}.$$

Так как полином P существенно положителен, то это выражение также всегда положительно, и условие (A) выполнено всегда.

344. Перейдем к принципу Мопертюи в относительном движении. Тогда мы должны рассмотреть интеграл

$$\int\left[ds\sqrt{H_0+h}+\omega'(\xi d\eta-\eta d\xi)\right]$$

или, принимая ξ за независимую переменную,

$$\int d\xi\left[\sqrt{(H_0+h)(1+\eta'^2)}+\omega'(\xi\eta'-\eta)\right].$$

Таким образом, необходимо исследовать вопрос о том, является ли положительной вторая производная по η от

$$\sqrt{(H_0+h)(1+\eta'^2)}+\omega'(\xi\eta'-\eta);$$

но эта производная равна

$$\frac{\sqrt{H_0+h}}{(1+\eta'^2)^{3/2}}.$$

Следовательно, условие (A) выполнено всегда.

Итак, условие (A) выполнено само собой во всех случаях, которые нам предстоит изучить.

Фокусы по Мопертюи

345. Кинетические фокусы не являются совершенно одними и теми же в зависимости от того, рассматриваем ли мы гамильтоново действие или действие по Мопертюи. Чтобы лучше убедиться в этом, предположим,

что имеются только две степени свободы, и пусть x и y — две переменные, которые определяют положение системы и которые мы можем считать координатами точки на плоскости.

Пусть

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t)$$

уравнения траектории (T), которая будет плоской кривой. Положим

$$x = f_1(t) + \xi, \quad y = f_2(t) + \eta$$

и, пренебрегая квадратами ξ и η, составим уравнения в вариациях. Так как они линейны и четвертого порядка, то мы, следовательно, будем иметь

$$\xi = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 + a_4\xi_4,$$
$$\eta = a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + a_3\eta_3 + a_4\eta_4,$$

где a_i — постоянные интегрирования, ξ_i и η_i — функции от t.

Тогда уравнение п. 341

$$\Delta(t', t'') = 0$$

запишется в виде

$$\begin{vmatrix} \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' & \xi_4' \\ \eta_1' & \eta_2' & \eta_3' & \eta_4' \\ \xi_1'' & \xi_2'' & \xi_3'' & \xi_4'' \\ \eta_1'' & \eta_2'' & \eta_3'' & \eta_4'' \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Именно это уравнение и определяет гамильтоновы фокусы.

Это означает, что точка x, y, описывающая траекторию (T), и точка $x+\xi$, $y+\eta$, описывающая бесконечно близкую траекторию (T'), разделены в два различных момента времени, а именно, в моменты t' и t'', бесконечно малым расстоянием высшего порядка.

Но это не те условия, которые должны выполняться для фокусов по Мопертюи. Две точки траектории (T), а именно, две точки M' и M'', соответствующие моментам t' и t'', должны находиться на бесконечно малом расстоянии высшего порядка от траектории (T').

Однако необязательно, чтобы подвижная точка, пробегающая (T'), проходила точно в момент t'', например, бесконечно близко от M''. Зато постоянная живых сил должна иметь одно и то же значение для (T) и (T'); это последнее условие не налагается на гамильтоновы фокусы.

Одно из решений уравнений в вариациях есть

$$\xi = f_1'(t), \quad \eta = f_2'(t).$$

Следовательно, мы можем предположить

$$\xi_1' = f_1'(t'), \quad \eta_1' = f_2'(t'), \quad \xi_1'' = f_1'(t''), \quad \eta_1'' = f_2'(t'').$$

Таким образом, определены две функции ξ_1 и η_1.

С другой стороны, разность между постоянной живых сил для (T) и постоянной живых сил для (T') бесконечно мала; очевидно, она является линейной функцией четырех бесконечно малых постоянных a_1, a_2, a_3, a_4.

Не ограничивая общности, мы можем предположить, что эта разность в точности равна a_4.

Тогда условием того, чтобы значение постоянной живых сил было одним и тем же для (T) и (T'), будет $a_4=0$ или же

$$\xi = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3,$$
$$\eta = a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + a_3\eta_3.$$

Теперь при $t=t'$ функции ξ и η должны быть нулями, откуда вытекают уравнения

$$a_1\xi_1' + a_2\xi_2' + a_3\xi_3' = 0,$$
$$a_1\eta_1' + a_2\eta_2' + a_3\eta_3' = 0.$$

С другой стороны, значения $x+\xi$, $y+\eta$ при $t=t''+\varepsilon$ должны быть теми же (с точностью до бесконечно малых высшего порядка), что и значения x и y при $t=t''$, что записывается в виде

$$(\varepsilon + a_1)\xi_1'' + a_2\xi_2'' + a_3\xi_3'' = 0,$$
$$(\varepsilon + a_1)\eta_1'' + a_2\eta_2'' + a_3\eta_3'' = 0,$$

откуда исключением находим

$$\begin{vmatrix} \xi_2' & \xi_3' & \xi_1' & 0 \\ \eta_2' & \eta_3' & \eta_1' & 0 \\ \xi_2'' & \xi_3'' & 0 & \xi_1'' \\ \eta_2'' & \eta_3'' & 0 & \eta_1'' \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Раскрывая этот определитель, находим

$$\begin{vmatrix} \xi_1'\eta_2' - \xi_2'\eta_1' & \xi_1'\eta_3' - \xi_3'\eta_1' \\ \xi_1''\eta_2'' - \xi_2''\eta_2'' & \xi_1''\eta_3'' - \xi_3''\eta_1'' \end{vmatrix} = 0$$

и, полагая

$$\frac{\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2}{\xi_1\eta_3 - \eta_1\xi_3} = \zeta(t),$$

приводим уравнение (2) к виду

$$\zeta(t') = \zeta(t''). \tag{3}$$

Приложение к периодическим решениям

346. Если мы имеем дело с периодическим решением с периодом 2π, функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ из предыдущего параграфа будут периодическими с периодом 2π; то же будет и для

$$\xi_1 = f_1'(t), \qquad \eta_1 = f_2'(t).$$

Кроме того, уравнения в вариациях согласно главе IV будут допускать другие частные решения, имеющие вид

$$\begin{aligned} \xi &= e^{\alpha t}\varphi_2(t), & \eta &= e^{\alpha t}\psi_2(t); \\ \xi &= e^{-\alpha t}\varphi_3(t), & \eta &= e^{-\alpha t}\psi_3(t); \\ \xi &= \varphi_4(t) + \beta t f_1'(t), & \eta &= \psi_4(t) + \beta t f_2'(t). \end{aligned}$$

В этих уравнениях β — постоянная, α и $-\alpha$ — характеристические показатели, φ и ψ — периодические функции.

Пусть

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = \text{const}$$

— уравнение живых сил; мы должны будем иметь

$$\frac{dF}{dx}\xi + \frac{dF}{dy}\eta + \frac{dF}{d\frac{dx}{dt}}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dF}{d\frac{dy}{dt}}\frac{d\eta}{dt} = A,$$

где A — постоянная. Если в этом уравнении заменим ξ и η на $e^{\alpha t}\varphi_2$, $e^{\alpha t}\psi_2$, то левая часть станет периодической функцией от t, умноженной на $e^{\alpha t}$, а так как она должна быть постоянной, то необходимо, чтобы она была нулем.

Следовательно, получим

$$A = 0.$$

Это означает, что две бесконечно близкие траектории, уравнения которых суть

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t)$$

и

$$x = f_1(t) + e^{\alpha t}\varphi_2(t), \quad y = f_2(t) + e^{\alpha t}\psi_2(t),$$

соответствуют одному и тому же значению постоянной живых сил.

То же самое можно было бы показать для траектории, уравнение которой есть

$$x = f_1(t) + e^{-\alpha t}\varphi_3(t), \quad y = f_2(t) + e^{-\alpha t}\psi_3(t).$$

Итак, ничто не мешает положить

$$\xi_2 = e^{\alpha t}\varphi_2, \quad \eta_2 = e^{\alpha t}\psi_2,$$
$$\xi_3 = e^{-\alpha t}\varphi_3, \quad \eta_3 = e^{-\alpha t}\psi_3.$$

Тогда $\zeta(t)$ имеет следующий вид:

$$\zeta(t) = e^{2\alpha t} G(t),$$

где $G(t)$ — периодическая функция.

Случаи устойчивых решений

347. Теперь мы должны различать два случая:

1. Решение устойчиво, и α^2 отрицательно. В этом случае ξ_2 и ξ_3, η_2 и η_3 комплексные сопряженные; ζ и G имеют модули, равные единице. Мы сейчас сделаем три предположения, которые оправдаем дальше.

1) Предположим сначала, что $G(t)$ никогда не обращается ни в нуль, ни в бесконечность;

2) что вещественная функция

$$t + \frac{1}{2\alpha}\log G(t) = \tau$$

является также монотонно возрастающей;

3) предположим, кроме того, что $G(t)$ — периодическая функция.

Тогда, обозначая через τ' и τ'' два значения τ, соответствующие t' и t'', уравнение (3) можно написать в виде

$$\tau'' - \tau' = \frac{ki\pi}{\alpha} \qquad (\text{где } k \text{ — целое}).$$

Каждому значению t соответствует одно-единственное значение τ, а каждому значению τ — одно-единственное значение t; таким образом, мы не можем иметь $k=0$ без того, чтобы было $t'=t''$; и если мы хотим, чтобы было $t'' > t'$, необходимо, чтобы k было положительным.

Полагая $k=1$, дадим разности $t''-t'$ наименьшее значение; тогда получим

$$\tau'' - \tau' = \frac{i\pi}{\alpha},$$

и точка M'' является фокусом M'.

Но важно отметить одну вещь.

Чтобы предыдущее рассуждение было применимо, необходимо, чтобы $\log G(t)$ был периодической функцией, однако, вообще говоря, все, что

мы знаем—это то, что $G(t)$ — периодическая функция, а отсюда просто вытекает, что

$$\log G(t)$$

увеличивается на кратное $2i\pi$, например на $2ki\pi$, когда t увеличивается на 2π. Тогда разность

$$\log G(t) - ikt$$

является периодической функцией.

Положим в таком случае

$$G'(t) = G(t) e^{-ikt},$$

$$\alpha' = \alpha + \frac{ik}{2};$$

получим

$$\zeta(t) = e^{2\alpha t} G(t) = e^{2\alpha' t} G'(t).$$

Мы положим тогда не

$$\tau = t + \frac{1}{2\alpha} \log G(t),$$

а

$$\tau = t + \frac{1}{2\alpha'} \log G'(t);$$

так как $\log G'(t)$ будет периодической функцией, предыдущие выводы сохраняются, уравнение (3) запишется в виде

$$\tau'' - \tau' = \frac{mi\pi}{\alpha'} \qquad (m \text{ — целое})$$

и, кроме того, M'' будет фокусом M', если

$$\tau'' - \tau' = \frac{i\pi}{\alpha'}.$$

348. Таким образом, оказывается доказанным одно из наших трех предположений, что $\log G(t)$ должен быть периодическим. Теперь я говорю, что функция τ должна быть, как мы это предположили, монотонно возрастающей.

Предположим, в самом деле, что эта функция допускает максимум τ_0 при $t = t_0$; тогда мы сможем найти два таких момента t_1' и t_1'', что соответствующие значения τ_1' и τ_1'' функции τ равны друг другу, и два других таких момента t_2' и t_2'', что $\tau_2' = \tau_2''$; наконец, таких, что эти пять моментов, и притом очень близких друг к другу, удовлетворяют неравенствам

$$t_2' < t_1' < t_0 < t_1'' < t_2''.$$

Тогда t_1'' будет фокусом t_1', t_2'' — фокусом t_2'; но мы видели выше, что подобные неравенства невозможны, когда выполнено условие (B).

Я говорю теперь, что $G(t)$ не может обратиться в нуль; действительно, мы имеем

$$\zeta(t) = \frac{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1}{\xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1}.$$

Числитель и знаменатель $\zeta(t)$ комплексные сопряженные; если один из них обращается в нуль, то другой также обращается в нуль, так что функция $\zeta(t)$ не может стать ни нулем, ни бесконечностью.

Таким образом, оказываются доказанными все наши предположения.

Неустойчивые решения

349. Предположим теперь, что решение неустойчиво, а α^2 — положительно; в этом случае ξ_2, η_2, ξ_3, η_3, ζ, α, G — вещественны.

По той же причине, что и выше, функция τ будет монотонно возрастающей; однако возможны два предположения:

1. *Либо* $\zeta(t)$ *не может обратиться ни в нуль, ни в бесконечность* и монотонно возрастает от 0 до $+\infty$, когда t возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

Тогда *ни одна точка периодического решения не имеет фокуса по Мопертюи.*

2. *Либо* $\zeta(t)$ *может обратиться в нуль* при $t=t_0$; тогда она будет обращаться в нуль также при $t=t_0+2\pi$, а так как она не может иметь ни максимума, ни минимума, то необходимо, чтобы она обращалась в бесконечность в интервале. Аналогично, если $\zeta(t)$ может обратиться в бесконечность, необходимо также, чтобы она могла обратиться в нуль.

Итак, предположим, для определенности, что $\zeta(t)$ обращается в бесконечность при

$$t = t_0, \quad t_1, \quad t_0 + 2\pi$$

и при значениях t, которые отличаются от них на кратное 2π, и обращается в нуль при

$$t = t_0', \quad t_1', \quad t_0' + 2\pi.$$

При этом я предполагаю

$$t_0 < t_0' < t_1 < t_1' < t_0 + 2\pi.$$

При этом, когда t возрастает от t_0 до t_1, или от t_1 до t_2, или от t_2 до $t_0+2\pi$, функция $\zeta(t)$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

Замкнутая траектория (T), которая представляет периодическое решение, будет, следовательно, разделена на две дуги, концы которых будут соответствовать значениям t

$$t_0, \quad t_1, \quad t_0 + 2\pi.$$

Каждая точка одной из дуг будет иметь свой первый фокус на следующей дуге.

Я прибавляю, что точки, соответствующие значениям t

$$t_0,\ t'_0,\ t_1,\ t'_1,$$

совпадают со своими вторыми фокусами.

Пусть t'' — значение t, соответствующее любой точке (T), а t''_n — значение t, которое соответствует ее n-му фокусу; мы будем иметь

$$\lim \frac{t''_n - t''}{n} = \frac{2\pi}{2}.$$

Но это не все; мы получим

$$e^{2\alpha t''_n} G(t''_n) = e^{2\alpha t''} G(t'').$$

Если n очень велико и если $G(t'')$ не есть бесконечность, то, так как разность $t''_n - t''$ очень велика и так как мы предполагаем α положительным, $G(t''_n)$ будет очень малым, так что если t'' заключено, например, между t_0 и t_1, то разность

$$t''_{2n} - 2n\pi$$

будет стремиться к t'_0, когда n будет неограниченно возрастать.

Если n стремится к $-\infty$, эта разность будет стремиться к t_0 или к t_1 в зависимости от того, будет ли t'' заключено между t_0 и t'_0 или между t'_0 и t_1. Я добавлю, что разность $t''_{2n} - 2n\pi$ либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает с n.

Значения t'_0, t'_1 соответствуют точкам, в которых

$$\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0;$$

но разность $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1$ является периодической функцией, умноженной на $e^{\alpha t}$, а периодическая функция должна обращаться в нуль в течение периода четное число раз.

Следовательно, замкнутая траектория (T) будет разделена точками t_0, t_1, $t_0+2\pi$ на определенное число дуг, и *это число всегда будет четным.*

350. С интересующей нас точки зрения неустойчивые периодические решения могут, следовательно, быть разделены на две категории. Однако можно было бы поставить вопрос о том, действительно ли существуют эти две категории. Таким образом, следует привести соответствующие примеры.

Пусть ρ и ω — полярные координаты подвижной точки на плоскости; уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \rho + \frac{dU}{d\rho}, \quad \rho^2 \frac{d^2\omega}{dt^2} + 2\rho \frac{d\rho}{dt}\frac{d\omega}{dt} = \frac{dU}{d\omega}. \tag{1}$$

Предположим, что при $\rho=1$ имеем

$$U=0, \quad \frac{dU}{d\omega}=0, \quad \frac{dU}{d\rho}=-1, \quad \frac{d^2U}{d\rho^2}=\varphi(\omega);$$

уравнения (1) будут допускать решение

$$\rho=1, \quad \omega=t,$$

и это решение будет соответствовать замкнутой траектории, которая будет окружностью.

Положим

$$\rho=1+\zeta, \quad \omega=t+v$$

и составим уравнения в вариациях; они запишутся в виде

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\zeta+2\frac{dv}{dt}+\zeta\varphi(t), \quad \frac{d^2v}{dt^2}+2\frac{d\zeta}{dt}=0.$$

Второе интегрируется немедленно:

$$\frac{dv}{dt}+2\zeta=\text{const},$$

но постоянная в правой части должна быть нулем, если мы хотим, чтобы постоянная живых сил имела одно и то же значение для траектории (T) и для бесконечно близкой траектории.

Следовательно, если мы заменим dv/dt на -2ζ, то первое уравнение в вариациях примет вид

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\zeta[\varphi(t)-3]. \tag{2}$$

Уравнение (2), которое нам остается проинтегрировать, является линейным уравнением с периодическим коэффициентом.

Такие уравнения были рассмотрены в пунктах 29 и 189 (см., кроме того, главу IV, passim *).

Мы знаем, что они допускают два решения следующего вида:

$$\zeta=e^{\alpha t}G(t), \quad \zeta=e^{-\alpha t}G_1(t),$$

где G и G_1 — периодические функции.

Мы сейчас найдем примеры всех случаев, которые различали выше. Предположим сначала, что φ сводится к постоянной A (случай центральных сил).

Если $A<3$, то будем иметь устойчивое периодическое решение.

Если $A>3$, то на (T) не будет фокусов по Мопертюи и получим неустойчивое периодическое решение первой категории.

* В разных местах. (*Прим. ред.*).

Мне остается показать, что можно также получить неустойчивые периодические решения второй категории.

Решение будет неустойчивым второй категории, если G обращается в нуль таким образом, что отношение

$$e^{2\alpha t}\frac{G}{G_1},$$

соответствующее функции $\zeta(t)$ предыдущих параграфов, может обращаться в нуль и, следовательно, в бесконечность.

Но, очевидно, можно построить периодическую функцию G, удовлетворяющую следующим условиям:

1) она будет допускать два и только два простых нуля;

2) эти нули будут обращать в нуль также выражение

$$\frac{d^2G}{dt^2}+2\alpha\frac{dG}{dt}.$$

Отсюда вытекает, что всякий раз, когда

$$\zeta=e^{\alpha t}G$$

обращается в нуль, ее вторая производная будет также обращаться в нуль таким образом, что отношение

$$\frac{1}{\zeta}\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\varphi-3$$

будет оставаться конечным.

Очевидно, можно построить функцию G, удовлетворяющую этим условиям; периодическая функция φ, построенная при помощи этой функции G, будет соответствовать неустойчивому периодическому решению второй категории.

В качестве примера функции G, удовлетворяющей этому условию, мы можем взять

$$G=\sin t-\frac{\alpha}{4}(\cos t-\cos 3t).$$

Эта функция обращается в нуль при $t=0$ и $t=\pi$; она не имеет других нулей, если

$$\alpha<\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

При этом при $t=0$ и при $t=\pi$ мы имеем

$$\frac{d^2G}{dt^2}+2\alpha\frac{dG}{dt}=0.$$

Чтобы отношение G/G_1 обратилось в нуль, недостаточно, чтобы обратилось в нуль G, необходимо еще, чтобы G_1 в нуль не обращалось.

Но это как раз и имеет место, так как если бы G и G_1 обратились в нуль одновременно, то два решения

$$\zeta = e^{\alpha t} G(t), \qquad \zeta = e^{-\alpha t} G_1(t)$$

могли бы отличаться друг от друга только постоянным множителем (поскольку они удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению второго порядка), а это нелепо.

351. Факт, на который я хотел бы обратить внимание, состоит в том, что неустойчивые решения первой и второй категории образуют два таких непересекающихся множества, что нельзя перейти от одного к другому непрерывным образом, не переходя через устойчивые решения.

Ограничимся сначала частным случаем предыдущего параграфа и снова возьмем уравнение (2)

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \zeta\,[\varphi - 3].$$

Будем варьировать непрерывным образом функцию φ и посмотрим, можно ли непосредственно перейти от неустойчивого решения первой категории к неустойчивому решению второй. Для этого необходимо, чтобы вещественная функция G сначала не могла обращаться в нуль, а затем могла стать нулем. Таким образом, мы перешли бы от случая, когда все корни уравнения $G=0$ мнимые, к случаю, когда его корни вещественны. В момент перехода оно имело бы один двойной корень или, вообще, корень кратности $2m$.

Этот нуль, который будет для G порядка $2m$, будет порядка $2m-1$ для dG/dt, порядка $2m-2$ для d^2G/dt^2, так что выражение

$$\frac{\dfrac{d^2G}{dt^2} + 2\alpha\dfrac{dG}{dt} + \alpha^2 G}{G}$$

обратится в бесконечность, что невозможно, поскольку оно равно $\varphi - 3$.

Напротив, можно перейти от устойчивого решения к неустойчивому решению той или иной категории.

Действительно, для устойчивого решения функция G мнимая. В момент, когда решение становится неустойчивым, мнимая часть G становится тождественным нулем; если в этот момент вещественная часть G имеет нули, мы перейдем к неустойчивому решению второй категории; если эта вещественная часть никогда не обращается в нуль, мы перейдем к не устойчивому решению первой категории.

При этом нет никаких затруднений для перехода от случая, когда все корни уравнения

вещественная часть $G=0$

мнимы, к случаю, когда корни этого уравнения вещественны, лишь бы в момент перехода мнимая часть G не была нулем.

352. Чтобы лучше пояснить предыдущее, я вернусь сейчас снова к примеру, который нам уже знаком.

Возвратимся к уравнению Гильдена, т. е. к уравнению (1) п. 178. Мы дадим этому уравнению номер (3) и запишем его в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2}=x(-q^2+q_1\cos 2t). \qquad (3)$$

Мы видим, что оно имеет ту же форму, что и уравнение (2). Это уравнение имеет, как и уравнение (2), два интеграла вида

$$e^{\alpha t}G,\ e^{-\alpha t}G_1,$$

которые мы писали в обозначениях п. 178 в виде

$$e^{iht}\varphi_1(t),\quad e^{-iht}\varphi_2(t).$$

Случай вещественного h соответствует тогда случаю устойчивых решений, а случай комплексного h — случаю неустойчивых решений.

Мы рассмотрели также два замечательных интеграла; первый — *четный* $F(t)$

$$[F(0)=1,\ F'(0)=0];$$

второй — *нечетный* $f(t)$

$$[f(0)=0,\ f'(0)=1]$$

и нашли условия

$$F(\pi)f'(\pi)-f(\pi)F'(\pi)=1,$$

$$F(\pi)=f'(\pi)=\cos h\pi.$$

Я ссылаюсь теперь на рисунок на стр. 543 (том II *), на котором, считая q и q_1 прямоугольными координатами точки, мы отделили области, соответствующие устойчивым решениям, от тех, которые соответствуют неустойчивым решениям. Эти последние заштрихованы.

Эти различные области отделены друг от друга четырьмя аналитическими кривыми, уравнения которых я дал на стр. 541 (том II).

Вот эти уравнения:

$$F(\pi)=1,\qquad F'(\pi)=0, \qquad (\alpha)$$

$$F(\pi)=1,\qquad f(\pi)=0 \qquad (\beta)$$

$$F(\pi)=-1,\qquad F'(\pi)=0, \qquad (\gamma)$$

$$F(\pi)=-1,\qquad f(\pi)=0 \qquad (\delta)$$

* См. т. I настоящего издания. (*Прим. ред.*).

Какой категории принадлежат неустойчивые решения, которые соответствуют нашим заштрихованным областям? Прежде всего, ясно, что все неустойчивые решения, которые соответствуют одной из этих областей, одной и той же категории. Это немедленно вытекает из предыдущего.

Но в точке одной из кривых (β) и (δ) функция G сводится к $f(t)$, а эта функция может обратиться в нуль, поскольку она нечетная. Таким образом, если область ограничена дугой одной из кривых (β) и (δ), то соответствующие решения будут второй категории.

Но то же относится ко всем нашим областям. Следовательно, все наши неустойчивые решения второй категории.

Легко преобразовать пример таким образом, чтобы иметь решения двух категорий. Достаточно заменить q^2 на q, так чтобы этот коэффициент мог стать отрицательным.

Тогда уравнение (3) записывается в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x(-q + q_1 \cos 2t). \tag{3bis}$$

Примем снова q и q_1 за прямоугольные координаты и построим фигуру, аналогичную фигуре на стр. 543. Часть фигуры, расположенная справа от оси q_1 со стороны положительных q, будет аналогична фигуре на стр. 543. Но слева от оси q_1 со стороны отрицательных q мы будем иметь заштрихованную область, ограниченную чем-то вроде параболы, касающейся оси q_1.

Заштрихованные области справа будут соответствовать — мы только что это видели — решениям второй категории; но этого не будет для заштрихованной области слева.

Чтобы убедиться в этом, достаточно положить $q_1 = 0$, откуда

$$x = e^{t\sqrt{-q}}; \quad \alpha = \sqrt{-q}; \qquad G = 1.$$

353. Я опять провел анализ только в частном случае. Чтобы распространить его на общий случай, я покажу сейчас, что мы всегда приходим к уравнению того же вида, что и уравнение (2) предыдущего параграфа.

Рассмотрим сначала случай абсолютного движения; если U — силовая функция и если x и y — декартовы координаты точки на плоскости, то уравнения движения запишутся в виде

$$x'' = \frac{dU}{dx}, \qquad y'' = \frac{dU}{dy} \tag{1}$$

а уравнения в вариациях —

$$\xi'' = \frac{d^2U}{dx^2}\xi + \frac{d^2U}{dx\,dy}\eta, \tag{2}$$

$$\eta'' = \frac{d^2U}{dx\,dy}\xi + \frac{d^2U}{dy^2}\eta.$$

Для большей краткости я обозначаю штрихами дифференцирование по t. Так, ξ'' представляет здесь $d^2\xi/dt^2$, а не значение ξ при $t=t''$, как в п. 341.

Интеграл живых сил запишется в виде

$$\frac{x'^2+y'^2}{2}=U+h,$$

а соответствующий интеграл уравнений (2) —

$$x'\xi'+y'\eta'=\frac{dU}{dx}\xi+\frac{dU}{dy}\eta+\delta h \quad \text{(где } \delta h \text{ — постоянная).}$$

Для приложения принципа Мопертюи необходимо предположить, что

$$\delta h=0,$$

так что будем иметь

$$x'\xi'+y'\eta'=\frac{dU}{dx}\xi+\frac{dU}{dy}\eta$$

или же

$$x'\xi'+y'\eta'=x''\xi+y''\eta. \tag{3}$$

Тогда уравнения (2) и (3) будут допускать три линейно независимых решения, которые мы обозначили в п. 345

$$\begin{aligned} &\xi_1=x', &&\eta_1=y',\\ &\xi_2, &&\eta_2,\\ &\xi_3, &&\eta_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Положим

$$\theta=\xi y'-\eta x'. \tag{5}$$

Тогда, если обозначим через θ_1, θ_2, θ_3 три значения θ, которые соответствуют трем решениям (4), будем иметь $\theta_1=0$, и функция, которую мы назвали в п. 345 $\zeta(t)$, будет не чем иным, как

$$\zeta(t)=\frac{\theta_2}{\theta_3}.$$

Из уравнения (5) находим

$$\theta'=\xi'y'-\eta'x'+\xi y''-\eta x'' \tag{6}$$

и

$$\theta''=\xi y'''-\eta x'''+\xi''y'-\eta''x'+2(\xi'y''-\eta'x'').$$

Но x' и y' удовлетворяют уравнениям (2), так что имеем

$$x''' = \frac{d^2U}{dx^2}x' + \frac{d^2U}{dxdy}y',$$
$$y''' = \frac{d^2U}{dxdy}x' + \frac{d^2U}{dy^2}y'.$$

Заменим в выражении для θ'' производные x''' и y''' значениями, найденными таким образом, а производные ξ'' и η'' их значениями (2); получим

$$\theta'' - \theta\Delta U = 2(\xi' y'' - \eta' x''). \tag{7}$$

Я обозначаю через ΔU (или, короче, через Δ) сумму двух вторых производных $\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2}$.

Легко проверить следующее тождество:

$$2(x'^2 + y'^2)(\xi' y'' - \eta' x'') - 2(x'x'' + y'y'')(\xi y'' - \eta x'' + \xi' y' - \eta' x') +$$
$$+ 2(x''^2 + y''^2)(\xi y' - \eta x') = 2(y''x' - y'x'')(\xi' x' + \eta' y' - \xi x'' - \eta y'')$$

или, учитывая (5), (6), (7) и (3),

$$(x'^2 + y'^2)(\theta'' - \theta\Delta) - 2(x'x'' + y'y'')\theta' + 2(x''^2 + y''^2)\theta = 0. \tag{8}$$

Таково дифференциальное уравнение, которое определяет неизвестную функцию θ.

Мы положим

$$\theta = \varphi\sqrt{x'^2 + y'^2},$$

и наше уравнение примет вид

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = \Delta - \frac{x'x''' + y'y''' + 3x''^2 + 3y''^2}{x'^2 + y'^2} + \frac{3(x'x'' + y'y'')^2}{(x'^2 + y'^2)^2}. \tag{9}$$

Мы получили уравнение того же вида, что и уравнение (2) предыдущего пункта. Таким образом, заключения предыдущего пункта сохраняются; неустойчивое периодическое решение будет второй или первой категории в зависимости от того, может ли функция φ обратиться в нуль или нет. Нельзя перейти прямо от неустойчивого решения первой категории к неустойчивому решению второй категории, не проходя через устойчивые решения.

354. Сохранятся ли опять те же результаты в случае относительного движения?

В этом случае уравнения движения имеют вид

$$x'' - 2\omega y' = \frac{dU}{dx}, \qquad y'' + 2\omega x' = \frac{dU}{dy}, \tag{1bis}$$

где ω означает скорость вращения подвижных осей. Уравнения в вариациях будут

$$\begin{aligned} \xi'' - 2\omega\eta' &= \frac{d^2U}{dx^2}\xi + \frac{d^2U}{dxdy}\eta, \\ \eta'' + 2\omega\xi' &= \frac{d^2U}{dxdy}\xi + \frac{d^2U}{dy^2}\eta. \end{aligned} \tag{2bis}$$

Так как опять будет справедливо уравнение живых сил, то будет также иметь место

$$x'\xi' + y'\eta' = x''\xi + y''\eta - 2\omega\theta. \tag{3bis}$$

Положим снова

$$\theta = \xi y' - \eta x',$$

тогда сохранятся уравнения (5) и (6).

С другой стороны, так как x' и y' должны удовлетворять уравнениям (2bis), мы будем иметь

$$\begin{aligned} x''' - 2\omega y'' &= \frac{d^2U}{dx^2}x' + \frac{d^2U}{dxdy}y', \\ y''' + 2\omega x'' &= \frac{d^2U}{dxdy}x' + \frac{d^2U}{dy^2}y'. \end{aligned}$$

Принимая во внимание эти уравнения, а также уравнения (2bis), и учитывая также уравнение (3bis), можно упростить выражение θ'' и снова найти уравнение

$$\theta'' - \theta\Delta U = 2(\xi' y'' - \eta' x'') - 4\omega^2\theta. \tag{7bis}$$

Так как тождество из предыдущего параграфа справедливо всегда, то мы снова найдем уравнения

$$\begin{aligned} (x'^2 + y'^2)(\theta'' - \theta\Delta) - 2(x'x'' + y'y'')\theta' + 2(x''^2 + y''^2)\theta = \\ = -4\omega^2(x'^2 + y'^2) - 4\omega(x'y'' - x''y') \end{aligned} \tag{8bis}$$

и

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = \Delta - 4\omega^2 - \frac{x'x''' + y'y''' + 3x''^2 + 3y''^2}{x'^2 + y'^2} + \frac{3(x'x'' + y'y'')^2}{(x'^2 + y'^2)^2} - 4\omega\frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}; \tag{9bis}$$

таким образом, ничего не нужно менять в выводах предыдущего параграфа.

355. Однако встает новый вопрос.

Траектория (T) является замкнутой кривой; мы пытались до сих пор определить, соответствует ли дуга AB этой кривой действию, меньшему чем действие вдоль всякой бесконечно близкой дуги, имеющей те же концы.

Но мы должны также спросить себя, соответствует ли вся эта замкнутая кривая целиком действию, меньшему чем действие вдоль бесконечно близкой замкнутой кривой.

Предположим сначала, что точка A кривой (T) имеет свой первый фокус B на кривой (T), так что дуга AB меньше, чем вся замкнутая кривая.

Это имеет место для неустойчивых решений второй категории; мы видели, что для этих решений кривая (T) разделяется на некоторое четное число дуг и что любая точка одной из этих дуг имеет свой первый фокус на следующей дуге; таким образом, исходя из какой-нибудь точки, мы встретим ее первый фокус, прежде чем совершим полный обход кривой (T).

Это имеет место также и для некоторых устойчивых решений.

В случае устойчивых решений мы положили (п. 347)

$$t+\frac{1}{2\alpha}\log G(t)=\tau,$$

и мы видели, что значения τ для точки и ее первого фокуса отличаются на $i\pi/\alpha$. Если, следовательно, α/i больше $^1/_2$, мы встретим фокус точки до того, как совершим полный обход (T).

Если это так, то действие не может быть меньшим для кривой (T), чем для всякой близкой замкнутой кривой.

Пусть, в самом деле, $ABCDEA$ — кривая (T), и предположим, что D — фокус C. Так как E лежит за фокусом точки C, то мы сможем соединить C с E дугой CME, очень близкой к CDE и соответствующей меньшему действию.

Если я обозначу символом (CME) действие, соответствующее дуге CME, то мы будем иметь

$$(CME)<(CDE),$$

и, следовательно,

$$(ABCMEA)<(ABCDEA).$$

Рассмотрим теперь такое устойчивое решение, что

$$\frac{\alpha}{i}<\frac{1}{2}.$$

Я говорю, что действие также не будет меньшим для (T), чем для всякой бесконечно близкой замкнутой кривой.

На рисунке я предполагаю для определенности, что значение α/i заключено между $^1/_4$ и $^1/_6$, так что мы встречаем фокус точки, прежде

чем совершим три обхода и после того, как совершим два обхода (T) (рис. 10).

Пусть $ABCDA$ — кривая (T); фокус F будет находиться между A и B, и мы попадем в него после двух обходов (T).

Так как B находится за этим фокусом, то мы можем соединить A с B такой дугой $AEHNKHMEB$, что $(AEHNKHMEB) < (ABCABCAB)$.

Так как мы не встретим фокуса точки A, описывая дугу AB, не обойдя (T), то мы будем иметь, с другой стороны,

$$(AE+EB) > (AB),$$

откуда, вычитая, получим

$$(EHNKHME) < (ABCABCA)$$

или

$$(EHME)+(HNKH) < 2\,(ABCA).$$

Таким образом, мы должны иметь либо

$$(EHME) < (ABCA),$$

либо

$$(HNKH) < (ABCA).$$

Во всяком случае имеется замкнутая кривая, мало отличающаяся от (T) и соответствующая меньшему действию.

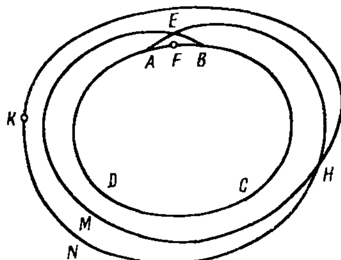
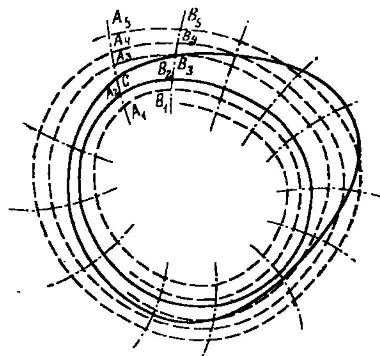


Рис. 10


Рис. 11

Таким образом, *чтобы замкнутая кривая соответствовала действию. меньшему, чем действие вдоль всякой бесконечно близкой замкнутой кривой, необходимо, чтобы эта замкнутая кривая соответствовала неустойчивому периодическому решению первой категории.*

356. Является ли это условие достаточным? Чтобы узнать это, изучим асимптотические решения, соответствующие подобному неустойчивому периодическому решению.

Пусть

$$x=\varphi_0(t),\quad y=\psi_0(t)$$

— уравнения периодического решения, а

$$x=\varphi_0(t)+Ae^{\alpha t}\varphi_1(t)+A^2e^{2\alpha t}\varphi_2(t)+\ldots,$$
$$y=\psi_0(t)+Ae^{\alpha t}\psi_1(t)+A^2e^{2\alpha t}\psi_2(t)+\ldots$$

— уравнения асимптотических решений. Функции $\varphi_i(t)$ и $\psi_i(t)$ будут периодическими функциями t. Мы можем также написать, полагая $Ae^{\alpha t}=u$,

$$x=\varphi_0(t)+u\varphi_1(t)+\ldots=\Phi(t,\ u),$$
$$y=\psi_0(t)+u\psi_1(t)+\ldots=\Psi(t,\ u).$$

Если u достаточно мало́, то x и y будут однозначными функциями от t и u, периодическими по t с периодом 2π.

Кроме того, функциональный определитель

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(t,\ u)}=\frac{d\Phi}{dt}\frac{d\Psi}{du}-\frac{d\Psi}{dt}\frac{d\Phi}{du}$$

не будет обращаться в нуль. В самом деле, при $u=0$ этот определитель приводится к

$$\varphi_0'(t)\psi_1(t)-\psi_0'(t)\varphi_1(t).$$

Но это выражение есть не что иное, как выражение

$$\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1$$

из п. 345, деленное на $e^{\alpha t}$. Значит, оно не обратится в нуль, если неустойчивое решение будет первой категории.

Следовательно, функциональный определитель, не обращаясь в нуль при $u=0$, также не обратится в нуль при достаточно малом u.

Итак, если u достаточно мало, u, $\cos t$ и $\sin t$ будут однозначными функциями от x и y.

Уравнения асимптотических решений записываются в виде

$$x=\Phi(t,\ Ae^{\alpha t}),$$
$$y=\Psi(t,\ Ae^{\alpha t}), \tag{1}$$

и мы видим, что функциональный определитель

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(t,\ A)}=\frac{\partial(\Phi,\ \Psi)}{\partial(t,\ u)}e^{\alpha t}$$

не может обратиться в нуль, что означает, что кривые (1) не имеют двойной точки, не пересекаются между собой и не пересекают траекторию (T) [все это, разумеется, имеет место, если предположить u достаточно малым; это не будет справедливым, если кривые (1) бесконечно продолжить так, чтобы u стало очень большим].

Кривые (1), соответствующие асимптотическим решениям, будут, таким образом, иметь вид спиралей, закручивающихся вокруг (T). Этот вид представлен на рис. 11. Замкнутая траектория (T) здесь представлена сплошной линией, но я должен предупредить, что на рисунке имеются две замкнутые кривые, представленные сплошной линией; из этих двух кривых та, которая лежит внутри другой, представляет (T).

Спиральные кривые (1) представлены пунктирной линией.

Я замечаю, что имеются две системы асимптотических решений, соответствующие двум равным и противоположным по знаку характеристическим показателям.

Эти асимптотические решения второй системы будут спиральными кривыми, аналогичными кривым (1), но закручивающимися в противоположном направлении. Они не представлены на рисунке.

В случае неустойчивого решения второй категории кривые (1) имели бы совсем другой вид; они пересекали бы бесконечное число раз замкнутую траекторию (T), а точки пересечения составили бы бесконечное множество, имеющее конечное и притом четное число предельных точек. Эти предельные точки соответствовали бы значениям t_0, t_1, рассмотренным в п. 349.

357. Вернемся к неустойчивым решениям первой категории и асимптотическим решениям первой системы, представленным на рис. 11. Я задаюсь целью установить, что действие является меньшим для (T), чем для всякой бесконечно близкой замкнутой кривой.

Я рассматриваю произвольную замкнутую кривую, бесконечно мало отличающуюся от (T). Эта кривая, которую я назову (T'), представлена на рис. 11 замкнутой сплошной кривой, лежащей вне (T) и проходящей через точки C и B_3.

Ограничимся сначала случаем абсолютного движения. В этом случае мы имеем следующую хорошо известную теорему.

Пусть A_1B_1, A_2B_2, . . ., A_nB_n — непрерывный ряд дуг траекторий. Концы этих дуг лежат на двух кривых

$$A_1A_2...A_n, \quad B_1B_2...B_n.$$

Если эти две кривые пересекают под прямым углом траектории A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, то мы будем иметь

$$(A_1B_1)=(A_2B_2)=...=(A_nB_n),$$

обозначая всегда символом (A_1B_1) действие, соответствующее дуге A_1B_1.

Построим, таким образом, траектории, ортогональные к кривым (1). Дифференциальным уравнением этих траекторий, которые я назову кривыми (2), будет

$$\left(\frac{d\Phi^2}{dt^2}+\frac{d\Psi^2}{dt^2}\right)dt+\left(\frac{d\Phi}{dt}\frac{d\Phi}{du}+\frac{d\Psi}{dt}\frac{d\Psi}{du}\right)(du+\alpha u dt)+\left(\frac{d\Phi^2}{du^2}+\frac{d\Psi^2}{du^2}\right)\alpha u du=0. \quad (3)$$

Через каждую точку плоскости проходит одна и только одна кривая (2), лишь бы u было достаточно мало. Иначе могло бы быть только в том случае, если бы коэффициенты при dt и du обращались в нуль одновременно, что может иметь место, только если функциональный определитель от Φ и Ψ по t и u обращается в нуль; мы же видели, что это не так.

Кривые (2) представлены на рис. 11 штрих-пунктиром.

Пусть $A_1A_2...A_5$, $B_1B_2...B_5$ — две из этих бесконечно близких кривых; они вырезают на (T) дугу A_2B_2, на кривых (1) — дуги A_1B_1, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5, на (T') — дугу CB_3.

Для моей цели мне достаточно установить, что действие (CB_3) больше, чем для соответствующей дуги A_2B_2 траектории (T).

Мы имеем, в самом деле,

$$(A_2B_2)=(A_3B_3),$$

а в бесконечно малом криволинейном прямоугольном треугольнике A_3CB_3

$$(CB_3) > (A_3B_3).$$

Таким образом, имеем

$$(CB_3) > (A_2B_2),$$

и, следовательно,

$$\text{действие } (T') > \text{действия } (T),$$

что и требовалось доказать.

358. Остается посмотреть, сохраняется ли тот же результат для относительного движения.

Необратимость уравнений составляет, очевидно, значительную разницу по сравнению с предыдущим случаем. Действие для какой-нибудь дуги AB не является более тем же самым, что для той же дуги при обходе ее в противоположном направлении. При этом если какая-нибудь кривая удовлетворяет дифференциальным уравнениям, то это не имеет места для той же кривой при обходе в противоположном направлении.

Наконец, траектории, ортогональные к кривым (1), не обнаруживают более того фундаментального свойства, которое я сформулировал в предыдущем пункте. Но есть другие кривые, которые я сейчас определю и которые обладают этим свойством. Этого достаточно, чтобы результат предыдущего пункта сохранил силу.

В п. 340 мы нашли выражение действия

$$J' = \int \left[ds \sqrt{H_0 + h} + \omega' (\xi d\eta - \eta d\xi)\right].$$

Для простоты я положу $\sqrt{H_0 + h} = F$; я обозначу координаты не через ξ и η, а через x и y, чтобы приблизиться к обозначениям, примененным в предыдущих пунктах, и угловую скорость не через ω', а через ω, отбрасывая штрих, ставший ненужным. Тогда я получу

$$J' = \int \left[F \sqrt{dx^2 + dy^2} + \omega (x dy - y dx)\right],$$

откуда

$$\delta J' = \int \left[\delta F ds + F \frac{dx \delta dx + dy \delta dy}{ds} + \omega (\delta x dy - \delta y dx) + \omega (x \delta dy - y \delta dx)\right]$$

или, интегрируя по частям,

$$\delta J' = \int \left[\delta F ds + 2\omega (\delta x dy - \delta y dx) - \delta x d\left(\frac{F dx}{ds}\right) - \delta y d\left(\frac{F dy}{ds}\right)\right] + \\ + \left[F \frac{dx \delta x + dy \delta y}{ds} + \omega (x \delta y - y \delta x)\right]_0^1. \qquad (4)$$

Окончательное выражение $\delta J'$ состоит, таким образом, из двух частей: определенного интеграла, который должен быть взят в тех же пределах, что и интеграл J', и внеинтегрального члена, который я, как принято, поместил в квадратные скобки с индексами 0 и 1, где выражение в квадратных скобках необходимо вычислить для двух пределов интегрирования, а затем составить разность.

Предположим теперь, что мы приравниваем нулю выражение, фигурирующее под знаком интеграла в правой части равенства (4). Мы получим дифференциальные уравнения, которые будут в точности уравнениями движения и которым будут удовлетворять все наши траектории и, в частности, кривые (1).

Эти уравнения можно получить бесконечным числом способов, потому что δx и δy — две совершенно произвольные функции.

Мы можем сначала предположить $\delta x = 0$, откуда $\delta F = \frac{dF}{dy} \delta y$, и наше уравнение запишется, если разделить на $\delta y ds$, в виде

$$\frac{dF}{dy} - 2\omega \frac{dx}{ds} = \frac{dF}{ds} \frac{dy}{ds} + F \frac{d^2 y}{ds^2}. \qquad (6)$$

Если бы мы предположили, наоборот, что $\delta y = 0$, мы бы нашли

$$\frac{dF}{dx} + 2\omega \frac{dy}{ds} = \frac{dF}{ds} \frac{dx}{ds} + F \frac{d^2 x}{ds^2}.$$

Эти два уравнения эквивалентны, как легко было предвидеть, и, в самом деле, если их сложить после того, как они умножены соответственно на dy/ds и dx/ds, и если учесть соотношения

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1, \qquad \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}=0,$$

то мы придем к тождеству.

Если мы, следовательно, рассмотрим кривые (1), они будут удовлетворять уравнению (6). Если принять во внимание это уравнение, то соотношение (4) примет вид

$$\delta J'=\left[F\frac{dx\delta x+dy\delta y}{ds}+\omega(x\delta y-y\delta x)\right]_0^1.$$

Пусть A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n — непрерывная последовательность дуг, принадлежащих кривым (1), концы которых $A_1A_2\ldots A_n$, $B_1B_2\ldots B_n$ образуют две непрерывные кривые C и C'.

Пусть A_iB_i, $A_{i+1}B_{i+1}$ — две из этих дуг, бесконечно мало отличающиеся друг от друга. Пусть x, y — координаты точки A_i, $x+\delta x$, $y+\delta y$ — координаты бесконечно близкой точки A_{i+1}.

Пусть J' — действие относительно дуги A_iB_i, а $J'+\delta J'$ — действие относительно дуги $A_{i+1}B_{i+1}$.

Если α — угол, составленный с осью x касательной к кривой A_iB_i, которая является кривой (1), и если две кривые C и C' удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$F(\cos\alpha\delta x+\sin\alpha\delta y)+\omega(x\delta y-y\delta x)=0, \tag{7}$$

то мы будем иметь

$$\delta J'=0$$

и, следовательно,

$$(A_1B_1)=(A_2B_2)=\ldots=(A_nB_n).$$

Кривые, определяемые уравнением (7), могут, следовательно, играть ту роль, которую играли в предыдущем пункте траектории, ортогональные к кривым (1).

Таким образом, мы можем опять взять рис. 11 и предположить, что кривые, проведенные штрих-пунктирной линией, представляют не эти ортогональные траектории, а кривые, определенные уравнением (7). Нам не понадобится тогда ничего изменять в доказательстве.

Однако один момент не является более очевидным. В прямоугольном бесконечно малом треугольнике A_3CB_3 я имел

$$(CB_3)>(A_3B_3).$$

Этот треугольник не является теперь прямоугольным, и, с другой стороны, я изменил определение действия. Сохраняется ли это неравенство опять?

Легко видеть, что это неравенство равносильно условиям (A) п. 341, а мы видели в п. 344, что они выполнены. Таким образом, неравенство имеет место, и наше доказательство сохраняется.

В итоге для того чтобы замкнутая кривая соответствовала действию, меньшему, чем действие вдоль всех замкнутых бесконечно близких кривых, необходимо и достаточно, чтобы эта замкнутая кривая соответствовала неустойчивому периодическому решению первой категории.

359. Сказанное нами по поводу классификации неустойчивых решений по двум категориям требует одного замечания.

С другой точки зрения неустойчивые периодические решения можно разделить на два класса. Решениями первого класса являются те, для которых характеристический показатель α веществен, так что $e^{\alpha T}$ вещественно и положительно, где T — период.

Решениями второго класса являются те, для которых этот показатель α имеет мнимую часть, равную $i\pi/T$, так что $e^{\alpha T}$ вещественно и отрицательно.

В предыдущих пунктах мы занимались исключительно неустойчивыми решениями первого класса. Посмотрим, можно ли разделить решения второго класса также на две категории.

Мы можем положить

$$\alpha = \alpha' + \frac{i\pi}{T},$$

где α' — вещественно; и затем мы положим, как в п. 346,

$$\xi_2 = e^{\alpha' t}\varphi_2, \qquad \eta_2 = e^{\alpha' t}\psi_2,$$
$$\xi_3 = e^{-\alpha' t}\varphi_3, \qquad \eta_3 = e^{-\alpha' t}\psi_3,$$

где φ_2, ψ_2, φ_3 и ψ_3 — вещественные функции от t, меняющие знак, когда t изменяется на $t+T$.

Тогда имеем

$$\zeta(t) = e^{2\alpha' t}\frac{\xi_1\psi_2 - \eta_1\varphi_2}{\xi_1\psi_3 - \eta_1\varphi_3} = e^{2\alpha' t}G(t).$$

Числитель и знаменатель G — функции от t, которые меняют знак, когда t меняется на $t+T$.

Таким образом, эти две функции определенно обращаются в нуль и, следовательно, то же имеет место и для

$$\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2, \qquad \xi_1\eta_3 - \eta_1\xi_3.$$

Эти две последние функции удовлетворяют одному и тому же линейному дифференциальному уравнению второго порядка, коэффициенты которого являются периодическими функциями от t, не обращающимися в бесконечность, причем коэффициент при второй производной сводится к постоянной.

Эти две функции не могут обратиться в нуль одновременно; ибо если бы два интеграла подобного линейного уравнения обратились одновременно в нуль, то они могли бы отличаться только постоянным множителем. Но $\zeta(t)$ не постоянная.

Таким образом, и числитель, и знаменатель $\zeta(t)$ обращаются в нуль, но не одновременно; итак, $\zeta(t)$ [и, следовательно, $G(t)$] могут обратиться в нуль и в бесконечность.

Все неустойчивые решения, о которых идет речь, таким образом, второй категории; за этим исключением в предыдущем ничего не нужно менять.

Глава XXX

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

360. Мы сейчас увидим, как можно эффективно построить периодические решения второго рода.

Пусть

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i} \tag{1}$$

— система канонических уравнений; предположим, что они допускают периодическое решение первого рода

$$x_i=\varphi_i(t), \qquad y_i=\psi_i(t). \tag{2}$$

Мы ставим себе целью изучить периодические решения второго рода, которые порождаются решением первого рода (2).

Анализ можно упростить, по крайней мере, при изложении, если привести уравнения (1) к надлежащему виду рядом замен переменных.

Мы предположим только две степени свободы. Когда t увеличится на период, y_1 и y_2 возрастут соответственно на

$$2k_1\pi, \ 2k_2\pi,$$

где k_1 и k_2 — целые.

Я могу сначала предположить, что $k_1=0$; ибо если бы это было не так, то я обратил бы k_1 в нуль заменой переменных из п. 202.

Я могу затем предположить, что периодическое решение (2) приводится к

$$x_1=0, \qquad x_2=0, \qquad y_1=0,$$

ибо, если бы это было не так, то я совершил бы замену переменных из п. 208.

При этих условиях мы увидим сейчас, каким образом можно связать исследование периодических решений второго рода либо с анализом п. 274, либо с анализом п. 44.

361. Напомним результаты, полученные в пунктах 273—277. Пусть канонические уравнения

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{1}$$

содержат параметр λ, и предположим, что они допускают периодическое решение

$$x_i = \varphi_i(t), \quad y_i = \psi_i(t) \tag{2}$$

с периодом T_0, соответствующим значению C_0 постоянной живых сил и $\lambda = 0$. Формально мы удовлетворим уравнениям (1) рядами следующего вида; эти ряды будут расположены по степеням количеств

$$\lambda, \ A_k e^{\alpha_k t}, \ A'_k e^{-\alpha_k t} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Коэффициенты будут периодическими функциями от $t+h$, зависящими, кроме того, от постоянной живых сил C. Период T будет также зависеть от C и от произведений $A_k A'_k$; он приведется к T_0 при

$$C = C_0, \quad A_k A'_k = 0, \quad \lambda = 0.$$

Показатели α_k — постоянные, разложимые по степеням λ и произведений $A_k A'_k$ и зависящие, кроме того, от C; они приводятся к характеристическим показателям решения (2) при

$$C = C_0, \quad A_k A'_k = 0, \quad \lambda = 0.$$

Величины A_k, A'_k и h — постоянные интегрирования.

При изучении асимптотических решений мы предположили, что α_k вещественны, и приравняли нулю одну из двух постоянных A.

Чтобы применить эти же результаты к изучению периодических решений второго рода, мы предположим, что, наоборот, показатели α_k чисто мнимые.

Я предположу только две степени свободы, что позволит отбросить индекс k, ставший ненужным.

Чтобы получить периодические решения, необходимо, чтобы показатель α был соизмерим с $2\pi/T$. Если бы наши ряды сходились, то это условие было бы достаточным; но они расходятся и удовлетворяют уравнениям (2) только с формальной точки зрения. Таким образом, необходим более глубокий анализ; можно было бы применить искусственный прием, аналогичный примененному в пунктах 211 и 218. Таким образом, мы получили бы ряды, которые были бы по отношению к рядам из пунктов 273 и 277 тем же, что и ряды Болина по отношению к рядам в пунктах 125 и 127. Таким образом, мы пришли бы косвенным путем к периодическим решениям второго рода. Но я предпочитаю действовать иначе.

Прямое построение решений

362. Заменами переменных в пунктах 209, 210, 273, 274, применимыми всегда, когда имеется система канонических уравнений, допускающая периодическое решение, мы можем привести наши уравнения к виду уравнений п. 274. В этом пункте мы составили следующие уравнения:

$$\frac{dx_i'}{dt}=\frac{dF'}{dy_i'},\quad \frac{dy_i'}{dt}=-\frac{dF'}{dx_i},\tag{3}$$

$$F'=F_0'+\varepsilon F_1'+\varepsilon^2 F_2'+\ldots,$$

где F_p' — целый многочлен относительно x_1', y_1', x_2', который будет однородным степени $p+2$, если считать x_1' и y_1' величинами первого порядка, а x_2' — второго порядка. Коэффициенты этого полинома являются периодическими функциями от y_2', период которых равен 2π.

Как и в п. 274, мы сейчас отбросим ставшие ненужными штрихи и будем писать F, F_p, x_i, y_i вместо F', F_p', x_i', y_i'.

Тогда мы можем предположить (см. стр. 90—92), что

$$F_0=Hx_2+2Bx_1y_1,$$

где H и B — постоянные; я мог бы предположить также $H=1$, но я этого не буду делать.

Положим затем, как на стр. 92,

$$x_1=e^v\sqrt{u},\qquad y_1=e^{-v}\sqrt{u};$$

уравнения сохранят каноническую форму, и мы получим

$$F_0=Hx_2+2Bu;$$

остальные члены F_1, F_2, ... будут периодическими с периодом 2π как по iv, так и по y_2.

Тогда наши уравнения имеют форму, аналогичную той, которую мы изучали столько раз и, в частности, в пунктах 13, 42, 125 и т. д., где параметр ε играет роль параметра μ. Следовательно, мы можем применить к ним методику п. 44.

Однако возникает одно препятствие: гессиан от F_0 по x_2 и по u равен нулю; а это как раз один из исключительных случаев п. 44.

Это обстоятельство заставляет меня предположить, что F зависит от некоторого параметра λ, и мы будем разлагать одновременно по степеням λ и по степеням ε. Впрочем, мы видели в главе XXVIII, что при изучении периодических решений второго рода всегда следует ввести подобный параметр, поскольку решения второго рода характеризуются как раз тем, что они сводятся к решению первого рода при $\lambda=0$ и отличаются от него при $\lambda\neq 0$.

Только вместо одного произвольного параметра я введу для большего удобства изложения два, которые я назову λ и μ.

Итак, мы предположим, что различные коэффициенты F разложимы по степеням двух параметров λ и μ и что при $\lambda=\mu=0$ постоянные H и $2B$ сводятся к -1 и к $-in$, где n — вещественное рациональное число.

Я предполагаю, что λ и μ можно разложить по возрастающим степеням ε в виде

$$\lambda = \lambda_1\varepsilon + \lambda_2\varepsilon^2 + \ldots; \qquad \mu = \mu_1\varepsilon + \mu_2\varepsilon^2 + \ldots,$$

где λ_1, λ_2, ... — постоянные, которые я оставлю пока неопределенными, но я оставляю за собой их определение в последующих вычислениях.

При этих условиях последуем шаг за шагом вычислениям п. 44. Мы положим

$$\begin{aligned} x_2 &= \xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2 + \ldots, \\ y_2 &= \eta_0 + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \ldots, \\ u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots, \\ v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \ldots. \end{aligned} \tag{4}$$

Эти формулы аналогичны формулам (2) из п. 44.

Величины ξ_k, η_k, u_k, v_k являются, следовательно, периодическими функциями от t; ξ_0 и u_0 — постоянные и

$$\eta_0 = t, \qquad v_0 = i(nt + \varpi),$$

где ϖ — постоянная интегрирования, которую я определю более полно в дальнейшем.

Подставим затем в F вместо λ, μ, x_2, y_2, u и v их разложения по степеням ε; тогда F также будет разложима по степеням ε, и мы получим

$$F = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1 + \varepsilon^2\Phi_2 + \ldots.$$

Я замечу сначала, что Φ_k — однородная функция степени $k+2$, если считать, что ξ_p и u_p степени $p+2$, η_p и v_p степени p, λ_p и μ_p степени p.

При этом она представляет собой целый полином относительно

$$\xi_p,\ u_p,\ \eta_p,\ v_p,\ \lambda_p,\ \mu_p \qquad (p > 0)$$

и относительно

$$\sqrt{u_0}e^{v_0}, \qquad \sqrt{u_0}e^{-v_0}.$$

Эти два последних количества мы считаем порядка 1. Наконец, коэффициенты этого полинома являются периодическими функциями от η_0, период которых равен 2π.

С другой стороны, мы найдем

$$\Phi_k = \Theta_k - \xi_k - inu_k + \lambda_k H_0\xi_0 + 2B_0\mu_k u_0,$$

где H_0 и B_0 — значения $dH/d\lambda$ и $dB/d\mu$ при $\lambda=\mu=0$. (Мы можем предположить, что при $\lambda=\mu=0$ мы имеем $dH/d\mu = dB/d\lambda = 0$.) С другой стороны, Θ_k зависит только от

$$\xi_p,\ \eta_p,\ u_p,\ v_p,\ \lambda_p,\ \mu_p \qquad (p \leqslant k-1).$$

Тогда наши дифференциальные уравнения записываются в виде

$$\frac{d\xi_k}{dt}=\frac{d\Phi_k}{d\eta_0}, \qquad \frac{d\eta_k}{dt}=-\frac{d\Phi_k}{d\xi_0}, \qquad \frac{du_k}{dt}=\frac{d\Phi_k}{dv_0}, \qquad \frac{dv_k}{dt}=-\frac{d\Phi_k}{du_0}. \tag{5}$$

При $k=0$ они приводятся к

$$\frac{d\xi_0}{dt}=\frac{du_0}{dt}=0; \qquad \frac{d\eta_0}{dt}=1; \quad \frac{dv_0}{dt}=in.$$

Они показывают, что ξ_0 и u_0 — постоянные, и что

$$\eta_0=t, \qquad v_0=i(nt+\varpi),$$

где ϖ — постоянная, подлежащая определению.

Мы можем с пользой присоединить к уравнениям (4) и (5) другие уравнения аналогичного вида, которые являются всего лишь их преобразованиями.

Разложим x_1 и y_1 по степеням ε, и пусть

$$\begin{aligned} x_1&=\xi_0'+\varepsilon\xi_1'+\varepsilon^2\xi_2'+\ldots, \\ y_1&=\eta_0'+\varepsilon\eta_1'+\varepsilon^2\eta_2'+\ldots. \end{aligned} \tag{4bis}$$

Разложения (4bis), впрочем, выводятся непосредственно из двух последних разложений (4).

Тогда мы видим, что Φ_k — целый полином относительно количеств

$$\xi_p,\ \eta_p,\ \xi_p',\ \eta_p',\ \lambda_p,\ \mu_p \ \text{(если не считать } \eta_0) \tag{6}$$

и что этот полином однородный степени $k+2$, если считать, что

$$\begin{aligned} &\xi_p \text{ — степени } p+2, \\ &\xi_p',\ \eta_p' \text{ — степени } p+1, \\ &\eta_p,\ \lambda_p,\ \mu_p \text{ — степени } p. \end{aligned}$$

Тогда мы получим уравнения

$$\frac{d\xi_k'}{dt}=\frac{d\Phi_k}{d\eta_0'}, \qquad \frac{d\eta_k'}{dt}=-\frac{d\Phi_k}{d\xi_0'}, \tag{5bis}$$

эквивалентные двум последним уравнениям (5).

Мы замечаем, что $d\Phi_k/d\eta_0$, $d\Phi_k/d\xi_0$, $d\Phi_k/d\xi_0'$, $d\Phi_k/d\eta_0'$ — полиномы того же вида, что и Φ_k, относительно количеств (6) и что при соглашениях, сделанных по поводу степеней, они однородны, первый — порядка $k+2$, второй — порядка k, а два последних — порядка $k+1$.

Кроме того, мы имеем

$$\xi_0'=\sqrt{u_0}\,e^{i(nt+\varpi)}, \qquad \eta_0'=\sqrt{u_0}\,e^{-i(nt+\varpi)}.$$

Заменим в уравнениях (5) и (5bis) ξ_0', η_0' этими значениями и одновременно η_0 на t, где необходимо предположить, что мы сделали $k=1$, и воспользуемся ими для определения ξ_1, η_1, u_1, v_1, ξ_1', η_1'.

Мы имеем таким образом шесть следующих уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{d\eta_1}{dt}=-\frac{d\Phi_1}{d\xi_0}=-\frac{d\Theta_1}{d\xi_0}-\lambda_1 H_0, \qquad \frac{d\xi_1}{dt}=\frac{d\Theta_1}{d\eta_0},\\ &\frac{du_1}{dt}=\frac{d\Theta_1}{dv_0}, \qquad \frac{dv_1}{dt}=-\frac{d\Theta_1}{du_0}-2\mu_1 B_0,\\ &\frac{d\xi_1'}{dt}=\frac{d\Theta_1}{d\eta_0'}-in\frac{du_1}{d\eta_0'}+2B_0\mu_1\frac{du_0}{d\eta_0'}=\frac{d\Theta_1}{d\eta_0'}-in\xi_1'+2B_0\mu_1\xi_0',\\ &\frac{d\eta_1'}{dt}=-\frac{d\Theta_1}{d\xi_0'}+in\frac{du_1}{d\xi_0'}-2B_0\mu_1\frac{du_0}{d\xi_0'}=-\frac{d\Theta_1}{d\xi_0'}+in\eta_1'-2B_0\mu_1\eta_0'. \end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим сначала второе из этих уравнений; правая часть является целым однородным полиномом третьей степени относительно

$$\xi_0,\ \xi_0',\ \eta_0',$$

коэффициенты которого — периодические функции от $\eta_0=t$ с периодом 2π. Так как n — рационально, то наша правая часть также будет периодической функцией от t, от которого она зависит двояким образом — посредством η_0, которое равно t, и посредством ξ_0' и η_0', которые являются функциями от $nt+\varpi$.

Период будет кратным 2π, т. е. равен такому числу 2π, сколько единиц содержится в знаменателе n.

Правую часть можно, таким образом, разложить в ряд Фурье вида

$$\sum A e^{i[pt+q(nt+\varpi)]}, \tag{8}$$

где p и q — целые. Но q не может превысить 3 по абсолютной величине, поскольку правая часть является полиномом третьей степени.

Отсюда вытекает, что, вообще говоря, среднее значение правой части равно нулю. В самом деле, мы получим это среднее значение, сохраняя в ряде (8) члены, не зависящие от t, т. е. такие, что

$$p+qn=0.$$

Я сказал, что $|q|$ не может превзойти 3; я мог бы добавить, что наша правая часть, будучи целым и однородным полиномом степени 3 относительно ξ_0, ξ_0' и η_0', если считать ξ_0 степени 2, может содержать ξ_0' и η_0' только в нечетной степени, т. е. что q должно быть нечетным и может принимать только одно из значений ± 1 или ± 3.

Таким образом, можно получить

$$p+qn=0,$$

только если знаменатель n равен 1 или 3.

Мы исключим первое предположение, при котором n оказалось бы целым числом, однако нам остается рассмотреть два случая.

1. Знаменатель n не равен 3. В этом случае, так как правая часть имеет нулевое среднее значение, уравнение даст немедленно ξ_1 простой квадратурой; тогда ξ_1 определится с точностью до постоянной, которую я назову γ_1, и эта постоянная остается неопределенной вплоть до определения членов высшего порядка; следует заметить, что то же относится и к ϖ.

2. Знаменатель n равен 3. Тогда чтобы уравнение было интегрируемым*, необходимо сделать среднее значение правой части равным нулю; для этого мы распорядимся постоянной ϖ.

Пусть $[\Theta_1]$ — среднее значение Θ_1; заметим, что

$$\left[\frac{d\Theta_1}{d\eta_0}\right] = -n\frac{d\,[\Theta_1]}{d\varpi};$$

таким образом, мы определим ϖ уравнением

$$\frac{d\,[\Theta_1]}{d\varpi} = 0, \tag{9}$$

и одна квадратура даст нам затем ξ_1 с точностью до постоянной γ_1.

Возьмем теперь первое уравнение (7), рассуждая таким же образом. Так как $d\Theta_1/d\xi_0$ будет полиномом не третьего, а первого порядка, и n не будет целым, мы будем уверены, что среднее значение $d\Theta_1/d\xi_0$ равно нулю.

Таким образом, нам достаточно взять $\lambda_1 = 0$, чтобы среднее значение правой части было равно нулю и чтобы η_1 было определено с точностью до постоянной δ_1.

Перейдем теперь к двум последним уравнениям (7); их можно написать в виде

$$\frac{d\xi_1'}{dt} + in\xi_1' = \frac{d\Theta_1}{d\eta_0'} + 2B_0\mu_1\xi_0',$$
$$\frac{d\eta_1'}{dt} - in\eta_1' = -\frac{d\Theta_1}{d\xi_0'} - 2B_0\mu_1\eta_0'.$$

Правые части являются известными периодическими функциями от t; для того чтобы интегрирование было возможным, достаточно, следовательно, чтобы правая часть первого уравнения не содержала членов с e^{-int}, а правая часть второго — членов с e^{int}.

Анализ этого двойного условия проводится легче, если рассмотреть третье и четвертое уравнения (7), которые эквивалентны двум последним и записываются в виде

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{d\Theta_1}{dv_0}, \qquad \frac{dv_1}{dt} = -\frac{d\Theta_1}{du_0} - 2\mu_1 B_0.$$

---

* Здесь и дальше это выражение означает, что решение является периодическим. (*Прим. ред.*).

Необходимо, чтобы средние значения правых частей были равны нулю.

Что касается первого из этих уравнений, то условие выполняется само собой; в самом деле,

$$\left[\frac{d\theta_1}{dv_0}\right]=\frac{d\,[\theta_1]}{d\varpi}.$$

Это последнее выражение равно нулю в силу уравнения (9), если знаменатель n равен 3, а в противном случае — потому что $[\theta_1]$ есть тождественный нуль.

Второе условие записывается в виде

$$\frac{d\,[\theta_1]}{du_0}=-2\mu_1 B_0.$$

Если знаменатель n равен 3, то оно даст нам μ_1.

Если, наоборот, знаменатель не равен 3, то оно даст $\mu_1=0$, потому что $[\theta_1]$ — тождественный нуль.

Таким образом, мы видим, что ξ_1, η_1, ξ_1', η_1' — периодические функции от t и ϖ. Следовательно, они будут разложимы в ряды Фурье вида

$$\sum A e^{i(pt+qnt+q\varpi)}.$$

Однако можно добавить кое-что сверх того; мы должны рассмотреть уравнения следующего вида:

$$\frac{d\xi}{dt}=X=\sum A e^{i(pt+qnt+q\varpi)},$$

$$\frac{d\eta}{dt}+in\eta=Y=\sum B e^{i(pt+qnt+q\varpi)},$$

из которых найдем

$$\xi=\sum\frac{A}{i\,(p+qn)}e^{i(pt+qnt+q\varpi)}+\gamma,$$

$$\eta=\sum\frac{B}{i\,(p+qn+n)}e^{i(pt+qnt+q\varpi)}+\gamma' e^{-int},$$

где γ и γ' — постоянные интегрирования.

Таким образом, если X и Y — целые и однородные полиномы относительно

$$\sqrt{\xi_0},\quad \sqrt{u_0}\,e^{i(nt+\varpi)},\quad \sqrt{u_0}\,e^{-i(nt+\varpi)},$$

то же будет для ξ и для η, по крайней мере, если предположить, что постоянные γ и γ' равны нулю. Если не предполагать, что эти постоянные суть нули, то ξ и η опять будут целыми полиномами, но не однородными.

Применим эти принципы к величинам, которые мы только что вычислили; мы видим, что так как

$$\frac{d\Theta_1}{d\xi_0},\quad \frac{d\Theta_1}{d\eta_0},\quad \frac{d\Theta_1}{d\xi'_0},\quad \frac{d\Theta_1}{d\eta'_0}$$

— полиномы, которые согласно соглашениям, сделанным нами о степенях, имеют соответственно степени

$$1,\ 3,\ 2,\ 2,$$

то же имеет место и для

$$\eta_1,\ \xi_1,\ \eta'_1,\ \xi'_1.$$

Когда мы подставим в Θ_2 вместо этих количеств их значения, степени которых суть соответственно 1, 3, 2, 2, то увидим, что Θ_2 станет полиномом 4-й степени и что

$$\frac{d\Theta_2}{d\xi_0},\quad \frac{d\Theta_2}{d\eta_0},\quad \frac{d\Theta_2}{d\xi'_0},\quad \frac{d\Theta_2}{d\eta'_0}$$

будут полиномами соответственно степеней

$$2,\ 4,\ 3,\ 3.$$

Мы можем обобщить этот результат.

Уравнения (5) и (5bis) позволяют вычислить шаг за шагом неизвестные ξ_k, η_k, ξ'_k, η'_k; мы принуждены были бы остановиться только в том случае, если среднее значение правой части одного из уравнений (5) оказалось отличным от нуля.

Предположим, что это обстоятельство не имеет места; я говорю, что

$$\xi_k,\ \eta_k,\ \xi'_k,\ \eta'_k$$

будут полиномами степеней

$$k+2,\ k,\ k+1,\ k+1$$

относительно

$$\sqrt{\xi_0},\qquad \sqrt{u_0}e^{i(nt+\varpi)},\qquad \sqrt{u_0}e^{-i(nt+\varpi)}, \tag{10}$$

а коэффициенты этих полиномов будут периодическими функциями от t с периодом 2π.

В самом деле, предположим, что это справедливо для всех значений индекса, меньших k.

Мы знаем, что Θ_k — целый полином степени $k+2$ относительно

$$\xi_q,\ \eta_q,\ \xi'_q,\ \eta'_q\quad (q<k) \tag{11}$$

в предположении, что эти количества имеют соответственно степени $q+2$, q, $q+1$, $q+1$. Если, следовательно, мы подставим вместо количеств (11)

полиномы, степени которых относительно количеств (10) как раз равны $q+2$, q, $q+1$, $q+1$, то очевидно, результат подстановки будет полиномом степени $k+2$ относительно количеств (10).

Таким образом, Θ_k — полином степени $k+2$ относительно количеств (10), и по той же причине

$$\frac{d\Theta_k}{d\xi_0}, \quad \frac{d\Theta_k}{d\eta_0}, \quad \frac{d\Theta_k}{d\xi_0'}, \quad \frac{d\Theta_k}{d\eta_0'}$$

будут полиномами степеней

$$k, \ k+2, \ k+1, \ k+1$$

относительно этих же количеств.

Таким образом, то же самое имеет место для правых частей первого, второго, пятого и шестого уравнений (7); следовательно, повторяя предыдущее рассуждение, мы легко увидели бы, что то же самое опять имеет место и для

$$\eta_k, \ \xi_k, \ \eta_k', \ \xi_k',$$

что и требовалось доказать.

Интегрирование уравнений (7) ввело четыре новых постоянных интегрирования. В самом деле, из них мы узнаем ξ_1, η_1, ξ_1', η_1' с точностью до членов

$$\gamma_1, \ \delta_1, \ \gamma_1' e^{-i(nt+\varpi)}, \ \delta_1' e^{i(nt+\varpi)},$$

содержащих четыре произвольные постоянные

$$\gamma_1, \ \delta_1, \ \gamma_1', \ \delta_1'.$$

Мы сохраним только одну из этих постоянных и положим

$$\gamma_1 = \delta_1 = 0, \quad \delta_1' = -\gamma_1'.$$

После этого попытаемся определить

$$\xi_2, \ \eta_2, \ \xi_2', \ \eta_2'$$

при помощи уравнений (5) и (5bis), полагая в них $k=2$.

Сначала необходимо, чтобы правая часть первого уравнения (5) имела нулевое среднее значение; это среднее значение равно

$$\left[\frac{d\Theta_2}{d\eta_0}\right],$$

если, как всегда, применять квадратные скобки для обозначения среднего значения функции. Таким образом, мы получим

$$\left[\frac{d\Theta_2}{d\eta_0}\right] = 0. \tag{9bis}$$

Предположим, что Θ_2 разложено в ряд Фурье вида

$$\sum Ae^{i(pt+qnt+q\varpi)}.$$

Так как Θ_2 — полином четвертой степени, q не может превосходить по абсолютной величине 4, и, следовательно, если знаменатель n больше 4, $[\Theta_2]$ будет тождественным нулем, а условие (9bis) будет выполнено само собой; постоянная ϖ останется неопределенной.

Если знаменатель n равен 2 или 4, условие (9bis) определит ϖ.

Если знаменатель n равен 3, постоянная ϖ уже определена условием (9), и условие (9bis) послужит для определения постоянной γ_1'.

Вычислим в Θ_2 члены, которые зависят от этой постоянной γ_1'.

Очевидно, мы найдем

$$\gamma_1'\left(\frac{d\Theta_1}{d\xi_0'}e^{-i(nt+\varpi)}-\frac{d\Theta_1}{d\eta_0'}e^{i(nt+\varpi)}\right),$$

т. е.

$$\frac{\gamma_1'}{i\sqrt{u_0}}\frac{d\Theta_1}{d\varpi}.$$

Среднее значение этого выражения будет равно

$$\frac{\gamma_1'}{i\sqrt{u_0}}\frac{d\,[\Theta_1]}{d\varpi}.$$

Таким образом, условие (9bis) можно написать $\left(\text{если заметить, что } \left[\frac{d^2\Theta_1}{d\eta_0 d\varpi}\right]=-n\frac{d^2\,[\Theta_1]}{d\varpi^2}\right)$ в виде

$$\frac{\gamma_1'}{i\sqrt{u_0}}\frac{d^2\,[\Theta_1]}{d\varpi^2}+H=0,$$

где H зависит от ϖ, но не от γ_1'.

Если знаменатель n не равен 3, $[\Theta_1]$ равно 0, и условие (9bis) не зависит от γ_1'. Таким образом, если этот знаменатель равен 2 или 4, уравнение (9bis) будет зависеть от ϖ, а не от γ_1', и определит ϖ.

Если знаменатель равен 3, условие (9bis) зависит от γ_1' и определит γ_1' (при этом оно даст $\gamma_1'=0$).

Во всяком случае, определив таким образом ξ_2, постараемся вычислить η_2 при помощи второго уравнения (5). Мы распорядимся λ_2 таким образом, чтобы среднее значение правой части было равно нулю.

Заметим, что λ_2, вообще говоря, не будет нулем; в самом деле,

$$\frac{d\,[\Theta_2]}{d\xi_0},$$

вообще говоря, не будет нулем. Ибо Θ_2, будучи полиномом степени 4, будет содержать один член с ξ_0^2, не зависящий от величин ξ_k' и η_k'. Коэф-

фициент этого члена будет периодической функцией от t периодом 2π, и его среднее значение не будет, вообще говоря, нулем.

Перейдем к уравнениям (5bis) или, что то же самое, к двум последним уравнениям (5). Правые части этих двух последних уравнений должны иметь нулевые средние значения.

Следовательно, мы должны иметь

$$\left[\frac{d\Theta_2}{du_0}\right] = -2\mu_2 B_0,$$

что определяет μ_2. Но

$$2u_0 \frac{d\Theta_2}{du_0} = \xi_0' \frac{d\Theta_2}{d\xi_0'} + \eta_0' \frac{d\Theta_2}{d\eta_0'}$$

— полином четвертого порядка. Таким образом, F_2 содержит члены с $x_1^2 y_1^2$ и, следовательно, $u_2 \frac{d\Theta_2}{du_0}$ содержит член с

$$u_0^2 = \left(\sqrt{u_0} e^{i(nt+\varpi)}\right)^2 \left(\sqrt{u_0} e^{-i(nt+\ )}\right)^2.$$

Коэффициент этого члена является периодической функцией от t, среднее значение которой, вообще говоря, не равно нулю. Таким образом, вообще говоря, $\left[\frac{d\Theta_2}{du_0}\right]$ и, следовательно, μ_2 не равны нулю. Это то же самое рассуждение, что и для λ_2.

Затем мы должны иметь

$$\left[\frac{d\Theta_2}{dv_0}\right] = 0. \tag{12}$$

Но я говорю, что это условие выполняется само собой.

В самом деле, мы имеем интеграл живых сил, $F = \text{const}$, откуда выводим ряд уравнений:

$$\Phi_0 = \text{const}, \quad \Phi_1 = \text{const}, \quad \Phi_2 = \text{const}, \quad \ldots.$$

Рассмотрим третье из этих уравнений:

$$\Phi_2 = \Theta_2 - \xi_2 - inu_2 + \lambda_2 H_0 \xi_0 + 2B_0 \mu_2 u_0 = \text{const}.$$

Этим уравнением можно заменить четвертое уравнение (5), и когда мы определим λ_2, μ_2, ξ_2, η_2 и v_2 при помощи трех первых уравнений (5), оно определит u_2 *без всякого интегрирования*. Таким образом, можно быть уверенным, что определение u_2 возможно, и, следовательно, что условие (12) выполнено.

Мы определим таким образом ξ_2, η_2, ξ_2', η_2' с точностью до членов

$$\gamma_2, \quad \delta_2, \quad \gamma_2' e^{-i(nt+\varpi)}, \quad \delta_2' e^{i(nt+\varpi)},$$

зависящих от четырех произвольных постоянных. Мы сохраним только одну из этих постоянных и положим

$$\gamma_2 = \delta_2 = 0, \quad \delta_2' = -\gamma_2'.$$

363. Вычисление продолжается таким же образом. Для интегрируемости уравнений (5) необходимо выполнение условий

$$\left[\frac{d\Theta_k}{d\eta_0}\right] = 0, \quad \left[\frac{d\Theta_k}{dv_0}\right] = 0; \quad \left[\frac{d\Theta_k}{d\xi_0}\right] + \lambda_k H_0 = 0, \quad \left[\frac{d\Theta_k}{du_0}\right] + 2\mu_k B_0 = 0.$$

Последние два из этих условий определят λ_k и μ_k; второе будет следствием первого в соответствии с тем, что мы видели относительно условия (12). Таким образом, нам остается изучить первое условие.

Выражение $d\Theta_k/d\eta_0$ является полиномом порядка $k+2$; если его разложить в ряд Фурье

$$\sum A e^{i\,(pl + qnt + q\varpi)},$$

то целое q не может превзойти $k+2$ по абсолютной величине. Следовательно, если $k+2$ меньше знаменателя n, то нельзя получить

$$p + qn = 0,$$

и среднее значение нашего выражения будет равно нулю. Условие

$$\left[\frac{d\Theta_k}{d\eta_0}\right] = 0 \tag{13}$$

будет, следовательно, выполнено само собой.

Мы ввели следующие произвольные постоянные:

$$\varpi, \ \gamma_1', \ \gamma_2', \ \ldots, \tag{14}$$

и Θ_k может зависеть от

$$\varpi, \ \gamma_1', \ \gamma_2', \ \ldots, \ \gamma_{k-1}'.$$

Посмотрим, каким образом. Предположим, что мы рассматриваем разложение

$$F = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1 + \varepsilon^2\Phi_2 + \ldots, \tag{15}$$

и что в этом разложении мы заменяем величины ξ, η, ξ' и η' их значениями; различные члены разложения будут зависеть тогда от постоянных (14). В этом разложении (15) обратим в нуль все постоянные γ', сохраняя только ϖ; мы получим таким образом новое разложение

$$\Phi_0' + \varepsilon\Phi_1' + \varepsilon^2\Phi_2' + \ldots. \tag{16}$$

Заменим теперь в разложении (16) постоянную ϖ разложением

$$\varpi + \varepsilon\varpi_1 + \varepsilon^2\varpi_2 + \ldots,$$

где ϖ_1, ϖ_2, ... — новые постоянные. Каждый из членов разложения (16) можно в свою очередь разложить по степеням ε; располагая снова по степеням ε, мы получаем новое разложение

$$\Phi_0'' + \varepsilon\Phi_1'' + \varepsilon^2\Phi_2'' + \ldots. \quad (17)$$

Это разложение должно быть тождественным с разложением (15) при условии замены постоянных ϖ_k надлежащим образом выбранными функциями постоянных γ_k'.

Легко видеть, что Φ_k'' зависит только от

$$\varpi, \varpi_1, \ldots, \varpi_{k-1}$$

и что Φ_k зависит только от

$$\varpi, \gamma_1', \ldots, \gamma_{k-1}'.$$

Отсюда мы заключаем, что ϖ_k зависит только от

$$\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_k',$$

а γ_k' — от

$$\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_k.$$

Легко видеть, что

$$\Phi_k'' = \sum AD\Phi_m' \varpi_1^{\alpha_1}\varpi_2^{\alpha_2}\ldots\varpi_k^{\alpha_k},$$

где A — числовой коэффициент и $D\Phi_m'$ — производная от Φ_m' по ϖ; порядок этой производной равен

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$$

и при этом мы имеем

$$k = m + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k.$$

Так как m равно по крайней мере 1, поскольку Φ_0 не зависит от ϖ, то мы видим сначала, что α_k равно нулю, что мы, впрочем, уже знали.

Рассмотрим любой член, в котором α_k, α_{k-1}, ..., α_{h+1} равны нулю, но α_h не нуль; мы должны будем иметь

$$m \leqslant k - h.$$

Если знаменатель n больше, чем $k - h + 2$, то среднее значение $D\Phi_m$ будет равно нулю; это означает, что те члены в Φ_k'', которые зависят от ϖ_h, имеют нулевое среднее значение.

Мы можем отсюда получить один важный результат, касающийся среднего значения Φ_k'', и, следовательно, среднего значения Θ_k:

Если знаменатель n равен $k+2$, $[\Theta_k]$ будет зависеть только от ϖ.

Если знаменатель n равен $k+1$, $[\Theta_k]$ будет зависеть от ϖ и ϖ_1.

Если знаменатель n равен k, $[\Theta_k]$ будет зависеть от ϖ, ϖ_1 и ϖ_2.

Если знаменатель n равен $k-1$, $[\Theta_k]$ будет зависеть от ϖ, ϖ_1, ϖ_2 и ϖ_3, ...

При этом то, что я сказал только что о величине $[\Theta_k]$, применимо к $[d\Theta_k/d\eta_0]$.

Итак, если знаменатель n равен $k+2$, соотношение (13), в которое входит только ϖ, определит ϖ.

Если знаменатель равен $k+1$, соотношение (13) будет содержать ϖ и ϖ_1; однако ϖ уже предварительно было определено из соотношения

$$\left[\frac{d\Theta_{k-1}}{d\eta_0}\right]=0.$$

Соотношение (13) определит, таким образом, ϖ_1 и, следовательно, γ_1'.

Если знаменатель равен k, соотношение (13) будет содержать ϖ, ϖ_1, ϖ_2; но ϖ и ϖ_1 были уже предварительно определены соотношениями того же вида, что и (13). Таким образом, (13) определит ϖ_2 и, следовательно, γ_2', и т. д.

Анализ

364. В решении, к которому мы пришли, фигурируют еще следующие произвольные постоянные:

$$\varepsilon,\ \xi_0,\ u_0.$$

Что касается параметров λ и μ, то они заданы своими разложениями по возрастающим степеням ε, разложениями, коэффициенты которых мы последовательно вычислили. Эти коэффициенты λ_k и μ_k зависят от двух постоянных ξ_0 и u_0; эти коэффициенты были вычислены при помощи уравнений

$$\left[\frac{d\Theta_k}{d\xi_0}\right]+\lambda_k H_0=\left[\frac{d\Theta_k}{du_0}\right]+2\mu_k B_0=0.$$

Величины Θ_k, $d\Theta_k/d\xi_0$ и $u_0 d\Theta_k/du_0$ — целые полиномы относительно

$$\xi_0,\ \sqrt{u_0}\,e^{\pm i(nt+\varpi)}.$$

Пусть

$$\Theta_k=\sum P\xi_0'^{h_1}\eta_0'^{h_2}\xi_0^{h_3}=\sum Q,$$

где P — целый полином относительно

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \dots,\ \xi_1',\ \xi_2',\ \dots,\ \eta_1',\ \eta_2',\ \dots, \tag{18}$$

коэффициенты которого периодические функции η_0.

Тогда мы имеем

$$\xi_0 \frac{d\Theta_k}{d\xi_0} = \sum h_3 Q, \quad u_0 \frac{d\Theta_k}{du_0} = \sum \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right) Q.$$

Заменим затем количества (18) их разложениями, и пусть

$$P = \sum B \xi_0'^{b_1} \eta_0'^{b_2} \xi_0^{b_3},$$

где B — периодическая функция от t с периодом 2π, откуда

$$\Theta_k = \sum B \xi_0'^{b_1+h_1} \eta_0'^{b_2+h_2} \xi_0^{b_3+h_3} = \sum R,$$

$$\xi_0 \frac{d\Theta_k}{d\xi_0} = \sum h_3 R, \quad u_0 \frac{d\Theta_k}{du_0} = \sum \frac{h_1 + h_2}{2} R.$$

Мы получим

$$\xi_0 \left[\frac{d\Theta_k}{d\xi_0}\right], \quad u_0 \left[\frac{d\Theta_k}{du_0}\right],$$

сохраняя в этих разложениях члены, не зависящие от t. Но различные члены R содержат множителями показательные функции

$$e^{ipt} \times e^{i(nt+\tilde{\omega})(b_1+h_1-b_2-h_2)}$$

Чтобы этот член не зависел от t, необходимо, чтобы было

$$p + n(b_1 + h_1 - b_2 - h_2) = 0,$$

что показывает, что $b_1 + h_1 - b_2 - h_2$ должно делиться на знаменатель n. Итак,

$$b_1 + h_1 + b_2 + h_2 > b_1 + h_1 - b_2 - h_2 > \text{знаменателя } n \geqslant 2,$$

что означает, что R делится на u_0, поскольку u_0 фигурирует в R с показателем $^1/_2(b_1 + h_1 + b_2 + h_2)$.

Исключение имело бы место, только если

$$b_1 + h_1 = b_2 + h_2,$$

но тогда мы имели бы либо

$$b_1 + h_1 \geqslant 1,$$

$$b_1 + h_1 + b_2 + h_2 \geqslant 2,$$

так что R опять делилось бы на u_0; либо

$$b_1 = h_1 = b_2 = h_2 = 0,$$

откуда

$$\frac{h_1 + h_2}{2} = 0,$$

но тогда соответствующий член не входил бы в $u_0\left[\frac{d\theta_k}{du_0}\right]$.

Аналогично, R всегда будет делиться на ξ_0, за исключением случая $h_3 = 0$, когда соответствующий член не вошел бы в $\xi_0\left[\frac{d\theta_k}{d\xi_0}\right]$.

Итак, в итоге

$$\left[\frac{d\theta_k}{du_0}\right], \quad \left[\frac{d\theta_k}{d\xi_0}\right]$$

и, следовательно, λ_k и μ_k являются целыми полиномами относительно ξ_0 и $\sqrt{u_0}$. Таким образом, λ и μ представляют собой ряды, расположенные по степеням

$$\varepsilon, \ \xi_0, \ \sqrt{u_0},$$

но эти три постоянные входят в них не произвольным образом.

Вспомним, каким искусственным приемом мы ввели вспомогательную постоянную ε, которая служила только упрощению изложения; а для этого примем снова на мгновение обозначения п. 274 и стр. 89; мы положили

$$x_1 = \varepsilon x_1', \quad y_1 = \varepsilon y_1', \quad x_2 = \varepsilon^2 x_2', \quad y_2 = \varepsilon^2 y_2'.$$

Таким образом, наши уравнения не перестают удовлетворяться, когда мы заменяем

$$\varepsilon, \ x_1', \ y_1', \ x_2'$$

на

$$\varepsilon k^{-1}, \quad x_1'k, \quad y_1'k, \quad x_2'k^2,$$

а параметры λ и μ сохраняют свои первоначальные значения.

Затем мы отбросили ставшие ненужными штрихи и разложили x_1', y_1', x_2', y_2', которые мы обозначали с тех пор буквами x_1, y_1, x_2, y_2, по степеням ε.

Так мы нашли разложения

$$\begin{aligned} &\xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2 + \ldots, \\ &\eta_0 + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \ldots, \\ &\xi_0' + \varepsilon\xi_1' + \varepsilon^2\xi_2' + \ldots, \\ &\eta_0' + \varepsilon\eta_1' + \varepsilon^2\eta_2' + \ldots. \end{aligned} \tag{19}$$

Уравнения будут также удовлетворены, если мы заменим ε на ε/k и умножим четыре разложения (19) соответственно на

$$k^2, \ 1, \ k, \ k$$

или, что то же, если мы заменим

$$\xi_p, \quad \eta_p, \quad \xi'_p, \quad \eta'_p$$

на

$$\xi_p k^{2-p}, \quad \eta_p k^{-p}, \quad \xi'_p k^{1-p}, \quad \eta'_p k^{1-p}.$$

После этой замены мы должны получить разложения, тождественные разложениям (19), но с отличающимися значениями постоянных ξ_0 и u_0. Но мы видим, что эта замена меняет ξ_0 и u_0 на $k^2\xi_0$ и $k^2 u_0$.

Итак,

$$\xi_p, \quad \eta_p, \quad \xi'_p, \quad \eta'_p$$

меняются на

$$\xi_p k^{2-p}, \quad \eta_p k^{-p}, \quad \xi'_p k^{1-p}, \quad \eta'_p k^{1-p},$$

когда ξ_0 и u_0 меняются на $k^2\xi_0$ и $k^2 u_0$.

Другими словами, если умножить четыре разложения (19) соответственно на ε^2, 1, ε, ε, то полученные таким образом четыре произведения будут разложимы по степеням

$$\varepsilon^2\xi_0, \quad \varepsilon\sqrt{u_0},$$

и то же самое должно быть для λ и μ, которые не должны были измениться при замене ε, ξ_0, u_0 на ε/k, $k^2\xi_0$, $k^2 u_0$.

Итак, предположим, что λ и μ выражаются в функции $\varepsilon^2\xi_0$ и $\varepsilon\sqrt{u_0}$; ясно, что мы будем иметь таким образом соотношения, из которых сможем найти обратные функции $\varepsilon^2\xi_0$ и $\varepsilon\sqrt{u_0}$ от λ и μ.

365. Пусть $k+2$ — знаменатель n; постоянная ϖ определится тогда уравнением

$$\left[\frac{d\Theta_k}{d\eta_0}\right]=0.$$

Исключение имеет место только в случае $k+2=2$, когда ϖ определено уравнением

$$\left[\frac{d\Theta_2}{d\eta_0}\right]=0.$$

Выражение $d\Theta_k/d\eta_0$ является целым полиномом степени $k+2$ относительно

$$e^{\pm i(nt+\varpi)}.$$

Каждый из этих членов содержит, таким образом, множители вида

$$e^{\pm iq(nt+\varpi)}.$$

В среднем значении $[d\Theta_k/d\eta_0]$ останутся только члены, не зависящие от t, и мы видели, что q должно делиться на знаменатель n, т. е. на $k+2$.

Следовательно, наше выражение имеет следующий вид:

$$ae^{i\varpi(k+2)} + b + ce^{-i\varpi(k+2)}.$$

Теперь я покажу, что слагаемое b равно нулю.

Для этого я воспользуюсь следующим искусственным приемом: вычислим

$$\begin{array}{llll} \xi_0, & \xi_1, & \ldots, & \xi_{k-1}, \\ \eta_0, & \eta_1, & \ldots, & \eta_{k-1}, \\ \xi'_0, & \xi'_1, & \ldots, & \xi'_{k-1}, \\ \eta'_0, & \eta'_1, & \ldots, & \eta'_{k-1} \end{array}$$

при помощи процесса, изложенного выше; однако при вычислении ξ_k, вместо того чтобы приписать ϖ значение, обращающее в нуль $[d\Theta_k/d\eta_0]$, я сохраню произвольное значение ϖ. Тогда уравнение

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \frac{d\Theta_k}{d\eta_0}$$

позволит мне все же вычислить ξ_k; только вместо того чтобы быть периодической функцией t, величина ξ_k будет периодической функцией t, к которой прибавлен непериодический член

$$t\left[\frac{d\Theta_k}{d\eta_0}\right].$$

Но у нас есть другое средство для вычисления

$$\begin{array}{llll} \xi_0, & \xi_1, & \ldots, & \xi_k, \\ \eta_0, & \eta_1, & \ldots, & \eta_{k-1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

и, следовательно, этого члена $t\,[d\Theta_k/d\eta_0]$; а именно, повторить вычисления п. 274.

Мы определим S_0, S_1, ... при помощи уравнений (2) на стр. 93.

Вычисление S_0, S_1, ..., S_{k-1} выполняется без всяких затруднений; но у нас возникнут затруднения при вычислении S_k из уравнения

$$\frac{dS_k}{dy_2} + 2B\frac{dS_k}{dv} = \Phi + C_k.$$

В самом деле, правая часть представляет собой совокупность членов вида

$$Ae^{i m_1 y_2 + m_2 v},$$

где m_1 и m_2 — целые; интегрирование выполняется беспрепятственно, лишь бы не было

$$im_1+2m_2B=0.$$

Но так как $2B$ равно in, где n — рациональное число, знаменатель которого равен $k+2$, то правая часть нашего уравнения будет содержать члены, удовлетворяющие этому условию. Отсюда вытекает, что величина S_k не будет периодической функцией от y_2 и v, а может быть приравнена

$$T_k+y_2U_k,$$

где T_k и U_k периодичны.

Определив таким образом функцию S и продвинув приближения до количеств порядка ε^{k+1}, можно применить процедуру п. 275 и определить таким образом x_1, y_1, x_2, y_2.

Эти два способа вычислений должны привести к одному и тому же результату. Итак, пусть

$$\sum = S_0+\varepsilon S_1+\ldots+\varepsilon^k S_k.$$

Составим уравнения (см. стр. 94)

$$x_2=\frac{d\Sigma}{dy_2},\qquad u=\frac{d\Sigma}{dv},\quad n_1t+\tilde{\omega}_1=\frac{d\Sigma}{d\alpha_0},$$

$$n_2t+\tilde{\omega}_2=\frac{d\Sigma}{d\beta_0},\qquad n_1=-\frac{dC}{d\alpha_0},\qquad n_2=-\frac{dC}{d\beta_0}$$

и найдем из них x_2 в функции t; найденное таким образом значение x_2 должно быть равно

$$\xi_0+\varepsilon\xi_1+\ldots+\varepsilon^k\xi_k$$

с точностью до величин порядка ε^{k+1}.

Нас интересует вычисление ξ_k и, в частности, вычисление векового члена

$$t\left[\frac{d\theta_k}{d\eta_0}\right].$$

Этот вековой член может произойти только от векового члена S_k, который равен y_2U_k.

Таким образом, с точностью до количеств порядка ε^{k+1} (приравнивая вековые члены в уравнении $x_2=d\Sigma/dy_2$) мы имеем

$$\varepsilon^k t\left[\frac{d\theta_k}{d\eta_0}\right]=\varepsilon^k y_2\frac{dU_k}{dy_2}. \qquad (20)$$

В первом приближении, т. е. с точностью до количеств порядка ε, мы имеем (см. стр. 95)

$$x_2 = \alpha_0 = \xi_0, \quad u = \beta_0 = u_0, \quad n_1 t + \varpi_1 = y_2 = \eta_0 = t,$$
$$n_1 = 1, \quad n_2 = in, \quad n_2 t + \varpi_2 = v = v_0 = t(nt + \varpi).$$

Таким образом, мы совершим ошибку порядка ε^{k+1}, если заменим в правой части (20)

$$\alpha_0, \ \beta_0, \ y_2, \ v$$

на

$$\xi_0, \ u_0, \ t, \ i(nt + \varpi).$$

Следовательно, мы получим $[d\Theta_k/d\eta_0]$, делая эту же самую подстановку в dU_k/dy_2. Но U_k содержит только члены с

$$im_1 y_2 + m_2 v,$$

где

$$im_1 + 2m_2 B = 0.$$

Мы имеем, таким образом,

$$\frac{dU_k}{dy_2} = -2B\frac{dU_k}{dv}.$$

Но U_k — периодическая функция от y_2 и iv; следовательно, $\frac{dU_k}{dv}$ не содержит члена, не зависящего от v. Таким образом, $[d\Theta_k/d\eta_0]$ не содержит члена, не зависящего от v, что и требовалось доказать.

Чтобы облегчить понимание предыдущих вычислений, я сделаю еще одно замечание. Средние движения n_1 и n_2 заданы равенствами

$$n_1 = -\frac{dC}{d\alpha_0}, \quad n_2 = -\frac{dC}{d\beta_0}.$$

Вообще говоря, они зависят от ε и приводятся к 1 и in только при $\varepsilon = 0$.

Но здесь мы располагаем двумя параметрами λ и μ, которые могут быть заменены произвольными функциями от ε; или, если угодно, мы располагаем бесконечным числом постоянных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \mu_1, \mu_2, \ldots$. Мы можем тогда распорядиться этими постоянными таким образом, чтобы n_1 и n_2 оставались равными 1 и in, каково бы ни было ε.

366. Итак, для определения ϖ мы имеем уравнение вида

$$ae^{(k+2)i\varpi} + ce^{-(k+2)i\varpi} = 0,$$

где a и c — комплексные сопряженные. Вообще говоря, a и c не равны нулю, иначе ϖ можно было бы определить только в следующем приближении.

Таким образом, уравнение даст нам для ϖ ряд вещественных значений

$$\varpi_0, \quad \varpi_0+\frac{\pi}{k+2}, \quad \varpi_0+\frac{2\pi}{k+2}, \quad \varpi_0+\frac{3\pi}{k+2}, \quad \ldots.$$

Ясно, что на самом деле мы не получим различных значений, если заменим ϖ на $\varpi+2\pi$; однако, более того, я говорю, что два значения

$$\varpi_0, \quad \varpi_0+\frac{2\pi}{k+2}$$

не соответствуют двум действительно различным периодическим решениям.

В самом деле, так как t не входит явно в наши уравнения, то, заменяя t на $t+h$, мы преобразуем любое периодическое решение в другое решение, которое не является существенно отличным от него.

Итак, заменим t на $t+2h\pi$, где h — целое.

Тогда η_0 заменится на $\eta_0+2h\pi$, а $v_0=i(nt+\varpi)$ — на

$$i(nt+2nh\pi+\varpi).$$

Так как все наши функции периодичны, с периодом 2π по η_0 и iv_0, то мы ничего не изменим в решении, вычитая соответственно из η_0 и v_0/i два кратных 2π; например, $2h\pi$ и $2h'\pi$. Тогда η_0 снова станет η_0, а v_0 изменится на

$$i(nt+2nh\pi+\varpi-2h'\pi).$$

Другими словами, мы заменили ϖ на

$$\varpi+2\pi(nh-h').$$

Но мы можем всегда выбрать целые h и h' таким образом, чтобы было

$$nh-h'=\frac{1}{k+2}.$$

Таким образом, мы не находим существенно нового решения, заменяя ϖ на $\varpi+\frac{2\pi}{k+2}$, что и требовалось доказать.

Следовательно, мы имеем только два действительно различных решения, соответствующие двум значениям ϖ:

$$\varpi_0, \quad \varpi_0+\frac{\pi}{k+2}.$$

Нам остается определить постоянные $\varepsilon^2\xi_0$ и $\varepsilon^2 u_0$; для этого воспользуемся уравнениями, которые связывают эти две постоянные с λ и μ. В вопросах, которые обычно приходится рассматривать, имеется только один-единственный параметр, и мы ввели здесь два только для удобства изложения. Таким образом, следует предположить, что λ и μ связаны соотношением, например $\lambda=\mu$.

Разложения λ и μ по степеням $\varepsilon^2\xi_0$ и $\varepsilon\sqrt{u_0}$, вообще говоря, начинаются с членов с $\varepsilon^2\xi_0$ и с $\varepsilon^2 u_0$ (если оставить в стороне случай, когда знаменатель n равен 3).

Если мы, таким образом, предположим $\mu=\lambda$, то получим отсюда $\varepsilon^2\xi_0$ и $\varepsilon\sqrt{u_0}$, разложенные по степеням $\sqrt{\lambda}$; тогда одно из двух — либо коэффициенты разложения по степеням $\sqrt{\lambda}$ будут вещественными, либо, напротив, вещественными будут коэффициенты разложения по степеням $\sqrt{-\lambda}$.

В первом случае задача будет допускать два вещественных решения при $\lambda>0$ и не допускать ни одного при $\lambda<0$; во втором случае будет иметь место обратное.

Чтобы узнать, какой из этих двух случаев осуществляется, рассмотрим уравнение, связывающее μ с u_0, ограничиваясь членами с ε^2, получим

$$\lambda=\mu=-\frac{\varepsilon^2}{2B_0}\left[\frac{d\Theta_2}{du_0}\right]; \quad \lambda=-\frac{\varepsilon^2}{H_0}\left[\frac{d\Theta_2}{d\xi_0}\right]. \tag{21}$$

Я замечаю прежде всего, что $[d\Theta_2/du_0]$ и $[d\Theta_2/d\xi_0]$ не зависят не только от t, но и от ϖ; исключение имеет место только для

$$k+2=2,\ 3 \text{ или } 4.$$

Ибо при $k+2>4$ члены вида

$$e^{i(pt+qnt+q\varpi)},$$

которые могут войти в правую часть одного из уравнений (21), могут быть независимыми от t, только если

$$q=0,$$

поскольку $|q|$ не может превзойти 4 и qn должно быть целым.

Таким образом, правые части уравнений (21) являются линейными и однородными функциями от ξ_0 и u_0, а коэффициенты этих линейных функций являются абсолютными постоянными, не зависящими от ϖ.

Но u_0 должно быть положительным, иначе $\sqrt{u_0}$ был бы мнимым. Уравнения (21) вместе с неравенством $u_0>0$ определят знак λ.

Я замечу только, что этот знак не зависит от величины ϖ, поскольку уравнения (21) не зависят от него. Но мы видели, что уравнение, определяющее ϖ, допускает два действительно различных решения

$$\varpi=\varpi_0, \quad \varpi=\varpi_0+\frac{\pi}{k+2}.$$

Каждому из них соответствует периодическое решение, которое будет вещественным, если знак λ выбран надлежащим образом в соответствии с предыдущим. Выбор этого знака не зависит от ϖ; эти два решения будут оба вещественными при $\lambda > 0$ и оба мнимыми при $\lambda < 0$, или же будет иметь место обратное.

На первый взгляд кажется, что каждому решению уравнения относительно ϖ соответствуют два периодических решения, поскольку из соотношений между λ, μ, $\varepsilon^2\xi_0$ и $\varepsilon\sqrt{u_0}$ получаются две системы значений для неизвестных $\varepsilon^2\xi_0$ и $\varepsilon\sqrt{u_0}$. Однако это отнюдь не так. В самом деле, мы можем, не ограничивая общности, предположить, что $\sqrt{u_0}$ положителен; ибо мы ничего не меняем в наших формулах, заменяя $\sqrt{u_0}$ на $-\sqrt{u_0}$ и ϖ на $\varpi + \pi$.

Но из наших двух систем значений имеется только одна, для которой $\sqrt{u_0}$ будет положительным.

Таким образом:

имеются два вещественных периодических решения второго рода при $\lambda > 0$ (или при $\lambda < 0$);

нет ни одного решения второго рода при $\lambda > 0$ (или при $\lambda < 0$).

Примем снова обозначения главы XXVIII и, в частности, п. 331.

U_1 сводится к ρ^2 и соответствует члену с x_1y_1, который фигурирует в F_0.

U_0 сводится к постоянному множителю, умноженному на ρ^4, соответствуя членам, происшедшим от $[d\Theta_2/du_0]$ и $[d\Theta_2/d\xi_0]$.

Первый член W, который не приводится к степени U_1, имеет вид

$$\rho^{k+2}[A\cos(k+2)\varphi + B]$$

и происходит от Θ_{k+2}.

Функция, максимумы и минимумы которой нам нужно изучить и которая должна играть роль функции

$$U_0 + zU_1 = \rho^3 f(\varphi) - z\rho^2,$$

изученной на стр. 219, эта функция, говорю я, будет вида

$$A\rho^{k+2}\cos(k+2)\varphi + P\rho^4 - z\rho^2,$$

где P — целый полином относительно ρ^2 с постоянными коэффициентами.

Мы оставили в стороне частные случаи, когда знаменатель n равен 2, 3 или 4.

Исследование частных случаев

367. Предположим, что этот знаменатель равен 4.

Тогда $[\Theta_2]$, $[d\Theta_2/d\xi_0]$, $[d\Theta_2/du_0]$ уже не будут независимыми от ϖ, они будут содержать члены с $e^{\pm 4i\varpi}$.

Уравнение относительно ϖ опять даст два различных решения

$$\varpi = \varpi_0, \quad \varpi = \varpi_0 + \frac{\pi}{4},$$

которые дадут два периодических решения; так как знак λ может зависеть от ϖ, то может случиться, что мы получим:

два вещественных решения второго рода при $\lambda > 0$; ни одного решения при $\lambda < 0$;

одно вещественное решение второго рода при $\lambda > 0$; одно решение при $\lambda < 0$;

ни одного вещественного решения второго рода при $\lambda > 0$; два решения при $\lambda < 0$.

Функция $U_0 + zU_1$ (см. стр. 219) принимает вид

$$\rho^4 (A \cos 4\varphi + B) - z\rho^2.$$

Предположим теперь, что знаменатель n равен 3.

Тогда разложение μ по степеням ε начинается с члена с $\varepsilon\sqrt{u_0}$, так что если мы предположим, что $\mu = \lambda$, то получим $\varepsilon^2\xi_0$ и $\varepsilon\sqrt{u_0}$ в виде рядов, расположенных по степеням λ, а не $\sqrt{\lambda}$.

Знак $\sqrt{u_0}$ будет зависеть от ϖ, и если он положителен при $\varpi = \varpi_0$, то он будет отрицательным при $\varpi = \varpi_0 + \pi/3$.

Если, следовательно, мы условимся всегда предполагать $\sqrt{u_0}$ существенно положительным, то мы увидим, что получим:

одно вещественное решение второго рода при $\lambda > 0$ и одно вещественное решение второго рода при $\lambda < 0$.

Функция $U_0 + zU_1$ (см. стр. 219) принимает вид

$$A\rho^3 \cos 3\varphi - z\rho^2.$$

Если, наконец, знаменатель n равен 2, то $[\Theta_2]$, $[d\Theta_2/d\xi_0]$, $[d\Theta_2/du_0]$ содержат члены с $e^{\pm 4i\varpi}$, $e^{\pm 2i\varpi}$.

Уравнение относительно ϖ принимает вид

$$A \cos (4\varpi + B) + A' \cos (2\varpi + B') = 0$$

и допускает восемь решений

$$\varpi_0, \quad \varpi_0 + \frac{\pi}{2}, \quad \varpi_0 + \pi, \quad \varpi_0 + \frac{3\pi}{2},$$

$$\varpi_1, \quad \varpi_1 + \frac{\pi}{2}, \quad \varpi_1 + \pi, \quad \varpi_1 + \frac{3\pi}{2}.$$

Из двух количеств ϖ_0 и ϖ_1 по крайней мере одно вещественное.

Остаются возможными следующие предположения:

$$(4,0),\ (3,1),\ (2,2),\ (1,3),\ (0,4),\ (2,0),\ (1,1)\ (0,2).$$

Первое число в круглых скобках означает число периодических решений при $\lambda > 0$, а второе — то же число при $\lambda < 0$.

Функция стр. 219 принимает вид

$$A\rho^4 \cos 4\varphi + B\rho^4 \cos 2\varphi + C\rho^4 \sin 2\varphi + D\rho^4 - z\rho^2.$$

Приложение к уравнениям п. 13

368. Возвратимся к каноническим уравнениям динамики

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \tag{1}$$

Как и в пунктах 13, 42, 125 и т. д., я предполагаю, что F — периодическая функция y, разложимая по степеням параметра μ в виде

$$F = F_0 + \mu F_1 + \ldots,$$

и что F_0 зависит только от x.

Тогда мы видели в п. 42, что эти уравнения допускают бесконечное число периодических решений первого рода

$$x_i = \varphi_i(t), \quad y_i = \psi_i(t), \tag{2}$$

где функции φ_i и ψ_i разложимы по возрастающим степеням μ.

Рассмотрим одно из этих решений (2).

Пусть T — период, а α — один из характеристических показателей; их будет два, отличных от нуля, равных и противоположных по знаку, если мы предположим две степени свободы.

Мы видели в главе IV, что показатель α зависит от μ и разложим по степеням $\sqrt{\mu}$. Когда μ изменяется непрерывным образом, то же происходит и с α; предположим, что при $\mu = \mu_0$ произведение αT соизмеримо с $2i\pi$ и равно $2ni\pi$.

Отсюда мы можем заключить, что при μ, близком к μ_0, существуют решения второго рода, порожденные решениями (2), период которых равен $(k+2)T$, где $k+2$ означает знаменатель n.

Если мы оставим в стороне случаи, когда $k+2$ равно 2, 3 или 4, то, как мы видели, два из этих решений существуют, когда λ (здесь $\mu - \mu_0$) имеет определенный знак, и их нет, когда λ (здесь $\mu - \mu_0$) имеет противоположный знак.

Я сказал, что оставил в стороне случаи, когда $k+2 = 2,\ 3,\ 4$; я могу это сделать беспрепятственно. В самом деле,

$$\frac{\alpha T}{2i\pi} = n$$

разложимо по степеням $\sqrt{\mu}$ и обращается в нуль с $\sqrt{\mu}$. Следовательно, для малых значений μ величина n очень мала, и ее знаменатель наверняка больше 4.

Таким образом, мы встречаемся с двумя предположениями.

Либо решения второго рода существуют только при $\mu > \mu_0$, либо они существуют только при $\mu < \mu_0$.

Какое же из этих двух предположений осуществляется?

Все зависит от знака некоторого количества Q, которое само зависит от коэффициентов при u_0 и ξ_0 в выражениях

$$\left[\frac{d\theta_2}{d\xi_0}\right], \quad \left[\frac{d\theta_2}{du_0}\right].$$

Чтобы определить этот знак, нам нет нужды явно образовывать эту величину, а достаточны следующие рассуждения.

369. Возьмем сначала простой случай п. 199; пусть

$$F = x_2 + x_1^2 + \mu \cos y_1$$

с каноническими уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i},$$

что дает

$$\frac{dx_2}{dt} = 0, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -1, \qquad \frac{dx_1}{dt} = -\mu \sin y_1, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -2x_1. \tag{1}$$

Функция Якоби S записывается в виде

$$S = x_2^0 y_2 + \int \sqrt{C - \mu \cos y_1}\, dy_1$$

с двумя постоянными x_2^0 и C; отсюда мы находим

$$\begin{aligned} &x_2 = x_2^0, \qquad y_2 = -t + y_2^0, \\ &x_1 = \sqrt{C - \mu \cos y_1}, \qquad A - t = \int \frac{dy_1}{2\sqrt{C - \mu \cos y_1}}, \end{aligned} \tag{2}$$

где A и y_2^0 — две новые постоянные интегрирования.

Мы видим, что появился эллиптический интеграл

$$\int \frac{dy_1}{2\sqrt{C - \mu \cos y_1}}; \tag{3}$$

этот интеграл обладает вещественным периодом, который равен интегралу, взятому между 0 и 2π, если $|C| > |\mu|$, и удвоенному интегралу, взятому между

$$\pm \arc\cos \left| \frac{C}{\mu} \right|,$$

если $|C| < |\mu|$.

Обозначим этот вещественный период через ω.

Каждому значению ω, соизмеримому с 2π, соответствует периодическое решение; однако нужно различать два случая.

Если $|C| > |\mu|$, то y_1 и y_2 в течение периода увеличиваются на кратное 2π. Соответствующие периодические решения являются решениями первого рода.

Если $|C| < |\mu|$, то y_2 в течение периода возрастает на кратное 2π, а y_1 сохраняет свое первоначальное значение. Соответствующие решения являются решениями второго рода.

К этому перечислению следует добавить два замечательных периодических решения, которые должны рассматриваться как решения первого рода. Пусть $\mu > 0$, эти решения будут

$$x_2 = x_2^0, \quad y_2 = -t + y_2^0, \quad C = \mu, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = 0,$$

$$x_2 = x_2^0, \quad y_2 = -t + y_0^2, \quad C = -\mu, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = \pi.$$

Я сказал, что эти последние решения следует рассматривать как решения первого рода и что решения, соответствующие $|C| < |\mu|$, должны рассматриваться как решения второго рода.

В самом деле, дадим C значение, очень мало превосходящее $-\mu$, пусть

$$C = (\varepsilon - 1)\mu,$$

где ε — очень мало; y_1 не сможет сильно отклониться от π; мы будем иметь приближенно

$$C - \mu \cos y_1 = \mu \left[\varepsilon - \frac{(\pi - y_1)^2}{2} \right]$$

и период ω будет близок к

$$\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}},$$

откуда вытекает такое заключение: пусть α — любое число, соизмеримое с 2π; существует ряд таких периодических решений, что $|C| < |\mu|$ и что $\omega = \alpha$; если $\sqrt{\mu}$ очень близок к $\pi/\sqrt{2}\alpha$, то C будет очень близко к $-\mu$, и при

$$\sqrt{\mu} = \frac{\pi}{\sqrt{2}\,\alpha}$$

эти периодические решения сольются со вторым решением (4), которое является решением первого рода. Здесь мы узнаем вновь характеристическое свойство решений второго рода.

Мы видим, что второе решение (4), т. е. то из двух решений (4), которое устойчиво, порождает решения второго рода тем способом, который был объяснен в главе XXVIII.

Если другие решения первого рода, такие, что $|C|>|\mu|$, не порождают решений второго рода, то это зависит от очень частного вида уравнений (1). (Для этих решений характеристические показатели всегда равны нулю.)

Рассмотрим сначала такие решения первого рода, что $|C|>|\mu|$.

Положим $C=C_0+\varepsilon$; период ω, т. е. интеграл (3), взятый между 0 и 2π, будет разложим по степеням ε и μ, а свободный член сведется к

$$\frac{\pi}{\sqrt{C_0}}.$$

Дадим $\sqrt{C_0}$ любое рациональное значение; мы будем получать периодическое решение всякий раз, когда будем иметь

$$\omega=\frac{\pi}{\sqrt{C_0}}.$$

Уравнение удовлетворяется при $\varepsilon=\mu=0$, и из этого уравнения можно будет найти ε и, следовательно, C в виде ряда, расположенного по степеням μ. Уравнения (2) дадут нам тогда x_1 и y_1, разложимые по степеням μ. Это — разложения главы III.

Перейдем к таким решениям второго рода, что $|C|<|\mu|$.

Положим $C=\varepsilon\mu$; мы получим

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int\frac{dy_1}{2\sqrt{\varepsilon-\cos y_1}}.$$

Мы видим, что $\omega\sqrt{\mu}$ является функцией только от ε; с другой стороны,

$$\frac{x_1}{\sqrt{\mu}}=\sqrt{\varepsilon-\cos y_1},\quad (A-t)\sqrt{\mu}=\int\frac{dy_1}{2\sqrt{\varepsilon-\cos y_1}},$$

что показывает нам, что $\sin y_1$, $\cos y_1$ и $x_1/\sqrt{\mu}$ являются функциями от $(A-t)\sqrt{\mu}$ и ε, двоякопериодическими относительно $(A-t)\sqrt{\mu}$. Значит, это также функции от $(A-t)\sqrt{\mu}$ и $\omega\sqrt{\mu}$, поскольку ε — функция от $\omega\sqrt{\mu}$; если, следовательно, мы дадим ω постоянное значение, соизмеримое с 2π, то получим ряд периодических решений; для этих решений

$$\cos y_1,\ \sin y_1 \text{ и } \frac{x_1}{\sqrt{\mu}}$$

могут быть разложены в ряды Фурье по синусам и косинусам кратных $2\pi t/T$, где T — наименьшее общее кратное ω и 2π. Любой коэффициент разложения является функцией μ; эту функцию я и хочу изучить.

Для этого необходимо сначала рассмотреть соотношение между ε и $\omega\sqrt{\mu}$.

Мы можем заставить ε изменяться от -1 до $+1$. При $\varepsilon=-1$ мы имеем

$$\omega\sqrt{\mu}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

При $\varepsilon=+1$ мы имеем $\omega\sqrt{\mu}=\infty$; следовательно, когда ε изменяется от -1 до $+1$, $\omega\sqrt{\mu}$ возрастает от $\pi/\sqrt{2}$ до $+\infty$.

Следовательно, периодическое решение, соответствующее заданному значению ω, соизмеримому с 2π, существует, только если

$$\sqrt{\mu}>\frac{l\pi}{\omega\sqrt{2}}.$$

Таким образом, коэффициенты разложения Фурье являются функциями от μ, которые вещественны при

$$\sqrt{\mu}>\frac{\pi}{\omega\sqrt{2}}$$

и комплексны при

$$\sqrt{\mu}<\frac{\pi}{\omega\sqrt{2}}.$$

Очевидно, что это же рассуждение привело бы к тому же результату, если бы вместо

$$F=x_2+x_1^2+\mu\cos y_1$$

мы имели

$$F=F_0+\mu[F_1],$$

где F_0 зависит только от x_1 и x_2, $[F_1]$ — только от x_1, x_2 и y_1. Здесь решения второго рода опять были бы вещественными при $\mu>\mu_0$.

370. В общем случае величина Q, о которой шла речь в конце п. 368 и знак которой мы хотим определить, очевидно, зависит от μ, и если μ достаточно мало, то первый член разложения и даст ее знак.

Определим функцию S по методу Болина; пусть

$$S=S_0+\sqrt{\mu}S_1+\mu S_2+\ldots.$$

Если μ достаточно мало, то, очевидно, наиболее важными будут два первых члена

$$S_0+\sqrt{\mu}S_1.$$

Но если положить

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots,$$

то, как мы видели в главе XIX, S_0 и S_1 не зависят ни от F_2, ни от $F_1 - [F_1]$, а только от F_0 и от $[F_1]$, где через $[F_1]$ обозначено среднее значение F_1.

Возьмем снова величину Q п. 368; первый член ее разложения будет зависеть только от S_0 и S_1, и, следовательно, от F_0 и $[F_1]$. Таким образом, будет иметь место то же самое, как если бы мы предположили, что

$$F = F_0 + \mu [F_1],$$

следовательно, то же, что и в предыдущем пункте.

Но в предыдущем пункте мы нашли, что решения второго рода существуют только при

$$\mu > \mu_0.$$

Это заключение сохраняется, таким образом, опять в общем случае, лишь бы μ_0 было достаточно малым.

Каково же значение μ_0, для которого этот вывод потеряет силу?

Примем снова обозначения п. 361, которые являются обозначениями п. 275; показатель α, который там фигурирует, разложим по степеням произведения AA'.

Он приводится к характеристическому показателю при $AA'=0$.

Так как мы предположили, что решение первого рода устойчиво, а α — мнимое, то A и A' — комплексные сопряженные, и произведение AA' положительно.

При малых значениях μ показатель α убывает, когда AA' возрастает; в противном случае решения второго рода существовали бы только при $\mu < \mu_0$.

Таким образом, искомое значение μ_0 является тем, для которого α перестает убывать, когда AA' возрастает; следовательно, это то значение, которое обращает в нуль производную от α по AA'.

Глава XXXI

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

Решения второго рода и принцип наименьшего действия

371. Я не могу обойти молчанием связи между теорией решений второго рода и принципом наименьшего действия; и даже именно из-за этих связей я написал главу XXIX. Но для того чтобы лучше их пояснить, необходимы еще некоторые предварительные сведения.

Предположим две степени свободы; пусть x_1 и x_2 — две переменные первого ряда, которые можно рассматривать как координаты точки на плоскости; плоские кривые, удовлетворяющие нашим дифференциальным уравнениям, составят то, что мы назвали *траекториями*.

Пусть M — произвольная точка плоскости. Рассмотрим множество траекторий, исходящих из точки M, и пусть E — их огибающая. Пусть F—n-й кинетический фокус M на траектории (T); эта траектория коснется огибающей E в точке F согласно самому определению кинетических фокусов; я напоминаю, что n-м фокусом точки M, или ее фокусом порядка n, является n-я точка пересечения (T) с бесконечно близкой траекторией, проходящей через M. Но условия этого касания могут меняться. Может случиться, что F не есть особая точка кривой E и что касание будет первого порядка; это самый общий случай.

Пусть

$$x_1 = \varphi(x_2),$$

$$x_1 = \varphi(x_2) + \psi(x_2)$$

— уравнения траектории (T) и очень близкой траектории (T'), исходящей из точки M.

Пусть z_1 и z_2 — координаты точки M, u_1 и u_2 — координаты F. Так как (T) проходит через M и F, а (T') — через M, то мы получим

$$z_1 = \varphi(z_2), \qquad u_1 = \varphi(u_2), \qquad \psi(z_2) = 0.$$

Так как траектория (T') очень близка к (T), то функция ψ будет очень малой; я могу обозначить через α угол, под которым две траектории пересекаются в точке M; этот угол и определит траекторию (T'); тогда функция ψ будет зависеть от угла α; она будет очень малой, если, как

мы предполагаем, этот угол α сам мал, и она будет обращаться в нуль вместе с α.

Значение $\psi'(z_2)$ (если обозначить через ψ' производную от ψ) будет того же знака, что и α.

Что же касается значения $\psi'(u_2)$ [если мы предположим α очень малым и если система координат была определена таким образом, чтобы функция $\varphi(x_2)$ была однозначной, что всегда возможно], то оно того же знака, что и α, если F — фокус четного порядка, и противоположного знака, если F — фокус нечетного порядка.

Случай, интересующий нас, характеризуется тем, что $\psi(u_2)$ того же порядка, что α^2, и всегда одного и того же знака.

Предположим, например, что $\psi(u_2)$ положительно.

Тогда если знак α таков, что $\psi'(u_2)$ — положительно, то траектория (T') пересечет (T) в точке F', близкой к точке F и менее удаленной от M, чем точка F (в предположении, что $u_2 > z_2$).

В этом случае (T') касается E до F', тогда как (T) касается E после F'; согласно хорошо известному рассуждению, действие больше (по крайней мере, в абсолютном движении), когда мы идем из M в F', пробегая (T'), чем когда мы идем из M в F', следуя вдоль (T).

Если знак α таков, что $\psi'(u_2)$ отрицательно, то (T') пересекает (T) в точке F', более удаленной от M, чем F; тогда (T') касается E после F', а (T) касается E до F'; когда мы идем из M в F', действие больше вдоль (T), чем вдоль (T').

Результаты были бы противоположными, если бы $\psi(u_2)$ было отрицательным; однако во всех случаях среди траекторий (T'), близких к (T), имеются такие, которые пересекают (T) вблизи F по одну сторону от F, и такие, которые пересекают (T) вблизи F по другую сторону от F.

В этом случае мы будем говорить, что F — *обыкновенный фокус*.

Не может случиться так, чтобы точка F была обыкновенной точкой E, а касание имело порядок выше первого.

Разложим $\psi(x_2)$ по степеням α; пусть

$$\psi(x_2) = \alpha\psi_1(x_2) + \alpha^2\psi_2(x_2) + \ldots$$

Условие для касания высшего порядка имеет вид

$$\psi_1'(u_2) = 0.$$

Но мы имеем уже

$$\psi_1(u_2) = 0,$$

и функция $\psi_1(x_2)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка, коэффициенты которого являются конечными и заданными функциями от x_2, причем коэффициент при второй производной сводится к единице.

Если бы при $x_2=u_2$ интеграл $\psi_1(x_2)$ обращался в нуль так же, как и его первая производная, то он был бы тождественным нулем, что абсурдно.

Таким образом, касания высшего порядка не будет никогда.

Но может случиться, что F есть точка возврата кривой E, острие которой либо направлено в сторону M, так что подвижная точка, двигаясь из M в F, встречает ее с острия, либо обращено в противоположную сторону, так что подвижная точка встречает ее сзади острия. В первом случае я буду говорить, что F — противошерстный *фокус* (en pointe), а во втором случае — что это пошерстный *фокус* (en talon).

В одном и другом случаях значение $\psi(u_2)$ — порядка α^3; в случае противошерстного фокуса оно имеет знак α, если F — фокус нечетного порядка, и знак, противоположный знаку α, если F — фокус четного порядка; в случае пошерстного фокуса будет иметь место обратное.

В случае противошерстного фокуса все траектории (T') пересекают (T) в точке F', близкой к F и лежащей за F; действие при переходе от M к F' больше вдоль (T), чем вдоль (T').

В случае пошерстного фокуса все траектории (T') пересекают (T) в точке F', близкой к F и расположенной перед F; действие при обходе от M к F' больше вдоль (T'), чем вдоль (T).

Пусть теперь F' — точка (T), достаточно близкая к F. В случае противошерстного фокуса я могу соединить M с F' траекторией (T'), если F' лежит за F; в случае пошерстного фокуса я могу соединить M с F', если F' лежит перед F.

Наконец, могло бы случиться, что F — особая точка E более сложного характера, чем обыкновенная точка возврата; тогда я сказал бы, что это *особый фокус*.

Я замечу только, что от противошерстного фокуса к пошерстному фокусу можно перейти только через особый фокус, ибо в момент перехода значение $\psi(u_2)$ должно быть порядка α^4.

372. Рассмотрим теперь какое-нибудь периодическое решение; оно будет соответствовать замкнутой траектории (T). Пусть α — характеристический показатель, а T — период. В главе XXIX мы видели, как мы подходим к определению последовательных кинетических фокусов (п. 347).

Предположим, что α равно $2in\pi/T$, где n — рациональное число, числитель которого есть p. В этом случае применение правила п. 347 показывает, что каждая точка (T) совпадает со своим $2p$-м фокусом.

В самом деле, если принять, как в п. 347, такую единицу времени, чтобы период T был равен 2π, то получится $\alpha=in$. Если обозначить через τ_0 значение функции τ в точке M, через $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{2p}$ — значения этой функции в первом, втором, ..., $2p$-м фокусе M, то согласно правилу п. 347, мы будем иметь

$$\tau_1-\tau_0=\frac{i\pi}{\alpha}, \quad \tau_2-\tau_0=\frac{2i\pi}{\alpha}, \ldots, \quad \tau_{2p}-\tau_0=\frac{2pi\pi}{\alpha}=\frac{2p\pi}{n}.$$

Если p — числитель n, то мы видим, что $\tau_{2p}-\tau_0$ является кратным 2π, т. е. что точка M и ее $2p$-й фокус совпадают.

Траектория, исходящая из точки M и бесконечно близкая к (T), пройдет, следовательно, снова через точку M после того, как совершит $k+2$ обхода по замкнутой траектории (T), если $k+2$ — знаменатель n.

Таким образом, точка M является своим $2p$-м фокусом; но можно задать себе вопрос, к какой категории фокусов она принадлежит с точки зрения классификации предыдущего пункта.

Примем систему координат, аналогичную таким полярным координатам, что уравнение замкнутой траектории (T) есть

$$\rho=1$$

и что ω меняется от 0 до 2π, когда совершается обход этой замкнутой траектории. Тогда кривые $\rho=\text{const}$ являются замкнутыми кривыми, охватывающими друг друга подобно концентрическим окружностям, а кривые $\omega=\text{const}$ образуют пучок расходящихся кривых, которые пересекают все кривые $\rho=\text{const}$, причем таким образом, что кривая $\omega=a+2\pi$ совпадает с кривой $\omega=a$.

Пусть тогда ω_0 — значение ω, которое соответствует исходной точке M; значение ω, которое будет соответствовать этой же самой точке M, рассматриваемой как $2p$-й фокус исходной точки, будет

$$\omega_0+2(k+2)\pi.$$

Пусть

$$\rho=1+\psi(\omega)$$

— уравнение траектории (T'), близкой к (T) и проходящей через M. Функция $\psi(\omega)$ будет соответствовать функции $\psi(x_2)$ предыдущего пункта. Мы будем иметь $\psi(\omega_0)=0$, и речь идет о рассмотрении знака выражения

$$\psi[\omega_0+2(k+2)\pi].$$

Таким образом, речь идет о построении функции $\psi(\omega)$, а для этого мы должны только применить либо принципы главы VII, либо принципы п. 274. Если мы, например, применим эти последние, то вот что найдем. Функция $\psi(\omega)$ разложима по степеням двух количеств

$$Ae^{\alpha\omega},\ A'e^{-\alpha\omega}.$$

Коэффициенты разложения являются периодическими функциями с периодом 2π; A и A' — две постоянные интегрирования; что же касается α, то это постоянная, разложимая по степеням произведения AA':

$$\alpha=\alpha_0+\alpha_1(AA')+\alpha_2(AA')^2+\ldots.$$

При этом α_0 равно характеристическому показателю (T), т. е. in.

Если (T') мало отличается от (T), то две постоянные A и A' очень малы; они имеют порядок угла, который я назвал α в предыдущем пункте

и который не следует смешивать с показателем, который я обозначаю той же буквой в настоящем пункте.

Если мы продвинем приближения до третьего порядка включительно относительно A и A', то $\psi(\omega)$ сведется к полиному третьего порядка относительно этих двух постоянных, и я смогу написать

$$\psi(\omega)=Ae^{\alpha\omega}\sigma+A'e^{-\alpha\omega}\sigma'+f(Ae^{\alpha\omega},\ A'e^{-\alpha\omega}),$$

где f — целый полином относительно $Ae^{\alpha\omega}$, $A'e^{-\alpha\omega}$, содержащий только члены второй и третьей степени. Коэффициенты полинома f, так же как σ и σ', являются периодическими функциями с периодом 2π.

При этих условиях, так как α равно α_0 с точностью до величин второго порядка и $\alpha_0+\alpha_1(AA')$ с точностью до величин четвертого порядка, мы можем написать, пренебрегая везде величинами четвертого порядка относительно A и A':

$$\psi(\omega)=A\sigma e^{\omega(\alpha_0+\alpha_1AA')}+A'\sigma'e^{-\omega(\alpha_0+\alpha_1AA')}+f(Ae^{\alpha_0\omega},\ A'e^{-\alpha_0\omega})$$

или же еще

$$\psi(\omega)=Ae^{\alpha_0\omega}\sigma+A'e^{-\alpha_0\omega}\sigma'+\alpha_1\omega AA'(Ae^{\alpha_0\omega}\sigma-A'e^{-\alpha_0\omega}\sigma')+f(Ae^{\alpha_0\omega},\ A'e^{-\alpha_0\omega}).$$

Когда ω увеличивается на $(2k+4)\pi$, коэффициенты f, а также σ и σ' не изменяются. То же имеет место и для $e^{\alpha_0\omega}$, поскольку знаменатель $\alpha_0/i=n$ равен $k+2$; таким образом, то же самое относится и к

$$Ae^{\alpha_0\omega}\sigma,\qquad A'e^{-\alpha_0\omega}\sigma',\qquad f(Ae^{\alpha_0\omega},\ A'e^{-\alpha_0\omega}).$$

Таким образом, наконец, получаем

$$\psi(\omega+2k\pi+4\pi)-\psi(\omega)=(2k+2)\pi\alpha_1AA'(Ae^{\alpha_0\omega}\sigma-A'e^{-\alpha_0\omega}\sigma').$$

Но $\psi(\omega_0)$ есть нуль; таким образом, величина, знак которой мы должны определить, есть

$$(2k+2)\pi\alpha_1AA'(Ae^{\alpha_0\omega_0}\sigma_0-A'e^{-\alpha_0\omega_0}\sigma'_0).$$

Я обозначаю через σ_0 и σ'_0 значения σ и σ' при $\omega=\omega_0$.

Я замечаю сначала, что эта величина третьего порядка, что согласно предыдущему пункту показывает нам, что фокусы, вообще говоря, будут фокусами противошерстными или пошерстными. Теперь я утверждаю, что эта величина всегда имеет один и тот же знак и что ее коэффициент не может обращаться в нуль.

В самом деле, две постоянные A и A' связаны соотношением

$$\psi(\omega_0)=0,$$

которое можно написать, поскольку A и A' — бесконечно малые величины, в виде

$$Ae^{\alpha_0\omega_0}\sigma_0+A'e^{-\alpha_0\omega_0}\sigma'_0=0. \tag{1}$$

С другой стороны, α_0 — чисто мнимое, σ_0 и σ'_0 — комплексные сопряженные; то же самое относится к A и A'.

Таким образом, произведение AA' существенно положительно и не может обращаться в нуль, ибо A и A' не могут быть нулями одновременно.

С другой стороны, мы не можем иметь

$$Ae^{\alpha_0\omega_0}\sigma_0 - A'e^{-\alpha_0\omega_0}\sigma'_0 = 0, \tag{2}$$

ибо из уравнений (1) и (2) следовало бы, что

$$\sigma_0 = \sigma'_0 = 0.$$

Но эти уравнения невозможны; они означали бы, что все траектории, очень близкие к (T), будут проходить через точку M, что, очевидно, неверно.

Величина $\psi\,(\omega_0+2k\pi+4\pi)$ имеет, таким образом, всегда один и тот же знак; фокусы являются, следовательно, либо все противошерстными фокусами, либо все пошерстными фокусами; все зависит от знака α_1.

373. Мы были вынуждены оставить в стороне случай, когда α_1 есть нуль, исключительный случай, когда все фокусы будут особыми; также случай, когда $k+2$ равно 2, 3 или 4; вот почему.

Мы видели, что при вычислениях главы VII появляются малые делители

$$\gamma\sqrt{-1} + \sum \alpha\beta - \alpha_i$$

(см. п. 104).

Если один из этих делителей обращается в нуль, вычисление прерывается, и появляются вековые члены.

Но мы легко устанавливаем, что если $k+2$ равно 2, 3 или 4, то вычисления будут приостановлены таким же образом при нахождении членов трех первых порядков, которые мы должны были принимать во внимание. Если же, напротив, $k+2 > 4$, то мы остановимся только при вычислении членов высшего порядка, которые не рассматривались в предшествующих рассуждениях.

374. Предположим, например, что все фокусы являются противошерстными фокусами; пусть M — любая точка (T); эта точка будет своим $2p$-м фокусом. Пусть M' — точка, расположенная немного за точкой M в направлении обхода (T) и траекторий, близких к (T). Я могу провести траекторию (T'), исходящую из точки M, которая будет очень мало отклоняться от (T), совершит вокруг (T) $k+2$ оборота и в конечном счете примкнет к точке M' и будет иметь $2p+1$ точек пересечения с (T), если считать точки пересечения M и M'.

В самом деле, так как фокус является противошерстным фокусом, то все траектории (T'), близкие к (T), пересекут (T) *за* фокусом. Следовательно, мы сможем провести траекторию (T'), которая удовлетворяет условиям,

которые я только что сформулировал, лишь бы расстояние MM' было меньше δ. Ясно, что верхний предел, который не должно превосходить расстояние MM', зависит от положения M на (T); но оно никогда не обращается в нуль, поскольку нет особого фокуса.

Мне достаточно тогда приравнять δ наименьшему значению, которое может принять этот верхний предел, и я могу считать δ постоянной.

Итак, если расстояние MM' меньше δ, мы можем провести траекторию (T'), удовлетворяющую нашим условиям; мы можем даже провести их две — одну, пересекающую (T) в M под положительным углом, другую — под отрицательным углом.

При этих условиях предположим, что наши канонические дифференциальные уравнения зависят от параметра λ; при $\lambda=0$ замкнутая траектория (T) имеет характеристический показатель $\alpha_0=in$.

Предположим, что при $\lambda > 0$ характеристический показатель, деленный на i, больше n, и что при $\lambda < 0$ он, наоборот, меньше n.

Тогда при $\lambda \neq 0$ точка M уже не будет являться своим $2p$-м фокусом; ее $2p$-й фокус будет расположен перед M при $\lambda > 0$ и за M при $\lambda < 0$. Пусть F — этот фокус. Расстояние MF, естественно, будет зависеть от положения M на (T); я называю ε наибольшее значение этого расстояния; ясно, что ε будет непрерывной функцией от λ, обращающейся в нуль вместе с λ; заметим, что при $\lambda \neq 0$, согласно принципам п. 347, фокус F всегда лежит за точкой M или всегда перед ней в зависимости от значения характеристического показателя, и расстояние MF никогда не может обратиться в нуль.

Пусть F' — точка, расположенная немного за F; мы сможем соединить M с F' траекторией (T'), лишь бы расстояние FF' оставалось меньше некоторой величины δ'. Ясно, что δ' является непрерывной функцией λ и сводится к δ при $\lambda=0$.

Возьмем $\lambda > 0$ так, что M лежит за F; мы можем заставить M играть роль F' и соединить точку M с самой собой траекторией (T'), лишь бы расстояние MF было меньше δ' или лишь бы было

$$\varepsilon < \delta';$$

при $\lambda=0$ ε есть нуль, и $\delta' = \delta > 0$; следовательно, можно взять λ достаточно малым, чтобы это неравенство было удовлетворено.

Тогда мы можем соединить точку M с самой собой траекторией (T'), мало отклоняющейся от (T), обходящей (T) $k+2$ раза и пересекающей (T) $2p+1$ раз.

На рисунке BA представляет дугу (T), на которой находится точка M. MC — дуга (T'), исходящая из M, а DM — другая дуга этой же самой траектории, оканчивающейся в M. Стрелки указывают направление, в котором описываются траектории (рис. 12).

Точка M может быть таким образом соединена с самой собой не одной, а двумя траекториями (T'); для одной, как указывает рисунок, угол

CMA положителен, так что CM лежит над MA; для другой угол CMA отрицателен.

Траекторию (T') нельзя считать замкнутой траекторией; она исходит из точки M, чтобы вернуться в точку M, но направление касательной не одно и то же в исходной точке и в конечной точке, так что дуги MC и DM не сливаются.

Траектория (T'), идущая таким образом из M в M с угловой точкой в M, образует, следовательно, то, что можно назвать *завитком*. Делая то же самое построение для всех точек M траектории (T), мы получим *ряд завитков*; мы их получим даже два, первый соответствует случаю, когда угол CMA положителен, а второй — случаю, когда этот угол отрицателен. Эти два ряда отделены друг от друга; в самом деле, переход от одного ряда к другому можно совершить, только если угол CMA становится бесконечно малым.

Тогда траектория (T'), становясь бесконечно близкой к (T), должна была бы пройти через фокус F, согласно самому определению фокусов; однако, так как она должна примыкать к точке M, то точки M и F слились бы; этого не может случиться, согласно принципам п. 347.

Таким образом, если все фокусы являются противошерстными, мы имеем два ряда завитков при $\lambda > 0$ и не имеем их при $\lambda < 0$.

Если бы все фокусы были пошерстными, то мы могли бы повторить те же рассуждения; мы нашли бы, что имеется два ряда завитков при $\lambda < 0$ и что их нет при $\lambda > 0$.

375. Рассмотрим один из рядов завитков, определенных в предыдущем пункте; *действие*, вычисленное вдоль одного из этих завитков, будет изменяться с положением точки M; оно будет иметь, по крайней мере, один максимум или один минимум.

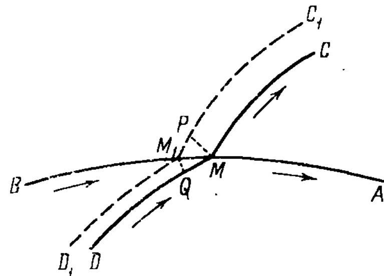


Рис. 12

Я говорю, что если действие есть максимум или минимум, две дуги MC и CD сливаются, так что траектория (T') является замкнутой и соответствует периодическому решению второго рода.

В самом деле, предположим, что траектория (T') соответствует минимуму действия и что угол CMA больше угла BMD, как на рисунке; тогда возьмем точку M_1 слева от M бесконечно близко к M, построим завиток (T_1'), бесконечно мало отличающийся от завитка (T') и имеющий свою угловую точку в M_1; пусть M_1C_1 и M_1D_1 — две дуги этого завитка.

Из точек M и M_1 я опускаю два перпендикуляра MP и M_1Q на M_1C_1 и MD.

Согласно хорошо известной теореме, действие вдоль (T') от точки M до точки Q будет равно действию вдоль (T_1') от точки P до M_1. Таким образом, мы будем иметь:

действие (T_1')=действию (T') + действие (M_1P) — действие (QM) или

действие (T_1') = действию (T') + действие $(MM_1)(\cos CMA - \cos BMQ)$, или, наконец,

$$\text{действие } (T_1') < \text{действия } (T'),$$

что абсурдно, поскольку (T') по предположению соответствует минимуму действия.

Если бы мы предположили, что

$$CMA < BMD,$$

то пришли бы к тому же абсурдному выводу, помещая точку M_1 справа от M.

Итак, следует предположить, что

$$CMA = BMD,$$

т. е. что две дуги сливаются.

То же рассуждение применимо к случаю максимума.

Таким образом, каждый ряд завитков содержит, по крайней мере, две замкнутые траектории.

Каждая из этих замкнутых траекторий делает $k+2$ оборота вокруг (T) и пересекает (T) в $2p$ точках. Для p из них угол, аналогичный CMA, положителен, а для p остальных он отрицателен; в самом деле, кривая (T'), будучи замкнутой, должна пересечь (T) столько же раз в одном направлении, сколько в другом.

Таким образом, эту замкнутую траекторию можно рассматривать как завиток $2p$ различными способами; ибо мы можем считать любую из наших $2p$ точек пересечения угловой точкой; для p из этих способов завиток, определенный таким образом, будет принадлежать первому ряду, а для p остальных — второму.

Среди завитков каждого ряда имеется, таким образом, не два, а, по крайней мере, $2p$ таких, которые сводятся к замкнутым траекториям. Только мы получаем таким образом не $4p$, а лишь две различные замкнутые траектории.

То, что их не больше, не вытекает из предыдущего рассуждения, но может быть выведено из принципов предыдущей главы.

Траектория (T'), определенная таким образом, будет иметь $^1/_2(k+1)p$ двойных точек, если k — нечетное, и $^1/_2(k+2)p$ двойных точек, если k — четное. Это справедливо для малых значений λ; но я говорю, что это останется верным, как бы ни было велико λ, пока существует траектория (T'). В самом деле, число двойных точек может измениться, только если две ветви кривой (T') становятся касательными друг к другу; но две траектории не могут касаться друг друга, не сливаясь.

По той же причине они будут пересекаться в $2p$ точках, сколь бы велико ни было λ, пока будут существовать две траектории (T) и (T').

376. *Во всех рассуждениях предыдущего пункта предполагается, что речь идет об абсолютном движении.*

Желая распространить их на случай относительного движения, мы столкнулись бы с затруднениями, которые без сомнения не являются непреодолимыми, но которые я не пытаюсь преодолеть.

Прежде всего, следовало бы видоизменить построение, употребленное в предыдущем пункте.

Вместо проведения перпендикуляров MP и M_1Q к M_1C_1 и MD следовало бы сделать вот что. Например, для построения MP мы построим бесконечно малый круг, удовлетворяющий следующим условиям: он пересекает M_1C_1 в P и касается в этой точке прямой MP; прямая, которая соединяет M с центром, должна иметь заданное направление и быть в заданном отношении к радиусу. Построенная таким образом прямая MP обладает теми же свойствами, что и нормаль в абсолютном движении. К сожалению, это построение в некоторых случаях может привести к затруднению.

Кроме того, действие (MM_1) не всегда положительно; если бы оно стало нулем, то рассуждение оказалось бы опять несостоятельным; максимум или минимум мог бы быть достигнут в такой точке M, что действие (MM_1) было бы нулем, и при этом без необходимости слияния дуг MC и DM.

Следовательно, наши рассуждения приложимы к случаю относительного движения, только если действие остается положительным вдоль всей траектории (T).

Во всех случаях остается верным один из выводов: замкнутая траектория (T') существует всегда, поскольку если рассуждение предыдущего пункта теряет силу, то этого не происходит с рассуждениями глав XXVIII и XXX; кроме того, (T') пересекает (T) в $2p$ точках и имеет $p(k+1)/2$ или $p(k+2)/2$ двойных точек.

Это верно для малых значений λ, но я не могу больше заключить, что это останется справедливым, каким бы ни было λ; ибо две траектории могут касаться, не сливаясь, лишь бы они пробегались в противоположных направлениях.

Устойчивость и неустойчивость

377. Предположим, что имеется только две степени свободы; два характеристических показателя равны нулю, два других равны и противоположны по знаку.

Уравнение, имеющее корни

$$e^{\pm\alpha T},$$

является уравнением второго порядка, коэффициенты которого вещественны (T представляет собой период, а α — один из характеристических показателей).

Следовательно, эти корни вещественные или комплексные сопряженные.

Если они вещественные и положительные, то α — вещественные, и периодическое решение неустойчиво.

Если они комплексные, то α — комплексные сопряженные; так как их произведение равно $+1$, то α — чисто мнимые, и периодическое решение устойчиво.

Если они вещественные и отрицательные, то α — *комплексные*, причем мнимая часть равна $i\pi/T$; периодическое решение опять неустойчиво. При этом они не могут быть вещественными и иметь противоположные знаки, поскольку их произведение равно $+1$.

Следовательно, имеется два типа неустойчивых решений, соответствующих двум предположениям

$$e^{\alpha T} > 0, \qquad e^{\alpha T} < 0.$$

Переход от устойчивых решений к неустойчивым решениям первого типа совершается через значение

$$\alpha = 0.$$

Переход от устойчивых решений к неустойчивым решениям второго типа совершается через значение

$$\alpha = \frac{i\pi}{T}.$$

378. Изучим сначала переход к неустойчивым решениям первого типа В момент перехода мы имеем

$$e^{\alpha T} = 1.$$

Возьмем снова количества β_k и ψ_k, определенные в главе III, и рассмотрим уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} - S & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \frac{d\psi_1}{d\beta_3} & \frac{d\psi_1}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} - S & \frac{d\psi_2}{d\beta_3} & \frac{d\psi_2}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_3}{d\beta_1} & \frac{d\psi_3}{d\beta_2} & \frac{d\psi_3}{d\beta_3} - S & \frac{d\psi_3}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_4}{d\beta_1} & \frac{d\psi_4}{d\beta_2} & \frac{d\psi_4}{d\beta_3} & \frac{d\psi_4}{d\beta_4} - S \end{vmatrix} = 0; \qquad (1)$$

это уравнение имеет корни

$$0, \ 0, \ e^{\alpha T} - 1, \ e^{-\alpha T} - 1.$$

В момент перехода эти четыре корня становятся нулями.

Однако прежде чем изучать этот простой случай, когда мы имеем дело с уравнениями динамики с двумя степенями свободы и когда мы

предполагаем, что функция F не зависит явно от времени и что, следовательно, уравнения допускают интеграл живых сил $F=\text{const}$, прежде чем изучать, говорю я, этот простой случай, нам следует, может быть, остановиться на мгновение на еще более простом случае.

Пусть F — какая-нибудь функция от x, y и t, периодическая с периодом T относительно t; рассмотрим канонические уравнения

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dF}{dy}, \qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{dF}{dx}; \tag{2}$$

это уравнения динамики с одной-единственной степенью свободы; но так как F зависит от t, то они не допускают уравнения живых сил $F=\text{const}$.

Предположим, что уравнения (2) допускают периодическое решение с периодом T. Характеристические показатели будут нам заданы следующим уравнением, аналогичным (1)

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1}-S & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2}-S \end{vmatrix}=0, \tag{3}$$

которое имеет корни

$$e^{\alpha T}-1, \qquad e^{-\alpha T}-1.$$

Оба эти корня становятся нулями в момент перехода.

Предположим, что F зависит от некоторого параметра μ и что при $\mu=0$ два корня уравнения (3) будут нулями. Функции ψ_1 и ψ_2 будут зависеть не только от β_1 и β_2, но и от μ. Мы будем предполагать, что F разложима по степеням μ и что, следовательно, ψ_1 и ψ_2 разложимы по степеням β_1, β_2 и μ.

Периодические решения будут заданы уравнениями

$$\psi_1=0, \quad \psi_2=0. \tag{4}$$

При $\mu=0$, $\beta_1=\beta_2=0$ функциональный определитель от ψ по β есть нуль; но, вообще говоря, четыре производных $d\psi_i/d\beta_k$ не обратятся в нуль одновременно. Предположим, например, что

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1}\neq 0;$$

мы найдем из первого уравнения (4) β_1 в виде ряда, расположенного по степеням β_2 и μ, и подставим во второе уравнение (1). Пусть

$$\Psi(\beta_2, \mu)=0 \tag{5}$$

— результат подстановки. Так как функциональный определитель равен нулю, то мы получим

$$\frac{d\Psi}{d\beta_2}=0;$$

однако необходимо различать два случая.

1. Производная $d\Psi/d\mu$ не равна нулю, или, другими словами, функциональный определитель от ψ_1 и ψ_2 по β_1 и μ не нуль.

В этом случае, если смотреть на β_2 и μ как на координаты точки на плоскости, кривая, представленная уравнением (5), будет иметь в начале координат обыкновенную точку, в которой касательной будет прямая $\mu=0$.

Вообще говоря, вторая производная

$$\frac{d^2\Psi}{d\beta_2^2}$$

не будет нулем, т. е. начало не будет точкой перегиба для кривой (5).

Если мы пересечем прямой $\mu=\mu_0$, где μ_0 — достаточно малая постоянная, то в зависимости от знака μ_0 мы сможем иметь две точки пересечения этой прямой с кривой (5) в окрестности начала или же ни одной.

Если, например, кривая лежит над своей касательной, мы будем иметь при $\mu_0>0$ два пересечения и, следовательно, два периодических решения, при $\mu_0<0$ мы не получим ни одного.

Таким образом, мы видим, что два периодических решения приближаются друг к другу, сливаются, затем исчезают.

Рассмотрим две точки пересечения прямой $\mu=\mu_0$ с кривой (5); они будут соответствовать двум последовательным корням уравнения (5) и, следовательно, двум значениям противоположных знаков производной $d\Psi/d\beta_2$, а значит, двум значениям противоположных знаков функционального определителя от ψ_i по β, т. е. произведения

$$(e^{\alpha T}-1)(e^{-\alpha T}-1)=2-e^{\alpha T}-e^{-\alpha T},$$

т. е. α^2.

Итак, *из двух периодических решений, которые сливаются и, таким образом, исчезают, одно всегда устойчиво, а другое — неустойчиво.*

2. Производная $d\Psi/d\mu=0$, или, другими словами, функциональный определитель от ψ_1 и ψ_2 по β_1 и μ есть нуль.

Тогда кривая (5) имеет в начале особую точку, которая, вообще говоря, будет обыкновенной двойной точкой.

Так как две ветви кривой пересекаются в начале, то прямая $\mu=\mu_0$ всегда встретит кривую в двух точках; следовательно, мы будем иметь два периодических решения, каков бы ни был знак μ_0.

Две ветви кривой определяют в окрестности начала четыре области; в двух из этих областей, противоположных друг другу относительно вершины, Ψ будет положительным; в двух других — отрицательным.

Пусть OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 — четыре полуветви, которые сходятся в начале; OP_1 будет продолжением OP_3, а OP_2 — продолжением OP_4; OP_1 и OP_2 будут соответствовать $\mu_0 > 0$; OP_3 и OP_4 — $\mu_0 < 0$; функция Ψ будет положительной внутри углов P_1OP_2, P_3OP_4 и отрицательной внутри углов P_2OP_3, P_1OP_4.

Мы только что видели, что устойчивость зависит от знака производной $d\Psi/d\beta_2$; в таком случае, когда мы пересекаем, например, OP_1, функция Ψ переходит от отрицательных значений к положительным; производная будет положительной, и решение будет, например, устойчивым; оно будет также устойчивым, когда мы будем пересекать OP_4; неустойчивым, когда мы будем пересекать OP_2 или OP_3.

Периодические решения, соответствующие OP_1, устойчивы, и они являются аналитическим продолжением периодических решений, которые соответствуют OP_3 и являются неустойчивыми.

Обратно, периодические решения, соответствующие OP_2 и являющиеся неустойчивыми, представляют собой аналитическое продолжение периодических решений, которые соответствуют OP_4 и устойчивы.

Следовательно, мы имеем два аналитических ряда периодических решений, которые сливаются при $\mu=0$, и в этот момент *эти два ряда обмениваются своей устойчивостью.*

Мы только что изучили два наиболее простых случая, но может представиться масса других случаев, соответствующих различным особенностям, которые может иметь в начале кривая (5).

Но, каковы бы ни были эти особенности, мы увидим, что из начала во все стороны расходится *четное* число $p+q$ полуветвей кривых, а именно, p со стороны $\mu > 0$ и q — со стороны $\mu < 0$. Предположим, что малый круг, описанный около начала, встречает их в следующем порядке:

$$OP_1,\ OP_2,\ \ldots,\ OP_{p+q}.$$

Пусть

$$OP_1,\ OP_2,\ \ldots,\ OP_p \tag{6}$$

— полуветви, соответствующие $\mu > 0$, а

$$OP_{p+1},\ OP_{p+2},\ \ldots,\ OP_{p+q} \tag{7}$$

— полуветви, соответствующие $\mu < 0$.

Тогда полуветви (6) соответствуют, чередуясь, устойчивым периодическим решениям и неустойчивым решениям; я буду говорить для краткости, что эти полуветви поочередно устойчивы или неустойчивы.

То же относится и к полуветвям (7).

С другой стороны, OP_p и OP_{p+1} — обе устойчивы или обе неустойчивы.

То же относится, следовательно, и к OP_{p+q} и OP_1.

Итак, пусть p' и p'' — число устойчивых полуветвей и число неустойчивых полуветвей при $\mu > 0$, так что

$$p'+p''=p.$$

Пусть q' и q'' — соответствующие числа при $\mu < 0$, так что

$$q'+q''=q.$$

Тогда имеются только три возможных предположения:

$$\begin{aligned} p' &= p'', & q' &= q'', \\ p' &= p''+1, & q' &= q''+1, \\ p' &= p''-1, & q' &= q''-1. \end{aligned}$$

Во всех случаях мы имеем

$$p'-p''=q'-q''.$$

Предположим, что p не равно q, а, например, что $p > q$, так что некоторое число периодических решений исчезает, когда мы переходим от $\mu > 0$ к $\mu < 0$; прежде всего, мы видим, что это число всегда четное и, кроме того, согласно предыдущему уравнению, *всегда исчезает столько же устойчивых решений, сколько и неустойчивых.*

Предположим теперь, что мы имеем аналитический ряд периодических решений и что при $\mu=0$ мы переходим от устойчивости к неустойчивости или наоборот (и притом так, что показатель α обращается в нуль). Тогда q' и p'' (например) не меньше 1. Следовательно, сумма $p'+q''$ не меньше 2, откуда следует, что мы будем иметь, по меньшей мере, один аналитический ряд вещественных периодических решений, отличный от первого и сливающийся с ним при $\mu=0$.

Следовательно, *если для некоторого значения μ периодическое решение теряет устойчивость или приобретает ее* (и притом так, что показатель α равен нулю), *то оно сольется с другим периодическим решением,* с которым оно обменяется своей устойчивостью.

379. Вернемся теперь к случаю, который я предложил рассмотреть с самого начала, случаю, когда время не входит явно в уравнения, когда, следовательно, мы имеем интеграл живых сил $F=C$, когда, наконец, имеется две степени свободы.

Тогда я буду рассуждать, как в п. 317; я предположу, что период периодического решения, равный T для периодического решения, которое соответствует $\mu=0$, $\beta_i=0$, будет равен $T+\tau$ и мало отличаться от T для соседних периодических решений; и я напишу уравнения

$$\psi_1=0, \quad \psi_2=0, \quad \psi_3=0, \quad F=C_0, \quad \beta_1=0, \tag{1}$$

в которые входят переменные

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\ \mu,\ \tau.$$

Согласно нашим предположениям, функциональный определитель от ψ по β должен обратиться в нуль вместе со всеми своими минорами первого порядка, но миноры второго порядка не будут, вообще говоря, все равны нулю одновременно.

Следовательно, положим $\beta_1=0$ в уравнениях (1) и рассмотрим функциональный определитель Δ от

$$\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ F$$

по

$$\beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\ \tau.$$

Этот определитель обращается в нуль, когда величины β, μ и τ обращаются в нуль; но, вообще говоря, миноры первого порядка не будут обращаться в нуль.

В самом деле, рассмотрим функциональный определитель от F и двух из четырех функций ψ по τ и двум из четырех переменных β. Могут ли они все быть нулями одновременно?

Согласно теории определителей, это могло бы случиться только

1) если бы все миноры двух первых порядков определителя от ψ по β были равны нулю одновременно, чего, вообще говоря, не бывает и чего мы не будем предполагать;

2) либо если бы все производные от F были нулями одновременно; мы видели в п. 64, что они должны были бы обращаться в нуль вдоль всего периодического решения; мы также не будем предполагать и этого;

3) либо, наконец, если бы все производные от ψ и F по τ были нулями одновременно; тогда значения

$$\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=0$$

соответствовали бы не периодическому решению в собственном смысле этого слова, а положению равновесия (см. п. 68).

Этого мы также не будем предполагать.

Следовательно, мы можем всегда предположить, что все миноры первого порядка определителя Δ не равны нулю.

Исключим теперь четыре из неизвестных β и τ из уравнений (1).

Исключим, например, β_1, β_3, β_4, τ; останется уравнение вида

$$\Psi(\beta_2,\ \mu)=0;$$

так как это уравнение совершенно того же вида, что и уравнение (5) предыдущего пункта, мы будем обращаться с ним таким же самым образом и придем к тем же результатам:

1. Когда периодические решения исчезают, после того как они сольются, то из них исчезает всегда четное число и притом столько же устойчивых, сколько неустойчивых.

2. Когда периодическое решение теряет или приобретает устойчивость при непрерывном изменении μ (и притом таким образом, что α обращается в нуль), то можно быть уверенным, что в момент перехода с ним сливается другое вещественное периодическое решение того же периода.

380. Перейдем ко второму случаю, когда

$$\alpha = \frac{i\pi}{T}.$$

Тогда, так как ни один из характеристических показателей не обращается в нуль при

$$\mu = 0$$

за исключением двух, которые всегда равны нулю, не существует периодического решения с периодом T, сливающегося с первым при

$$\mu = 0.$$

Но зато в силу принципов главы XXVIII существуют периодические решения второго рода с периодом $2T$, которые при $\mu=0$ сливаются с заданным решением, период которого равен T.

Что мы скажем об их устойчивости? При $\mu > 0$ мы будем иметь, например, устойчивое решение с периодом T, которое станет неустойчивым при $\mu < 0$.

Пусть при $\mu < 0$ p' и p'' — числа устойчивых и неустойчивых решений, которые допускают период $2T$, не допуская периода T. Пусть q' и q'' — соответствующие числа при $\mu < 0$.

Тогда, рассматривая все решения с периодом $2T$, которые допускают или не допускают период T, и применяя к ним принципы п. 378, я увижу, что могу сделать по поводу этих четырех чисел следующие три предположения:

$$p' + 1 = p'', \quad q' = q'' + 1,$$

$$p' = p'', \quad q' = q'' + 2,$$

$$2 + p' = p'', \quad q' = q''.$$

Но если мы обратимся к принципам главы XXVIII, то увидим, что эти четыре числа не могут принимать все значения, совместные с тремя предположениями. В п. 335 мы найдем разбор наиболее простых и наиболее часто встречающихся случаев.

Приложение к орбитам Дарвина

381. В томе XXI «Acta mathematica» Дж. Г. Дарвин [18] подробно изучил некоторые периодические решения. Он принимает предположения п. 9 и рассматривает возмущающую планету, которую называет Юпитером и которой приписывает массу, в десять раз меньшую, чем масса Солнца. Эта фиктивная планета описывает около Солнца круговую орбиту, а возмущаемая малая планета нулевой массы движется в плоскости этой орбиты.

Так, он установил существование периодических решений, которые содержатся в периодических решениях, названных мною решениями первого сорта, и которые были подробно им изучены. Эти орбиты отнесены к подвижным осям, вращающимся вокруг Солнца с той же угловой скоростью, что и Юпитер; в относительном движении, отнесенном к этим подвижным осям, эти орбиты являются замкнутыми кривыми.

Первым классом периодических орбит является класс, названный Дарвином классом планет A. Орбита представляет собой замкнутую кривую, охватывающую Солнце, но не охватывающую Юпитер. Орбита устойчива, когда постоянная Якоби больше 39, и неустойчива в противном случае. Неустойчивость соответствует характеристическому показателю, имеющему мнимую часть $i\pi/T$.

Следовательно, для значений постоянной Якоби, близких к 39, существуют периодические решения второго рода с двойным периодом.

Соответствующая орбита будет замкнутой кривой с двойной точкой, совершающей два оборота вокруг Солнца. Два завитка этой кривой очень мало отличаются друг от друга и оба мало отличаются от круга.

Далее мы более подробно изучим эти решения второго рода.

Дарвин нашел также осциллирующие спутники, которые он называет a и b, о которых мы говорили в п. 52. Они всегда неустойчивы.

Наконец, он нашел спутников в собственном смысле, которые описывают относительно системы рассмотренных подвижных осей замкнутые кривые, охватывающие Юпитер, но не охватывающие Солнце.

При $C=40$ (C — постоянная Якоби) мы имеем только одного спутника A, который устойчив. При $C=39{,}5$ спутник A становится неустойчивым с вещественным показателем α; но мы имеем два новых спутника B и C, второй — устойчивый, первый — неустойчивый с вещественным показателем α. При $C=39$ мы снова находим тот же результат; при $C=38{,}5$ спутник C становится неустойчивым с комплексным показателем α (мнимая часть которого равна $i\pi/T$); наконец, при $C=38$ мы снова находим тот же результат.

Следовательно, мы должны рассмотреть три перехода:

1) переход спутника A от устойчивости к неустойчивости;
2) появление спутников B и C;
3) переход спутника C от устойчивости к неустойчивости.

Два последних перехода не вызывают никаких затруднений.

Мы видим, что одновременно появляются два периодических решения B и C, сначала мало отличающиеся друг от друга; одно — устойчиво, другое — неустойчиво; показатель α для неустойчивого решения веществен.

Все это согласуется с выводами п. 378.

Переход от устойчивости к неустойчивости спутника C также не представляет затруднений, ибо показатель α в случае неустойчивости является комплексным; следовательно, мы находимся в условиях п. 380. Таким образом, существуют периодические решения второго рода, соответствующие замкнутым кривым, совершающим два оборота вокруг Юпитера.

382. Зато переход спутника A от устойчивости к неустойчивости представляет бóльшие трудности, поскольку в случае неустойчивости показатель α веществен. Следовательно, согласно п. 378, должен был бы иметь место *обмен устойчивостью* с другими периодическими решениями, соответствующими замкнутым кривым, совершающим только один оборот вокруг Юпитера. Кажется, что это не вытекает из вычислений Дарвина.

Естественно, мы приходим к мысли, что неустойчивые спутники A, открытые Дарвином, не являются аналитическим продолжением его устойчивых спутников A.

Другие рассуждения приводят к тому же результату.

Орбиты устойчивых спутников A являются простыми замкнутыми кривыми; неустойчивые спутники A имеют орбиты в форме восьмерки.

Каким образом можно было бы перейти от одного случая к другому? Это можно сделать только по кривой, имеющей точку возврата; но в точке возврата скорость должна быть равной нулю, и по соображениям симметрии эта точка возврата могла бы находиться только на оси x; она не может быть между Солнцем и Юпитером. В самом деле, на рис. 1 Дарвин дает кривые нулевой скорости; при $C > 40{,}18$ эти кривые пересекают ось x между Солнцем и Юпитером; но это больше не имеет места при $C < 40{,}18$, и переход имеет место между $C=40$ и $C=39{,}5$.

Остается предположение, что точка возврата находится за Юпитером, но оно также неудовлетворительно. Сравним две орбиты, соответствующие $C=40$ и $C=39{,}5$; первая дважды пересекает ось x под прямым углом, один раз за Юпитером, второй раз перед ним; пусть P и Q — две точки пересечения; аналогично, вторая орбита, если оставить в стороне двойную точку, дважды пересекает ось x под прямым углом, один раз за и один раз перед Юпитером; пусть P' и Q' — две точки пересечения. Рассмотрим точку пересечения P или P', которая лежит за Юпитером, и посмотрим на знак dy/dt; мы увидим, что как для одной, так и для другой орбиты этот знак положителен. Но производная dy/dt должна была изменить знак в момент перехода через точку возврата.

Точку P, предполагаемую точку возврата, и точку P' нельзя, следовательно, рассматривать как аналитическое продолжение друг друга.

Тогда следовало бы предположить, что в какой-то момент произошел обмен между двумя точками пересечения орбиты спутника A и оси x, точка, находившаяся справа, переходит налево и обратно. Ничто в ходе кривых, построенных Дарвином, не позволяет сделать подобного предположения.

Следовательно, я замечаю, что неустойчивые спутники A не являются аналитическим продолжением устойчивых спутников A. Но тогда, чем стали устойчивые спутники A?

По этому поводу я могу только делать предположения, а чтобы можно было поступить иначе, следовало бы пересмотреть механические квадратуры Дарвина.

Но если изучить поведение кривых, то кажется, что в некоторый момент орбита спутника A должна пройти через Юпитер и что затем она становится тем, что Дарвин называет *осциллирующим спутником.*

383. Изучим ближе планеты A и переход этих планет от устойчивости к неустойчивости.

Орбиты этих планет соответствуют тому, что мы назвали *периодическими решениями первого сорта* (п. 40). В двойной точке орбита, которая делает два оборота вокруг Солнца и мало отличается от орбиты планеты A в момент, когда орбита этой планеты только что стала неустойчивой, соответствует тому, что мы назвали *периодическими решениями второго сорта* (п. 47).

В самом деле, если применить к решениям первого сорта методику, посредством которой мы вывели периодические решения второго рода из решений первого рода, то придем как раз к решениям второго сорта.

В решениях второго сорта средние аномалистические движения, мало отличающиеся от средних движений в собственном смысле, находятся в соизмеримости. Следовательно, мы должны ожидать, что для решения второго сорта (и, следовательно, для планеты A в момент перехода от устойчивости к неустойчивости) отношение средних движений будет близким к простому рациональному числу, а здесь оно будет даже близко к кратному $^1/_2$, поскольку орбита должна сделать два оборота вокруг Солнца.

Другими словами, в момент перехода величина, которую Дарвин называет nT, должна быть близкой к кратному π.

И это на самом деле имеет место; таблицы Дарвина нам дают:

$C=40$	A устойчива	$nT=154°$,
$C=39{,}5$	A устойчива	$nT=165°$,
$C=39$	A неустойчива	$nT=177°$,
$C=38{,}5$	A неустойчива	$nT=191°$.

Мы видим, что переход должен совершиться приблизительно при $nT=170°$, и это число близко к $180°$.

Среднее движение планеты A приблизительно равно, следовательно, утроенному среднему движению Юпитера.

Можно было бы подумать о приложении принципов главы XXX к изучению этих решений второго сорта, но мы встретились бы с трудностями, потому что мы находимся в исключительном случае. Лучше предпринять это изучение прямым путем.

384. Возьмем снова обозначения п. 313 и положим, как в этом пункте,

$$x_1 = L - G, \qquad x_2 = L + G,$$
$$2y_1 = l - g + t, \qquad 2y_2 = l + g - t,$$
$$F' = R + G = F_0 + \mu F_1 + \ldots,$$
$$F_0 = \frac{2}{(x_1 + x_2)^2} + \frac{x_2 - x_1}{2}.$$

Величина L должна иметь тот же знак, что и G (см. стр. 179), а эксцентриситет должен быть очень малым; так как x_1 имеет порядок квадрата эксцентриситета, то эта переменная также будет очень малой.

Так как речь идет только об определении числа периодических решений и их устойчивости, то нам достаточно одного приближения.

Следовательно, мы пренебрежем $\mu^2 F_2$ и последующими членами. В члене μF_1 учтем только вековые члены и члены очень долгого периода и, кроме того, отбросим высшие степени x_1. Таким образом мы получим

$$F_1 = a + bx_1 + cx_1 \cos \omega,$$

где a, b, c — функции только x_2 и где $cx_1 \cos \omega$ — сохраненный член очень долгого периода.

Членами очень долгого периода являются члены с $l + 3g - 3t$, т. е. члены с $2y_2 - y_1$; следовательно, мы имеем

$$\omega = 4y_2 - 2y_1.$$

Тогда

$$F' = \frac{2}{(x_1 + x_2)^2} + \frac{x_2 - x_1}{2} + \mu (a + bx_1 + cx_1 \cos \omega),$$

и мы можем применить метод Делоне.

Канонические уравнения допускают интеграл

$$x_2 + 2x_1 = k,$$

откуда

$$F' = \frac{2}{(k - x_1)^2} + \frac{k}{2} - \frac{3x_1}{2} + \mu (a + bx_1 + cx_1 \cos \omega).$$

С принятой степенью приближения мы можем заменить a, b, c величинами

$$a_0 - 2x_1 a_0', \qquad b_0, \qquad c_0,$$

обозначая через a_0, a'_0, b_0, c_0 результат замены в a, da/dx_2, b, c переменной x_2 величиной k.

Таким образом,

$$\alpha = a_0, \quad \beta = b_0 - 2a'_0, \quad \gamma = c_0$$

обозначают постоянные, зависящие от k, и мы имеем

$$F' = \frac{2}{(k-x_1)^2} + \frac{k}{2} - \frac{3x_1}{2} + \mu(\alpha + \beta x_1 + \gamma x_1 \cos\omega).$$

Будем рассматривать k как постоянную, $\sqrt{x_1}\cos\frac{\omega}{2}$, $\sqrt{x_1}\sin\frac{\omega}{2}$ как прямоугольные координаты точки на плоскости и построим кривую

$$F' = C,$$

где C означает вторую постоянную.

Эта кривая зависит, таким образом, от двух постоянных k и C. Если она имеет двойную точку, то двойная точка будет соответствовать периодическому решению, которое будет устойчивым, если две касательные в двойной точке мнимые, и неустойчивым, если две касательные вещественны.

Заметим, что кривая симметрична относительно двух осей координат и что две двойные точки, симметричные друг другу относительно начала, не соответствуют двум подлинно различным периодическим решениям.

Двойные точки могут находиться только на одной из осей координат, так что мы найдем все эти точки, полагая

$$\omega = 0, \quad \omega = \pi.$$

Если положить

$$C = \frac{2}{k^2} + \frac{k}{2} + \mu\alpha,$$

то кривая $F' = C$ проходит через начало и имеет в нем двойную точку. Касательные в двойной точке заданы уравнением

$$\frac{4}{k^3} - \frac{3}{2} + \mu\beta + \mu\gamma\cos\omega = 0.$$

Следовательно, если

$$\frac{4}{k^3} - \frac{3}{2} + \mu\beta > \mu\gamma, \tag{1}$$

то касательные мнимы. Если

$$\mu\gamma > \frac{4}{k^3} - \frac{3}{2} + \mu\beta > -\mu\gamma, \tag{2}$$

то касательные вещественны.

Если, наконец,

$$-\mu\gamma > \frac{4}{k^3} - \frac{3}{2} + \mu\beta, \tag{3}$$

то касательные снова мнимы.

Коэффициент β положителен; я написал предыдущие неравенства в предположении, что γ также положительно. Впрочем, если бы γ было отрицательным, то мы должны были только изменить ω на $\omega+\pi$.

Двойная точка в начале соответствует решению первого сорта, т. е. планете A по Дарвину. Мы видим, что это решение устойчиво, когда имеют место неравенства (1) или (3), и неустойчиво, когда имеют место неравенства (2).

Изучим теперь двойные точки, которые могут находиться на прямой $\omega=0$.

Если мы положим $\omega=0$, то функция F' примет вид

$$F' = \frac{2}{(k-x_1)^2} + \frac{k}{2} - \frac{3x_1}{2} + \mu\alpha + \mu x_1(\beta+\gamma) = C. \tag{4}$$

Если, оставляя k постоянным, варьировать x_1 от 0 до k, то мы видим, что максимумы и минимумы F' заданы уравнением

$$\frac{4}{(k-x_1)^3} - \frac{3}{2} + \mu(\beta+\gamma) = 0, \tag{5}$$

которое допускает решение, если имеет место неравенство (3), и не допускает его в противном случае.

Следовательно, если неравенство (3) не имеет места, то функция F' монотонно убывает; если оно имеет место, то функция F' сначала возрастает, достигает максимума, а затем убывает.

Этот максимум соответствует двойной точке, расположенной на прямой $\omega=0$, или, скорее, двум двойным точкам, симметричным относительно начала.

Но нам необходимо узнать, сколько этих двойных точек мы находим для заданного значения постоянной C; уравнение (5) дает x_1 в функции k; нужно вывести из него x_1 в функции C.

Но уравнения (4) и (5) можно написать в виде

$$F' = C, \qquad \frac{dF'}{dx_1} = 0,$$

откуда

$$\frac{dC}{dx_1} = \frac{dF'}{dx_1} + \frac{dF'}{dk}\frac{dk}{dx_1} = \frac{dF'}{dk}\frac{dk}{dx_1},$$

$$\frac{d^2F'}{dx_1^2} + \frac{d^2F'}{dk\,dx_1}\frac{dk}{dx_1} = 0.$$

Но, пренебрегая членами с μ, мы имеем

$$\frac{dF'}{dk}+\frac{dF'}{dx_1}=-1,$$

откуда

$$\frac{dF'}{dk}=-1,$$

$$\frac{d^2F'}{dkdx_1}+\frac{d^2F'}{dx_1^2}=0;\quad \frac{d^2F'}{dx_1^2}=\frac{12}{(k-x_1)^4}=12\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{4}{3}},$$

откуда

$$\frac{dk}{dx_1}=1,\qquad \frac{dC}{dx_1}=-1,$$

откуда следует, что x_1 — монотонно убывающая функция от C.

Следовательно, для одного значения C мы имеем только не более одного максимума, т. е. имеем не более двух двойных точек, симметричных друг другу относительно начала, на прямой $\omega=0$.

Итак, пусть C_0 — значение C, удовлетворяющее двум равенствам

$$C_0=\frac{2}{k^2}+\frac{k}{2}+\mu\alpha,$$

$$\frac{4}{k^3}-\frac{3}{2}+\mu(\beta+\gamma)=0.$$

Мы увидим, что при $C > C_0$ на прямой $\omega=0$ не будет двойных точек и что при $C < C_0$ их будет две.

Такое же рассуждение приложимо к случаю двойных точек, расположенных на прямой $\omega=\pi$. Значения x_1 будут заданы уравнением

$$\frac{4}{(k-x_1)^3}-\frac{3}{2}+\mu(\beta+\gamma)=0, \tag{5bis}$$

которое допускает решение, если имеют место неравенства (2) или (3).

Тогда, если C_1 — значение C, удовлетворяющее двум равенствам

$$C_1=\frac{2}{k^2}+\frac{k}{2}+\mu\alpha,$$

$$\frac{4}{k^3}-\frac{3}{2}+\mu(\beta+\gamma)=0,$$

то условием того, чтобы на прямой

$$\omega=\pi$$

существовали две двойные точки, будет неравенство $C < C_1$.

Заметим, что $C_1 > C_0$, что C_0 — значение C, при котором мы переходим от неравенства (2) к неравенству (3), а C_1 — такое значение C, при котором мы переходим от неравенства (1) к неравенству (2).

При этом, строя кривые, мы легко найдем, что для двойных точек, лежащих на $\omega=0$, касательные вещественны, и что для двойных точек, лежащих на $\omega=\pi$, они мнимы.

Следовательно, мы можем резюмировать наши результаты следующим образом.

Первый случай

$$C > C_1.$$

Имеет место неравенство (1).

Решение первого сорта (планета A) устойчиво.

Решений второго сорта нет (орбита с двойной точкой).

Второй случай

$$C_1 > C > C_0.$$

Имеют место неравенства (2).

Решение первого сорта стало неустойчивым.

Имеется одно решение второго сорта, которое устойчиво.

Третий случай

$$C < C_0.$$

Имеет место неравенство (3).

Решение первого сорта вновь стало устойчивым.

Имеются два решения второго сорта, одно — устойчивое, а другое — неустойчивое; первое соответствует двум двойным точкам, расположенным на прямой $\omega=\pi$, а второе — двум двойным точкам, расположенным на прямой $\omega=0$.

Эти заключения верны, лишь бы μ было достаточно малым; является ли значение $\mu={}^1/_{10}$, принятое Дарвином, достаточно малым?

Я этого не проверял, но это кажется весьма вероятным.

Таким образом, правдоподобно, что если бы Дарвин продолжил изучение планет A для значений C, меньших чем 38, то он снова нашел бы устойчивые орбиты.

Глава XXXII

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОГО ВИДА

385. Возьмем снова уравнения п. 13

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i}, \qquad F=F_0+\mu F_1+\ldots \tag{1}$$

с p степенями свободы. Согласно тому, что мы видели в п. 42, эти уравнения будут допускать такие периодические решения, что когда t увеличивается на период T, переменные $y_1, y_2, \ldots, y_p$ увеличиваются соответственно на

$$2k_1\pi, \ 2k_2\pi, \ \ldots, \ 2k_p\pi.$$

Целые $k_1, k_2, \ldots, k_p$ могут быть любыми.

Однако это справедливо, только если гессиан от F_0 по x не равен нулю. Доказательство п. 42 теряет силу, когда этот гессиан есть нуль и, в частности, когда F_0 зависит не от всех переменных x.

Но это как раз имеет место в задаче трех тел. Я напоминаю, что y_1, y_2; y_3, y_4; y_5, y_6 представляют тогда соответственно средние долготы планет, средние долготы перигелиев и средние долготы узлов и что F_0 зависит только от двух первых переменных x_1 и x_2, которые пропорциональны корням квадратным из больших осей.

Рассмотрим тогда периодическое решение; согласно принятым соглашениям, решение будет рассматриваться как периодическое, лишь бы *разности* величин y увеличивались на кратные 2π, когда t увеличивается на период; в самом деле, F зависит только от этих разностей.

Итак, пусть

$$2k_1\pi, \ 2k_2\pi, \ 2k_3\pi, \ 2k_4\pi, \ 2k_5\pi$$

— количества, на которые увеличиваются

$$y_1-y_6, \quad y_2-y_6, \quad y_3-y_6, \quad y_4-y_6, \quad y_5-y_6,$$

когда t увеличивается на период.

Все, что мы смогли установить в главе III — это что существуют периодические решения, соответствующие любым значениям k_1 и k_2, *но в предположении*, что k_3, k_4 и k_5 *— нули.*

Можно спросить себя, существуют ли также здесь, как и в общем случае, периодические решения, соответствующие *любым значениям пяти целых k*, решения, которые я могу назвать решениями *второго вида*.

386. Существуют ли *эти решения второго вида*? Сразу же возникает соблазн ответить утвердительно, опираясь на соображения непрерывности и учитывая, что достаточно очень мало изменить вид функции F, чтобы получить канонические уравнения, к которым приложимы рассуждения п. 42.

Но тогда возникает одна трудность: чем станут эти решения, когда мы обратим в нуль величину, названную нами μ, которая пропорциональна возмущающим массам?

Если возмущающие массы равны нулю, две планеты подчиняются законам Кеплера; перигелии и узлы неподвижны, так что числа k_3, k_4 и k_5 не могут иметь, как кажется, иного значения, чем нуль.

Вот как можно преодолеть это затруднение. Если массы бесконечно малы, то две планеты будут подчиняться законам Кеплера, *если только расстояние между ними само не становится в некоторые моменты бесконечно малым.*

В самом деле, предположим, что две планеты, сначала очень удаленные друг от друга, как одна, так и другая, описывают кеплеров эллипс. Может случиться, что эти два эллипса пересекаются или проходят очень близко друг от друга, и притом таким образом, что в некоторый момент расстояние между двумя планетами становится очень малым; в этот момент их возмущающее взаимодействие может стать ощутимым, и две орбиты будут подвержены значительным возмущениям. Затем планеты, будучи снова удаленными друг от друга, опять будут описывать кеплеровы эллипсы. Только эти новые эллипсы будут сильно отличаться от старых; перигелии и узлы подверглись значительным изменениям.

Я назову это явление *соударением*, хотя речь не идет о соударении в собственном смысле этого слова, поскольку две планеты не приходят в соприкосновение, а достаточно, чтобы их расстояние стало достаточно малым для того, чтобы притяжение было ощутимым, несмотря на малость масс.

Как бы то ни было, если принять в расчет орбиты с соударениями, то будет неправильным говорить, что при $\mu=0$ перигелии и узлы неподвижны и что, следовательно, числа k_3, k_4 и k_5 должны быть нулями.

Таким образом, мы пришли к мысли, что решения второго вида существуют и что, если устремить μ к нулю, то они стремятся к орбитам с рядом соударений. Но этого краткого очерка недостаточно, и необходимо более глубокое исследование.

387. Отдадим себе сначала отчет в последствиях соударения; пусть E и E' — эллипсы, описанные первой планетой до и после соударения; пусть E_1 и E_1' — эллипсы, описанные второй планетой. Ясно, что эти

четыре эллипса должны пересечься в одной и той же точке, и притом таким образом, чтобы две планеты, описывая эти четыре орбиты, проходили через точку пересечения в момент соударения.

В самом деле, пока их расстояние ощутимо, две планеты описывают кривые, мало отличающиеся от эллипса; в течение очень короткого времени, когда их расстояние очень мало, они, наоборот, описывают орбиты, очень отличающиеся от эллипса.

Эти орбиты сводятся к малым дугам кривой C очень малого радиуса кривизны, очень мало отличающимся от дуг гиперболы. В пределе очень короткое время соударения сводится к мгновению; малые дуги кривой C сводятся к точке, и орбита, сводящаяся к двум дугам эллипса, имеет угловую точку.

Чтобы окончательно определить орбиты E, E', E_1, E_1', необходимо знать по величине и по направлению скорости двух планет P и P_1 до и после соударения. Какие соотношения имеются между этими скоростями? Я замечаю прежде всего, что скорость центра масс двух тел P и P_1 должна быть одной и той же до и после соударения, и притом как по величине, так и по направлению.

Рассмотрим теперь скорость P относительно P_1; эта скорость должна быть одной и той же по величине до и после соударения; но она может отличаться по направлению.

Вот правило для определения направления этой скорости после соударения.

Рассмотрим подвижные оси, начало которых лежит в P_1, и рассмотрим прямую AB, представляющую по величине и направлению относительную скорость P относительно P_1 до соударения. Эта прямая AB должна проходить через точку P_1, поскольку тело, которое имеет скорость, представляемую ею, должно столкнуться с точкой P_1, неподвижной относительно подвижных осей. Но это справедливо только в пределе, это справедливо только потому, что мы рассматриваем как бесконечно малые массы, с одной стороны, так и с другой — бесконечно малое расстояние, на котором взаимное притяжение P и P_1 начинает ощущаться, т. е. то, что можно было бы назвать *радиусом действия*. Следовательно, было бы точнее сказать, что расстояние δ точки P от прямой AB является бесконечно малой того же порядка, что и радиус действия.

Пусть теперь $A'B'$ — прямая, представляющая относительную скорость P относительно P_1 после соударения; $A'B'$ равно по величине AB, а расстояние P_1 от $A'B'$ равно δ.

Вот, наконец, правило для определения направления $A'B'$. Точка P_1 и две прямые AB и $A'B'$ лежат в одной и той же плоскости (с точностью до бесконечно малых высшего порядка); угол между AB и $A'B'$ определяется следующим образом: тангенс половины этого угла пропорционален δ и квадрату длины AB.

Таким образом, мы видим, что направление $A'B'$ может быть любым.

Следовательно, единственные условия, которым подчинены наши че-

тыре скорости, заключаются в следующем: постоянство скорости центра масс по величине и по направлению; постоянство относительной скорости только по величине. Эти условия можно также сформулировать так: живая сила и постоянные площадей не должны изменяться в результате соударения.

388. Попытаемся построить орбиты с соударениями, которые являются пределами, к которым стремятся решения второго вида, когда μ стремится к нулю.

Прежде всего я замечаю, что для того чтобы подобная орбита была периодической, необходимо предположить, по крайней мере, два соударения. Предположим сначала, что два последовательных соударения никогда не имеют места в одной и той же точке. Итак, пусть E и E_1 — эллипсы, описанные планетами P и P_1 в промежутке времени между двумя последовательными соударениями. Эти два эллипса должны будут пересечься в двух точках, а так как они имеют общий фокус, то они лежат в одной и той же плоскости, если только две точки пересечения и фокус не находятся на прямой линии.

Предположим, что мы находимся в условиях этого исключительного случая; пусть Q и Q' — две точки пересечения эллипсов E и E_1, которые, как я предполагаю, не лежат в одной и той же плоскости; эти две точки лежат на прямой линии с фокусом F; пусть E' и E_1' — эллипсы, описанные двумя планетами после соударения. Они пройдут через точку Q, в которой происходит соударение, и, вообще говоря, не будут лежать в одной и той же плоскости; их плоскости пересекутся по прямой FQ, так что их вторая точка пересечения (которая должна существовать, если два последовательных соударения никогда не имеют места в одной и той же точке) будет находиться на этой прямой FQ. Я добавляю, что два эллипса E и E_1 будут иметь один и тот же параметр. В самом деле, так как точки F, Q, и Q' лежат на прямой линии, то обратная величина параметра эллипса E или эллипса E_1 будет равна $\frac{1}{2FQ}+\frac{1}{2FQ'}$.

Вот каким образом следует поступить при этих условиях. Предположим для определенности четыре соударения; пусть Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 — точки, в которых имеют место эти четыре соударения.

Мы можем произвольным образом задать эти четыре точки, лишь бы они, разумеется, лежали на одной и той же прямой, проходящей через F.

Мы должны построить два эллипса E и E_1, пересекающиеся в Q_1 и Q_2, два эллипса E' и E_1', пересекающиеся в Q_2 и Q_3, еще два эллипса E'' и E_1'', пересекающиеся в Q_3 и Q_4, и, наконец, еще два E''' и E_1''', пересекающиеся в Q_4 и Q_1.

Орбита P состоит из дуг, принадлежащих четырем эллипсам E, E', E'', E''', а орбита P_1 — из дуг, принадлежащих четырем эллипсам E_1, E_1', E_1'', E_1'''.

Мы зададим себе произвольным образом постоянную живых сил и постоянные площадей; эти постоянные должны быть одинаковыми для промежутка времени между двумя первыми соударениями (орбиты E и E_1), для следующего промежутка времени и для всех других промежутков; согласно предыдущему пункту, — это единственное условие, которое мы должны выполнить.

Вот как мы поступим, чтобы построить E и E_1: рассмотрим движение трех тел; так как мы предполагаем, что $\mu=0$, то это движение является кеплеровым, и центральное тело можно рассматривать как неподвижное в F. Мы знаем полную живую силу системы. Две планеты P и P_1 должны одновременно выйти из точки Q_1, чтобы одновременно прийти в точку Q_2. Когда P и P_1 идут из Q_1 в Q_2, истинная долгота P увеличивается на $(2m+1)\,\pi$, а истинная долгота P_1 увеличивается на $(2m_1+1)\,\pi$. Мы можем еще задать себе произвольным образом два целых m и m_1. Тогда задача определена полностью; важно заметить, что наклон орбит в нее не входит; чтобы решить ее, можно предположить движение плоским. Задачу всегда можно решить; достаточно, в самом деле, приложить принцип Мопертюи, и действие по Мопертюи, существенно положительное, всегда имеет минимум.

Остается определить плоскости двух эллипсов. Мы знаем постоянные площадей; следовательно, мы знаем неизменную плоскость, которая проходит через прямую FQ_1Q_2; секториальная скорость системы представляется вектором, перпендикулярным к неизменной плоскости и известным нам по величине и по направлению; он равен геометрической сумме секториальных скоростей двух планет, изображаемых двумя векторами, которые нам известны по величине, поскольку они равны соответственно mp и m_1p, где m и m_1 — массы двух планет, а p — общий параметр двух эллипсов E и E_1. Следовательно, мы можем построить направления этих двух составляющих векторов, которые перпендикулярны соответственно к плоскости E и к плоскости E_1.

Аналогично мы определим E' и E_1', E'' и E_1'', . . .

389. Предположим теперь, что все последовательные соударения имеют место в одной и той же точке Q. Период будет разделен на столько интервалов, сколько будет соударений; рассмотрим один из этих интервалов, в течение которого две планеты описывают два эллипса E и E_1. Как и в предыдущем пункте, мы зададим себе постоянные живых сил и площадей, которые должны быть одними и теми же для всех интервалов, и речь идет о построении E и E_1.

Предположим, что в течение рассматриваемого интервала планета P совершила m, а планета P_1 — m_1 полных обращений; мы сможем задать себе произвольным образом два целых m и m_1. Зная эти два целых числа, мы будем знать отношение больших осей, а так как мы знаем постоянную живых сил, то узнаем и сами большие оси.

С другой стороны, мы знаем постоянные площадей и, следовательно, вектор, который представляет секториальную скорость системы. Этот вектор может быть разложен бесконечным числом способов на два составляющих вектора, представляющих секториальные скорости P и P_1.

Зададим это разложение произвольным образом. Зная составляющие векторы, узнаем плоскости двух эллипсов и их параметры. Остается узнать ориентацию каждого из эллипсов в его плоскости; мы определим ее так, чтобы эллипс проходил через точку Q.

В итоге мы смогли выбрать произвольно:

1) точку Q и число интервалов;

2) для всех интервалов постоянную живых сил и постоянную площадей;

3) для *каждого* интервала целые m и m_1 и разложение секториального вектора.

Однако чтобы задача была возможной, эти произвольные параметры должны удовлетворять некоторым неравенствам, которые я не буду писать.

390. Оставим в стороне эти исключительные случаи, когда все соударения имеют место на одной и той же прямой или в одной и той же точке, и перейдем к случаю плоского движения. Пусть Q_1, Q_2, . . . — точки, в которых происходят последовательные соударения; мы зададим себе произвольно постоянную живых сил и постоянную площадей, которые должны быть одними и теми же для всех интервалов.

Рассмотрим один из интервалов, например, тот, в течение которого две планеты идут из Q_1 в Q_2. Мы зададим произвольно величины двух радиусов-векторов FQ_1 и FQ_2, но не зададим ни угол между этими двумя радиусами-векторами, ни продолжительность интервала.

Мы знаем, что в этом интервале разность долготы двух планет увеличилась на $2m\pi$. Зафиксируем произвольно целое m.

Зная это целое число, две длины FQ_1 и FQ_2, две постоянные живых сил и площадей, мы имеем все, что необходимо для определения орбит E и E_1. Это сводится снова к приложению принципа Мопертюи, но с определением действия по Гамильтону, как в п. 339, и выводом из него действия по Мопертюи при помощи процедуры пунктов 336 и 337. Так как, к сожалению, это действие по Мопертюи не всегда положительно, то мы не уверены, имеет ли оно всегда минимум.

В итоге мы можем выбрать произвольно:

1) число интервалов и длины FQ_1, FQ_2 . . .;

2) постоянные площадей и живых сил;

3) для *каждого* интервала целое m.

Все полученные таким образом орбиты с соударениями плоские; среди периодических орбит второго вида, которые сводятся к этим орбитам с соударениями при $\mu=0$, наверняка имеются плоские; возможно также,

что среди них имеются такие, которые не являются плоскими при $\mu > 0$ и становятся плоскими только в пределе.

391. Посмотрим теперь, как можно доказать существование периодических решений второго вида, которые в пределе сводятся к орбитам с соударениями, только что нами построенным.

Рассмотрим одну из орбит с соударениями, и пусть t_0 — момент, предшествующий первому соударению, и t_1 — момент, заключенный между первым и вторым соударениями. Аналогично, пусть t_2 — момент, заключенный между вторым и третьим соударениями. Для определенности я предполагаю, что имеется три соударения, и называю T периодом, так что в момент t_0+T три тела находятся в том же относительном положении, что и в момент t_0.

Я беру за переменные большие оси, наклоны и эксцентриситеты и *разности* средних долгот, долгот перигелиев и узлов; всего будет одиннадцать переменных, так что орбиту мы будем рассматривать как периодическую, если три тела будут снова находиться в том же самом *относительном* положении в конце периода.

Пусть $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{11}^0$ — значения этих переменных в момент t_0 для рассматриваемой орбиты с соударениями и, следовательно, при $\mu=0$; пусть x_i^1 — значения этих переменных в момент t_1 для этой же орбиты с соударениями, x_i^2 — их значения в момент t_2 и x_i^3 — их значения в момент t_0+T. Мы будем иметь

$$x_i^3 = x_i^0 + 2m_i\pi,$$

где m_i — целое, которое должно быть нулем для больших осей, эксцентриситетов и наклонов.

Рассмотрим теперь орбиту, мало отличающуюся от орбиты с соударениями, и дадим μ очень малое значение, но отличное от нуля. На этой новой орбите наши переменные примут значения $x_i^0+\beta_i^0$ в момент t_0, $x_i^1+\beta_i^1$ — в момент t_1, $x_i^2+\beta_i^2$ — в момент t_2 и, наконец, $x_i^3+\beta_i^3$ — в момент $t_0+T+\tau$.

Условием того, чтобы решение было периодическим с периодом $T+\tau$, будет

$$\beta_i^3 = \beta_i^0.$$

Для того чтобы соударение происходило между моментом t_0 и моментом t_1 при $\mu=0$, переменные β_i^0 должны удовлетворять двум условиям. Пусть

$$f_1(\beta_i^0) = f_2(\beta_i^0) = 0$$

— эти два условия.

Положим

$$f_1(\beta_i^0) = \gamma_1^0\mu, \qquad f_2(\beta_i^0) = \gamma_2^0\mu; \qquad \beta_k^0 = \gamma_k^0 \quad (k = 3, 4, \ldots, 11).$$

Мы видим, что величины β_i^0 являются голоморфными функциями от γ_i^0 и μ; применяя принципы главы III, *мы докажем, что то же самое относится и к величинам* β_i^1 [19].

Для того чтобы соударение произошло между моментами t_1 и t_2 (в предположении $\mu=0$), необходимы два условия, которые я записываю в виде

$$f_1'(\beta_i^1)=f_2'(\beta_i^1)=0. \tag{1}$$

Заменяя в соотношениях (1) величины β_i^1 их значениями в функции γ_i^0 и μ и полагая затем $\mu=0$, я нахожу

$$\theta_1(\gamma_i^0)=\theta_2(\gamma_i^0)=0.$$

Положим тогда

$$\theta_1(\gamma_i^0)=\gamma_1^1\mu, \quad \theta_2(\gamma_i^0)=\gamma_2^1\mu, \quad \beta_k^1=\gamma_k^1 \quad (k=3, \ldots, 11);$$

я вижу, что β_i^1 и β_i^2 — голоморфные функции от γ_i^1 и μ, а также от γ_i^0 и, следовательно, от β_i^0.

Наконец, чтобы соударение произошло между моментами t_2 и $t_0+T+\tau$, необходимы два условия, которые я записываю в виде

$$f_1''(\beta_i^2)=f_2''(\beta_i^2)=0.$$

Заменяя в них величины β_i^2 их значениями в функции γ_i^1 и μ и полагая затем $\mu=0$, приведем их к виду

$$\eta_1(\gamma_i^1)=\eta_2(\gamma_i^1)=0.$$

Я полагаю

$$\eta_1(\gamma_i^1)=\gamma_1^2\mu, \quad \eta_2(\gamma_i^1)=\gamma_2^2\mu, \quad \beta_k^2=\gamma_k^2 \quad (k=3, \ldots, 11)$$

и опять вижу, что величины β_i^0, β_i^1, β_i^2 — голоморфные функции от γ_i^2 и μ; следовательно, β_i^3 являются голоморфными функциями от γ_i^2, μ и τ.

Следовательно, соотношения $\beta_i^3=\beta_i^0$ представляют собой равенства, обе части которых голоморфны относительно γ_i^2, μ и τ. Анализ этих уравнений выполняется так же, как в главе III. Он докажет существование решений второго вида.

Я не считаю необходимым вдаваться в бо́льшие подробности, ибо эти решения слишком отклоняются от истинных орбит небесных тел.

Глава XXXIII

ДВОЯКО-АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Различные способы геометрического представления

392. Для изучения двояко-асимптотических решений мы ограничимся сейчас весьма частным случаем п. 9, когда масса возмущаемой планеты равна нулю, орбита возмущающей планеты круговая, наклоны равны нулю. Тогда задача трех тел допускает интеграл, хорошо известный под названием *интеграла Якоби*. Возвратимся к изучению этой задачи п. 9 в п. 299; мы должны будем различать несколько случаев. На стр. 145 мы видели, что должно существовать неравенство

$$\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}+\frac{n^2}{2}(\xi^2+\eta^2)=V+\frac{n^2}{2}(\xi^2+\eta^2)>-h. \tag{1}$$

Затем мы различали случай, когда m_1 намного меньше m_2 и когда $-h$ достаточно велико (стр. 146), и мы видели, что кривая

$$V+\frac{n^2}{2}(\xi^2+\eta^2)=-h \tag{2}$$

распадается на три замкнутые ветви, которые мы назвали C_1, C_2 и C_3; следовательно, в силу неравенства (1) точка ξ, η должна всегда оставаться внутри C_1, или всегда внутри C_2, или всегда вне C_3 (ξ, η — прямоугольные координаты возмущаемой планеты относительно подвижных осей).

В дальнейшем мы предположим, что значение постоянной $-h$ достаточно велико, чтобы кривая (2) также распадалась на три замкнутые ветви и чтобы точка ξ, η всегда оставалась внутри C_2. Таким образом, расстояние r_2 возмущаемой планеты от центрального тела может обратиться в нуль, но этого не произойдет с расстоянием r_1 между двумя планетами.

Это предположение соответствует следующему, которое мы сделали на стр. 178, а именно, что кривая $F=C$ имеет вид, представленный на рис. 9, и что точка x_1, x_2 остается на дуге AB.

Мы примем сейчас обозначения п. 313; введем, следовательно, кеплеровы переменные L, G, l, g. Но имеется два способа определения этих кеплеровых переменных. Мы могли бы, как в п. 9, отнести возмущаемое тело к центру тяжести возмущающего и центрального тел и рассмотреть оскулирующий эллипс, описанный вокруг этого центра тяжести. Однако

предпочтительнее отнести возмущаемое тело к самому центральному телу и рассмотреть оскулирующий эллипс, описанный вокруг этого центрального тела.

Эти два метода одинаково законны; в самом деле, мы видели в п. 11, что можно отнести тело B к телу A, а тело C — к центру тяжести A и B. Ясно, что можно было бы также отнести C к A, а B — к центру тяжести A и C. Если A представляет центральное тело, B — возмущающее тело и C — возмущаемое тело, то мы видим, что первым решением является то, которое было принято в п. 9, и что во втором решении, которое мы примем с этих пор, оба тела B и C отнесены к центральному телу, поскольку центр тяжести A и C лежит в A, так как масса C равна нулю.

Тогда имеем

$$F' = R + G = \frac{\sqrt{1-\mu}}{2L^2} + G + \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu}\, r_1} + \frac{\mu}{2\sqrt{1-\mu}}(r_1^2 - 1 - r_2^2),$$

где μ и $1-\mu$ означают массы возмущающего тела и центрального тела, r_1 — расстояние между двумя планетами, 1 — постоянное расстояние возмущающего тела от центрального тела, r_2 — расстояние возмущаемого тела от центрального тела.

Как в п. 313, положим

$$x_1 = L - G, \qquad x_2 = L + G,$$

$$2y_1 = l - g + t, \qquad 2y_2 = l + g - t,$$

$$F' = F_0 + \mu F_1, \qquad F_0 = \frac{1}{2L^2} + G = \frac{2}{(x_1 + x_2)^2} + \frac{x_2 - x_1}{2},$$

$$\mu F_1 = \frac{\sqrt{1-\mu} - 1}{2L^2} + \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu}\, r_1} + \frac{\mu}{2\sqrt{1-\mu}}(r_1^2 - 1 - r_2^2).$$

Мы видим — и это важное обстоятельство, на которое я хотел бы обратить внимание, — что в области, из которой точка ξ, η не может выйти, функция F_1 всегда остается конечной.

Мы примем способ представления, указанный на стр. 178, и изобразим положение системы точкой пространства, координаты которой суть

$$X = \frac{\sqrt{x_2}\cos y_2}{\sqrt{x_2 + 4x_1 - 2\sqrt{x_1}\cos y_1}},$$

$$Y = \frac{\sqrt{x_2}\sin y_2}{\sqrt{x_2 + 4x_1 - 2\sqrt{x_1}\cos y_1}}, \quad Z = \frac{2\sqrt{x_1}\sin y_1}{\sqrt{x_2 + 4x_1 - 2\sqrt{x_1}\cos y_1}}.$$

Мы видим, что когда отношение x_1/x_2 постоянно, точка X, Y, Z описывает тор; что этот тор сводится к оси Z, когда это отношение бесконечно, и к окружности $Z=0$, $X^2+Y^2=1$, когда это отношение равно нулю.

Производные dF_1/dx_1 и dF_1/dx_2 остаются конечными в рассматриваемой области, так же как сама функция F_1, кроме случаев, когда x_1 или x_2 очень

мало; этого не будет для производных dF_1/dy_1 и dF_1/dy_2, которые могут обратиться в бесконечность при $r_2=0$. Отсюда вытекает, что

$$-n_1=\frac{dF'}{dx_1}, \quad -n_2=\frac{dF'}{dx_2}$$

очень мало отличаются от dF_0/dx_1 и dF_0/dx_2. На стр. 179 мы видели, что при сделанном нами предположении dF_0/dx_2 и, следовательно, n_2 не могут обратиться в нуль, потому что постоянная C живых сил (постоянная C п. 313 легко приводится к постоянной h п. 299) больше 3/2.

Следовательно, мы будем иметь, если x_2 не очень ма́ло,

$$n_2>0,$$

ибо производная dF_0/dx_2 может обратиться в бесконечность только при $x_2=0$, откуда следует, что y_2 всегда возрастает, за исключением случая очень малых значений x_2.

Пусть M есть такая точка X, Y, Z, что $y_2=0$; она будет находиться на полуплоскости

$$Y=0, \ X>0.$$

Когда x_1, x_2, y_1, y_2 будут изменяться в соответствии с дифференциальными уравнениями, точка X, Y, Z опишет некоторую траекторию; когда переменная y_2, которая монотонно возрастает, достигнет значения 2π, точка X, Y, Z, придя в M_1, будет снова находиться на полуплоскости $Y=0$, $X>0$.

Тогда точка M_1 является последующей точки M, согласно определению п. 305. Так как y_2 монотонно возрастает, то всякая точка полуплоскости имеет последующую и предшествующую; исключение существует только при очень малом x_2, т. е. для точек полуплоскости, которые очень удалены от начала или очень близки к оси Z.

Мы будем иметь интегральный инвариант в смысле п. 305; попытаемся построить этот инвариант.

Уравнения, будучи каноническими, допускают интегральный инвариант

$$\int dx_1 dx_2 dy_1 dy_2.$$

Положим $z=x_2/x_1$ и примем за новые переменные F', z, y_1, y_2; тогда инвариант примет вид

$$-\int \frac{x_1^2 dF' dz dy_1 dy_2}{x_1 \frac{dF'}{dx_1}+x_2 \frac{dF'}{dx_2}}=\int \frac{x_1^2 dF' dz dy_1 dy_2}{x_1 n_1+x_2 n_2}.$$

Из этого четырехкратного инварианта мы выведем (в силу существования интеграла $F'=C$) тройной инвариант

$$\int \frac{x_1^2 dz dy_1 dy_2}{x_1 n_1+x_2 n_2}.$$

В этом тройном инварианте x_1, x_2, $n_1=-dF'/dx_1$, $n_2=-dF'/dx_2$ предполагаются замененными функциями от z, y_1, y_2 при помощи уравнений

$$x_2=x_1 z, \qquad F'=C.$$

Примем теперь за переменные X, Y, Z и назовем Δ якобиан от X, Y, Z относительно z, y_1, y_2; тогда инвариант примет вид

$$\int \frac{x_1^2 dX dY dZ}{(x_1 n_1 + x_2 n_2)\,\Delta}.$$

Пусть

$$R=\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z+4}-2\cos y_1}, \quad Z=\frac{2\sin y_1}{\sqrt{z+4}-2\cos y_1},$$

откуда

$$X=R\cos y_2, \qquad Y=R\sin y_2.$$

Положим еще

$$D=[(R-1)^2+Z^2]\,[(R+1)^2+Z^2];$$

простые вычисления дают

$$\Delta=\frac{RD}{8\sqrt{z(z+4)}}.$$

Следовательно, наш инвариант запишется в виде

$$\int \frac{8x_1^2\sqrt{z(z+4)}\,dX dY dZ}{(x_1 n_1 + x_2 n_2)\,RD}.$$

Принципы п. 305 позволяют нам вывести из него следующий инвариант в смысле п. 305:

$$\int \frac{8x_1^2\sqrt{z(z+4)}}{D}\,\frac{n_2}{x_1 n_1 + x_2 n_2}\,dR dZ.$$

Здесь n_2 и R играют ту же роль, которую играли Ω и ρ в анализе, проведенном в п. 305.

Количество под знаком интеграла существенно положительно, кроме случая очень малого x_2, т. е. всюду, кроме точек полуплоскости, очень удаленных от начала или очень близких к оси Z.

393. Это обстоятельство (что точка не будет иметь последующей, если она слишком удалена от начала или слишком близка к оси Z) могло бы причинить некоторое затруднение, и может быть полезно преодолеть эту трудность каким-нибудь приемом.

Мы могли бы воспользоваться сначала замечанием п. 311 и заменить полуплоскость криволинейной односвязной областью S. Вот как мы выбрали бы эту криволинейную область.

Если x_2 очень мало́, эксцентриситет очень мал и две планеты обращаются в противоположных направлениях; принципы п. 40 применимы и позволяют утверждать существование периодического решения первого сорта, которое будет, очевидно, удовлетворять следующим условиям: количества

$$\sqrt{x_2}\cos y_2, \quad \sqrt{x_2}\sin y_2, \quad x_1, \quad \cos y_1, \quad \sin y_1$$

являются периодическими функциями времени t; кроме того, эти функции зависят от μ и постоянной живых сил C; они разложимы по степеням μ; период T также зависит от μ и от C; угол y_1 увеличивается на 2π, когда t увеличивается на период. Наконец, $\sqrt{x_2}\cos y_2$ и $\sqrt{x_2}\sin y_2$ делятся на μ, так что при $\mu=0$ мы имеем $x_2=0$.

При нашем способе изображения это периодическое решение, которое я называю σ, изображается замкнутой кривой K; так как x_2 очень мало́, когда μ очень мало́, то эта кривая очень мало отклоняется от оси Z; я хочу сказать, что она отклоняется от нее столь же мало, как окружность очень большого радиуса мало отклоняется от прямой. Всякая точка кривой K либо очень удалена от начала, либо очень близка к оси Z.

При этих условиях криволинейная область S имела бы периметром кривую K, она мало отклонялась бы от полуплоскости $Y=0$, $X>0$, за исключением непосредственной окрестности кривой K. Было бы легко при этом доопределить ее таким образом, чтобы всякая точка этой области имела последующую в ней самой. Для этого было бы достаточно, чтобы, если я назову (T) какую-нибудь траекторию, т. е. одну из кривых, определенных при нашем способе изображения дифференциальными уравнениями, было бы достаточно, говорю я, чтобы поверхность S не касалась ни в одной точке ни одной из траекторий (T).

Однако имеется другое средство, которое в сущности не отличается от первого. Легко сообразить, что аналогичная трудность уже встречалась в главе XII; следовательно, мы приходим к необходимости сделать замену переменных, аналогичную замене п. 145.

Положим сначала

$$\xi_2=\sqrt{2x_2}\cos y_2, \qquad \eta_2=\sqrt{2x_2}\sin y_2,$$

затем

$$S=\xi_2'\eta_2+x_1'y_1+\mu S_1,$$

где S_1 — функция от ξ_2', η_2, x_1', y_1. Пусть далее

$$\left.\begin{aligned} \xi_2&=\frac{dS}{d\eta_2}=\xi_2'+\mu\frac{dS_1}{d\eta_2}; \qquad & \eta_2'&=\frac{dS}{d\xi_2'}=\eta_2+\mu\frac{dS_1}{d\xi_2'},\\ x_1&=\frac{dS}{dy_1}=x_1'+\mu\frac{dS_1}{dy_1}; \qquad & y_1'&=\frac{dS}{dx_1'}=y_1+\mu\frac{dS_1}{dx_1'} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

и, наконец,

$$\xi_2' = \sqrt{2x_2'} \cos y_2', \qquad \eta_2' = \sqrt{2x_2'} \sin y_2'.$$

Сначала я замечаю, что каноническая форма уравнений не изменится, когда я перейду от переменных x_1, y_1, x_2, y_2 к x_1, y_1, ξ_2, η_2, затем к x_1', y_1', ξ_2', η_2', затем, наконец, к x_1', y_1', x_2', y_2'.

Мне остается выбрать функцию S_1.

Я знаю, что функция F' в рассматриваемой области является голоморфной функцией от $\sqrt{2x_1}\cos y_1$, $\sqrt{2x_1}\sin y_1$, $\sqrt{2x_2}\cos y_2$, $\sqrt{2x_2}\sin y_2$. Я хочу, чтобы она осталась голоморфной функцией от новых переменных

$$\sqrt{2x_i'}\cos y_i', \ \sqrt{2x_i'}\sin y_i'.$$

Для этого нужно потребовать, чтобы старые переменные $\sqrt{2x_i}\,{\cos \atop \sin} y_i$ были голоморфными функциями от новых переменных $\sqrt{2x_i'}\,{\cos \atop \sin} y_i'$ и от μ.

В свою очередь для этого достаточно предположить, что S_1 — голоморфная функция от

$$\sqrt{2x_1'}\cos y_1, \qquad \sqrt{2x_1'}\sin y_1, \qquad \xi_2', \ \eta_2, \ \mu$$

и делится на x_1'.

Затем потребуем, чтобы для нашего периодического решения σ было

$$\xi_2' = \eta_2' = 0, \qquad x_1' = x_1^0 = \text{const}.$$

Итак, пусть

$$\xi_2 = A, \qquad \eta_2 = B, \qquad x_1 = C$$

— уравнения для периодического решения; A, B, C — функции от y_1, периодические с периодом 2π и разложимые по степеням μ.

Тогда $C - \frac{dA}{dy_1} B$ также будет периодической функцией от y_1; пусть x_1^0 — ее среднее значение; мы можем найти другую такую периодическую функцию α, что

$$C - \frac{dA}{dy_1} B = x_1^0 + \frac{d\alpha}{dy_1}.$$

В таком случае мы должны будем только предположить, что при $x_1' = x_1^0$ функция μS_1 сводится к

$$\alpha - B\xi_2' + A\eta^2. \tag{2}$$

Этого будет достаточно, чтобы уравнения для периодического решения сводились в новых переменных к

$$\xi_2' = \eta_2' = 0, \quad x_1' = x_1^0.$$

Очевидно, можно найти функцию μS_1, которая будет разложимой по степеням $\sqrt{2x'_1}\,{}^{\cos}_{\sin}\,y_1$ и делиться на x'_1 и которая в то же время сводится к выражению (2) при $x'_1 = x^0_1$.

Примем новые переменные x'_1, y'_1, x'_2, y'_2.

Функция F', которая была голоморфной относительно $\sqrt{2x_1}\,{}^{\cos}_{\sin}\,y_1$, $\sqrt{2x_2}\,{}^{\cos}_{\sin}\,y_2$, будет также голоморфной относительно $\sqrt{2x'_1}\,{}^{\cos}_{\sin}\,y'_1$, $\sqrt{2x'_2}\,{}^{\cos}_{\sin}\,y'_2$. С другой стороны, так как одним из решений дифференциальных уравнений является

$$\xi'_2 = \eta'_2 = 0, \quad x'_1 = x^0_1,$$

то мы должны иметь при $\xi'_2 = \eta'_2 = 0$, $x'_1 = x^0_1$ следующие соотношения:

$$\frac{dF'}{d\xi'_2} = \frac{dF'}{d\eta'_2} = \frac{dF'}{dy'_1} = 0. \tag{3}$$

При малых значениях ξ'_2 и η'_2 функция F' разложима по степеням ξ'_2 и η'_2. В силу соотношений (3), при $x'_1 = x^0_1$ члены первой степени этого разложения исчезают, а члены нулевой степени сводятся к постоянной, не зависящей от μ.

Эта постоянная не может, кроме того, быть не чем иным, как постоянной живых сил C, так что условия $\xi'_2 = \eta'_2 = 0$, $x'_1 = x^0_1$ можно заменить следующими:

$$\xi'_2 = \eta'_2 = 0, \quad F' = C.$$

Таким образом, при $F' = C$ члены первой степени относительно ξ'_2 и η'_2 в разложении F' исчезают. Трудность проистекала от того, что F' и F_1 содержали члены первой степени относительно

$$\xi_2 = \sqrt{2x_2}\cos y_2, \quad \eta_2 = \sqrt{2x_2}\sin y_2,$$

что, следовательно, производная dF_1/dx_2, имея члены с $1/\sqrt{x_2}$, обращалась в бесконечность при $x_2 = 0$.

Здесь эта трудность более не существует; мы не имеем более членов первой степени относительно ξ'_2, η'_2; следовательно, производная dF_1/dx'_2 остается конечной даже при $x'_2 = 0$, и производная dF'/dx'_2, которая очень мало отличается от dF_0/dx'_2, всегда сохраняет один и тот же знак. Следовательно, с нашими новыми переменными, которые, кроме того, отличаются от старых только на очень малые величины порядка μ, мы всегда будем иметь

$$\frac{dx'_2}{dt} > 0.$$

Примем с нашими новыми переменными условие, аналогичное условию предыдущего параграфа, и представим положение системы точкой

пространства, координаты которой есть

$$X=\frac{\sqrt{x_2'}\cos y_2'}{\sqrt{x_2'+4x_1'-2\sqrt{x_1'}\cos y_1'}},\quad Y=\frac{\sqrt{x_2'}\sin y_2'}{\sqrt{x_2'+4x_1'-2\sqrt{x_1'}\cos y_1'}},$$

$$Z=\frac{2\sqrt{x_1'}\sin y_1'}{\sqrt{x_2'+4x_1'-2\sqrt{x_1'}\cos y_1'}}.$$

Все, что мы говорили, сохранит силу; только, так как dx_2'/dt никогда не может обратиться в нуль, *всякая точка полуплоскости*, без исключения, будет иметь последующую.

Теперь я говорю, что интегральный инвариант всегда положителен. Можно было бы сомневаться здесь только относительно знаменателя, который с теми же переменными был $x_1n_1+x_2n_2$ и теперь равен

$$-\left(x_1'\frac{dF'}{dx_1'}+x_2'\frac{dF'}{dx_2'}\right),$$

что, рассматривая F' как функцию четырех переменных

$$\xi_i'=\sqrt{2x_i'}\cos y_i',\qquad \eta_i'=\sqrt{2x_i'}\sin y_i',$$

можно написать в виде

$$-\frac{1}{2}\left(\xi_1'\frac{dF'}{d\xi_1'}+\eta_1'\frac{dF'}{d\eta_1'}+\xi_2'\frac{dF'}{d\xi_2'}+\eta_2'\frac{dF'}{d\eta_2'}\right).$$

В этой форме легко видеть, что знаменатель является голоморфным относительно величин ξ', η' и μ. Но при $\mu=0$ функция F' сводится к

$$\frac{2}{(x_1'+x_2')^2}+\frac{x_2'-x_1'}{2},$$

и легко проверить, что знаменатель всегда положителен. Следовательно, он положителен также и для малых значений μ.

394. Итак, в последующем мы примем переменные, определенные в предыдущем пункте. При этом отбросим штрихи, ставшие ненужными, и будем писать F, x_i и y_i вместо F', x_i' и y_i'.

Тогда мы имеем интегральный инвариант (в смысле п. 305)

$$J=\int\frac{8x_1^2\sqrt{z(z+4)}}{D}\,\frac{\dfrac{dF}{dx_2}}{x_1\dfrac{dF}{dx_1}+x_2\dfrac{dF}{dx_2}}\,dXdZ,$$

где

$$D=[(X-1)^2+Z^2]\,[(X+1)^2+Z^2].$$

Сначала я замечу, что этот интегральный инвариант, который всегда положителен, остается конечным, когда он распространяется на всю полуплоскость.

В самом деле, если $\sqrt{(X-1)^2+Z^2}$ является бесконечно малой величиной первого порядка, числитель $x_1^2\sqrt{z(z+4)}$ является бесконечно малой второго порядка, и то же самое будет верно относительно D. Если $\sqrt{(X-1)^2+Z^2}$ является бесконечно большой величиной первого порядка, числитель остается конечным, тогда как D является бесконечно большой величиной четвертого порядка. Все остальные величины остаются конечными.

Я назову J_0 значение инварианта J, распространенного на всю полуплоскость.

Периодические решения и криволинейные траектории, которые их представляют, характеризуются тем, что эти кривые пересекают полуплоскость в точках, число последовательных последующих которых конечно; сошлемся, например, на п. 312 и, в частности, на рис. 7 (стр. 175).

На этом рисунке замкнутая траектория, которая представляет периодическое решение, пересекает полуплоскость в пяти точках: M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, являющихся последующими друг друга. Для краткости я назову подобную систему *системой периодических точек*, или *периодической системой*.

Каждому неустойчивому периодическому решению соответствуют две системы асимптотических решений; эти решения представлены траекториями (в смысле п. 312), и множество этих траекторий образует то, что мы назвали асимптотическими поверхностями. Пересечение асимптотической поверхности с полуплоскостью назовем *асимптотической кривой*. Так же, как мы видели на рис. 7, в каждой точке M_i неустойчивой периодической системы сходятся четыре ветви асимптотических кривых (MA, MB, MP, MQ), которые попарно лежат на продолжении друг друга.

Имеется бесконечное множество асимптотических кривых, ибо имеется бесконечное множество неустойчивых периодических решений и, следовательно, систем неустойчивых периодических точек, даже если мы ограничимся решениями первого рода, определенными в пунктах 42 и 44.

Будем различать асимптотические кривые первого и второго семейства в зависимости от того, будет ли соответствующий характеристический показатель положительным или отрицательным; асимптотические кривые первого семейства характеризуются следующим свойством: n-я предшествующая какой-либо из их точек очень близка к периодической точке, если n очень велико; для кривых второго семейства очень близкой к периодической точке будет n-я последующая, а не n-я предшествующая.

На рис. 7 кривые MA и MP принадлежат к первому семейству, а кривые MB и MQ — ко второму.

Можно рассматривать эти асимптотические кривые как инвариантные кривые в смысле главы XXVII, если принять одно из двух следующих

условий. Вернемся к рис. 7; мы видим кривую M_0A_0, имеющую последовательные последующие M_1A_1, M_2A_2, M_3A_3, M_4A_4, M_0A_5. Тогда, если мы условимся рассматривать пять кривых M_0A_0, M_1A_1, M_2A_2, M_3A_3, M_4A_4, то это *множество*, очевидно, составит инвариантную кривую. Или же еще, если мы условимся рассматривать последующие только кратные пяти и назвать p-й последующей ту, которую до сих пор называли $5p$-й последующей, то ясно, что кривая $M_0A_0A_5$, рассматриваемая сама по себе, будет инвариантной кривой.

Две кривые одного и того же семейства не могут пересечься. В самом деле, либо эти две кривые будут сходиться в одной и той же периодической точке, например в точке M_0; тогда эти две кривые совпадут (поскольку через M_0 проходит в качестве кривой первого семейства только M_0A_0 вместе с ее продолжением M_0P_0), тогда задача сводится к тому, чтобы узнать, может ли асимптотическая кривая иметь двойную точку; этот вопрос был решен отрицательным образом (п. 309, стр. 168).

Либо эти две кривые будут сходиться в двух периодических точках одной и той же периодической системы, например в двух точках M_0 и M_1. Если бы две кривые, которыми будут тогда M_0A_0 и M_1A_1, имели общую точку Q, то $5p$-я предшествующая точки Q должна была бы при очень большом p одновременно быть очень близкой к M_0, потому что Q принадлежит M_0A_0, и очень близкой к M_1, потому что Q принадлежит M_1A_1. Это опять абсурдно.

Либо, наконец, две кривые сходятся в двух точках, принадлежащих двум различным периодическим системам. Предположим, например, что две кривые принадлежат первому семейству и что Q — их точка пересечения.

n-я предшествующая точки Q при очень большом n должна одновременно быть очень близкой к одной из точек первой периодической системы и к одной из точек второй системы; это опять невозможно.

Напротив, *нет оснований, чтобы две асимптотические кривые различных семейств не пересекались.*

Пусть S и S' — два неустойчивых периодических решения; T и T' — соответствующие замкнутые траектории, P и P' — соответствующие периодические системы.

Пусть Σ и Σ' — две асимптотические поверхности, проходящие соответственно через T и T' и пересекающие полуплоскость по двум асимптотическим кривым C и C', одна из которых первого, а другая — второго семейства.

Что произойдет, если C и C' имеют общую точку Q? Две поверхности Σ и Σ' пересекутся по траектории τ, которая будет соответствовать некоторому достопримечательному решению σ. Траектория τ будет принадлежать двум асимптотическим поверхностям, так что при $t=-\infty$ она приблизится к T, а при $t=+\infty$ она приблизится к T'. При очень большом n n-я предшествующая точки Q будет очень близкой к одной из точек системы P, а ее n-я последующая будет очень близкой к одной из точек системы P'.

Следовательно, решение σ является *двояко-асимптотическим.*

Все эти следствия не имеют ничего абсурдного.

Но необходимо различать два случая. Либо два решения S и S' совпадают, так что траектория τ, сначала очень близкая к траектории $T=T'$, значительно удаляется от нее, а затем снова приближается к *этой же самой* траектории $T=T'$. Тогда я смогу сказать, что решение σ является *гомоклинным.* Либо S отличается от S', а T — от T'; тогда я буду говорить, что σ является *гетероклинным.*

Существование гомоклинных решений скоро будет доказано; существование гетероклинных решений остается сомнительным, по крайней мере, в случае задачи трех тел.

Гомоклинные решения

395. В конце п. 312 мы видели, что дуги A_0A_5 и B_0B_5 пересекаются. Но дуга A_0A_5 принадлежит кривой $M_0A_0A_5$, которая является асимптотической кривой первого семейства, а дуга B_0B_5 составляет часть кривой M_3B_0, принадлежащей второму семейству.

Рассуждение является общим, и мы должны заключить, что две асимптотические поверхности, которые проходят через одну и ту же замкнутую траекторию, всегда должны пересекаться вне этой траектории. Асимптотические кривые первого семейства, которые сходятся в точках периодической системы, всегда пересекают кривые второго семейства, которые сходятся в этих же самых точках.

Другими словами, на каждой асимптотической поверхности имеется, по крайней мере, одно гомоклинное двояко-асимптотическое решение; мы скоро увидим, что их имеется бесконечное множество; но мы сейчас же увидим, что их имеется, по меньшей мере, два.

Для этого вернемся к рисунку на стр. 175. Согласно рассуждениям пунктов 308 и 312, интегральный инвариант J, распространенный на четырехугольник $A_0B_0A_5B_5$, должен быть нулем; именно по этой причине этот криволинейный четырехугольник не может быть выпуклым, и противоположные стороны A_0A_5 и B_0B_5 должны пересечься. Пусть Q — одна из точек пересечения этих двух дуг. Заметим, что точка A_0 была выбрана произвольно на асимптотической кривой MA_0; если мы возьмем точку A_0 в самой точке Q, то точка A_0 будет находиться также на кривой M_3B_0 и совпадет с точкой B_0. Если две точки A_0 и B_0 совпадут, то это же произойдет и с их пятыми последующими A_5 и B_5.

Следовательно, четырехугольник $A_0B_0A_5B_5$ сведется к фигуре, образованной двумя дугами кривой, имеющими одни и те же концы. Эта фигура не может быть выпуклой, поскольку интегральный инвариант, распространенный на четырехугольник, должен быть нулем. Следовательно, необходимо, чтобы две дуги A_0A_5 и B_0B_5 имели еще другие общие точки, кроме их концов.

Таким образом, будут, по крайней мере, две различные точки пересечения (если не считать различными точку и какую-нибудь из ее последующих).

Следовательно, всегда будет, по меньшей мере, два двояко-асимптотических решения.

Итак, предположим, что точки A_0 и B_0 совпадают, и продолжим дуги A_0A_5 и B_0B_5 до их первой точки встречи в C_0. Мы определили таким образом область, которая на этот раз будет выпуклой (с точки зрения Analysis situs) и будет ограниченной двумя дугами, составляющими часть соответственно двух дуг A_0A_5 и B_0B_5 и имеющими одни и те же концы, а именно: $A_0=B_0$ и C_0.

Пусть α_0 — эта область, а α_n — ее n-я последующая; очевидно, область α_n, как и α_0, будет выпуклой и ограниченной двумя дугами кривой, одна из которых первого, а другая — второго семейства.

Интеграл J будет иметь одно и то же значение для α_0 и α_n. Пусть j — это значение. Так как значение J_0 интегрального инварианта для всей полуплоскости конечно, то мы увидим, рассуждая, как в п. 291, что если

$$n > p\frac{J_0}{j},$$

то область α_0 будет иметь общую часть, по крайней мере, с p из областей

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,$$

а так как n можно взять сколь угодно большим, то я могу сформулировать следующий результат:

Среди областей α_n имеется бесконечное множество таких, которые имеют общую часть с α_0.

Как может случиться, что α_0 имеет общую часть с α_n?

Область α_0 не может быть целиком внутри α_n, поскольку интегральный инвариант имеет одно и то же значение для этих двух областей. По той же причине область α_n не может быть целиком внутри α_0. Эти две области не могут также совпасть; если бы, в самом деле, часть асимптотической кривой (например, первого семейства) совпала со своей n-й последующей, то это же произошло бы также с ее p-й предшествующей, сколь бы велико ни было p; но если p велико, то эта p-я предшествующая очень близка к периодическим точкам, и достаточно принципов главы VII, чтобы показать, что такое совпадение не имеет места.

Следовательно, необходимо предположить, что периметр области α_0 пересекает периметр α_n; но периметр α_0 состоит из дуги $A_0H_0C_0$, принадлежащей кривой $M_0A_0A_5$ первого семейства, и дуги

$$B_0K_0C_0 = A_0K_0C_0,$$

принадлежащей кривой $M_3B_5B_0$ второго семейства.

Аналогично, периметр α_n будет состоять из дуги $A_nH_nC_n$ — n-й последующей дуги $A_0H_0C_0$, которая будет принадлежать той же асимптотической кривой, что и $A_0H_0C_0$, т. е. кривой первого семейства, и дуги $A_nK_nC_n$ — n-й последующей $A_0K_0C_0$, которая будет принадлежать той же асимптотической кривой, что и $A_0K_0C_0$, т. е. кривой второго семейства.

Так как две кривые одного и того же семейства не могут пересекаться, то необходимо, чтобы дуга $A_0H_0C_0$ пересекала $A_nK_nC_n$, либо чтобы $A_0K_0C_0$ пересекала $A_nH_nC_n$. Но если две дуги $A_0K_0C_0$ и $A_nH_nC_n$ пересекаются, то их n-е предшествующие $A_{-n}K_{-n}C_{-n}$ и $A_0H_0C_0$ также будут пересекаться. Следовательно, необходимо, чтобы дуга $A_0H_0C_0$ пересекала n-ю последующую или n-ю предшествующую дуги $A_0K_0C_0$.

Но дуга $A_0K_0C_0$, все ее предшествующие и все ее последующие принадлежат одной и той же инвариантной кривой второго семейства, представленной на рисунке на стр. 175 совокупностью кривых M_3B_0, M_1B_3, M_4B_1, M_2B_4, M_0B_2.

Следовательно, дуга $A_0H_0C_0$ пересекается бесконечно много раз этой совокупностью кривых.

Две поверхности Σ и Σ', которые проходят через замкнутую траекторию T, имеют, следовательно, бесконечное множество других кривых пересечения.

Итак, на поверхности Σ имеется бесконечное множество гомоклинных двояко-асимптотических решений, что и требовалось доказать.

396. Пусть $A_0H_0C_0$ — какая-нибудь дуга асимптотической кривой первого семейства, и предположим, что эта дуга пересекает асимптотическую кривую второго семейства в двух крайних точках A_0 и C_0. Я говорю, что между точками A_0 и C_0 всегда будут другие точки пересечения с кривой второго семейства.

В самом деле, пусть $A_0K_0C_0$ — дуга кривой второго семейства, соединяющая точки A_0 и C_0.

Тогда либо две дуги $A_0H_0C_0$ и $A_0K_0C_0$ имеют общие точки, отличные от их концов, и теорема окажется доказанной.

Либо же эти две дуги не имеют другой общей точки, кроме их концов A_0 и C_0; тогда две дуги ограничивают область α_0, аналогичную той, которую мы рассмотрели в конце предыдущего параграфа; приложимы те же самые рассуждения, и мы можем заключить, что дуга $A_0H_0C_0$ пересекает бесконечно много раз кривую второго семейства.

Следовательно, на асимптотической кривой первого семейства между какими-нибудь двумя точками пересечения с кривой второго семейства имеется бесконечное множество других точек пересечения.

На любой асимптотической поверхности между двумя любыми двояко-асимптотическими решениями имеется бесконечное множество других двояко-асимптотических решений.

Мы не имеем еще права заключить, что двояко-асимптотические решения всюду плотны (überalldicht) на асимптотической поверхности, но это кажется вероятным.

Точки пересечения двух асимптотических кривых можно разделить на две категории. В самом деле, асимптотическую кривую можно пробегать в двух противоположных направлениях; мы будем рассматривать направление как положительное, если идем от точки к ее последующей. Пусть тогда A — точка пересечения двух кривых, BAB', CAC' — две дуги асимптотических кривых, пересекающиеся в A. Предположим, что BAB' принадлежит первому, а CAC' — второму семейству и что, обходя кривые в положительном направлении, мы идем из A в B' и из A в C'. В зависимости от того, будет ли направление AB' справа или слева от AC', точка пересечения A будет первой или второй категории.

Пусть при этих условиях $A_0H_0C_0$ — дуга первого семейства, пересекаемая в A_0 и C_0 дугой $A_0K_0C_0$ второго семейства. Какой бы категории ни принадлежали A_0 и C_0, совокупность двух дуг $A_0H_0C_0K_0A_0$ образует замкнутую кривую. Если две дуги не имеют другой общей точки, кроме их концов, то эта замкнутая кривая не имеет двойной точки и ограничивает область α_0. Если бы две дуги имели другие общие точки, кроме их концов, и если бы, например, две дуги $A_0H_0D_0H_0'C_0$ и $A_0K_0D_0K_0'C_0$ пересекались в D_0, то мы заменили бы точки A_0 и C_0 точками A_0 и D_0, расположенными между A_0 и C_0, а дуги $A_0H_0C_0$, $A_0K_0C_0$ двумя дугами $A_0H_0D_0$ и $A_0K_0D_0$, и таким образом продолжали бы до тех пор, пока не пришли бы к двум дугам, не имеющим другой общей точки, кроме их концов.

Итак, предположим, что две дуги ограничивают область α_0. Согласно тому, что мы только что видели, дуга $A_0H_0C_0$ должна пересечь бесконечно много раз асимптотическую кривую второго семейства; следовательно, необходимо, чтобы кривая второго семейства проникала бесконечно много раз внутрь области α_0, и она должна выйти из нее бесконечно много раз. Она может войти в нее или выйти из нее, только пересекая $A_0H_0C_0$, ибо она не может пересечь дугу $A_0K_0C_0$. составляющую часть кривой также второго семейства. Но ясно, что точки, в которых она проникает внутрь области, и точки, через которые она выходит из нее, не будут принадлежать одной и той же категории.

Итак, между любыми двумя точками пересечения двух кривых имеется бесконечное множество других точек, принадлежащих первой категории, и бесконечное множество других точек, принадлежащих второй категории.

Обозначим через (1), (2), (3), . . . последовательные точки встречи кривой второго семейства и дуги $A_0H_0C_0$, отсчитанные в порядке, в котором мы встречаем их, следуя по кривой второго семейства в положительном направлении. Они будут попеременно принадлежать двум категориям. Изучим порядок, в котором мы встречаем их, следуя по дуге $A_0H_0C_0$.

Этот порядок не может быть совершенно произвольным, и некоторые последовательности исключаются, например следующие:

$$\begin{array}{cccc} (2m), & (2p), & (2m+1), & (2p+1), \\ (2m+1), & (2p), & (2m), & (2p+1), \\ (2m) & (2p+1), & (2m+1), & (2p), \\ (2m), & (2p), & (2m-1), & (2p-1), \end{array}$$

так же, как те же последовательности, взятые в обратном порядке, и аналогичные последовательности, в которых $2m+1$ и $2p+1$ заменены на $2m-1$ и $2p-1$.

397. Если попытаться представить себе фигуру, образованную этими двумя кривыми и их бесчисленными пересечениями, каждое из которых соответствует двояко-асимптотическому решению, то эти пересечения образуют нечто вроде решетки, ткани, сети с бесконечно тесными петлями; ни одна из двух кривых никогда не должна пересечь самое себя, но она должна навиваться на самое себя очень сложным образом, чтобы пересечь бесконечно много раз все петли сети.

Поражаешься сложности этой фигуры, которую я даже не пытаюсь изобразить. Ничто не является более подходящим, чтобы дать нам представление о сложности задачи трех тел и, вообще, всех задач динамики, в которых нет однозначного интеграла и в которых ряды Болина расходятся.

Остаются возможными различные предположения.

1. Можно предположить, что множество точек двух асимптотических кривых E_0, или, скорее, множество точек, в окрестности которых находится бесконечное число точек, принадлежащих E_0, т. е. множество E_0' — «производное от E_0», можно предположить, говорю я, что множество E_0' занимает всю полуплоскость. Тогда следовало бы заключить о неустойчивости солнечной системы.

2. Можно предположить, что множество E_0' имеет конечную площадь и занимает конечную область полуплоскости, но не занимает ее целиком; либо, что часть этой полуплоскости остается вне петель нашей сети, либо, что внутри одной из этих петель остается «пробел». Пусть, например, U_0 — одна из этих петель, ограниченная двумя или несколькими дугами асимптотических кривых двух семейств. Построим их последовательные последующие и применим к ним методику п. 291. Образуем, как на стр. 132,

$$U_\alpha,\ U_0',\ U_\beta',\ U_0'',\ U_\gamma'',\ \ldots,\ E.$$

Область E, если она конечна, будет представлять один из пробелов, о которых мы только что говорили. Кажется, что можно было бы применить к ней рассуждение п. 294 и заключить, что эта область должна совпасть с одной из ее последующих. Но множество E может состоять из области

конечной площади и множества, расположенного вне этой области, общая площадь которого равна нулю. Все, что мы можем заключить согласно изложенному на стр. 138, состоит в том, что E_λ (λ-я последующая E) содержит E и что множество $E_\lambda - E$ обладает нулевой площадью. Аналогично, множества $E - E_{-\lambda}$, $E_{-\lambda} - E_{-2\lambda}$, ..., $E_{-n\lambda} - E_{-(n+1)\lambda}$ будут иметь нулевые площади (мы понимаем под площадью множества значение интеграла J, распространенного на это множество). А с другой стороны, $E_{-(n+1)\lambda}$ является частью $E_{-n\lambda}$. Когда n неограниченно возрастает, $E_{-n\lambda}$ стремится к множеству ε, которое содержит все точки, составляющие одновременно часть всех множеств $E_{-n\lambda}$. Площадь этого множества ε конечна и равна площади E. Наконец, ε совпадает со своей λ-й последующей.

3. Наконец, можно предположить, что множество E'_0 имеет нулевую площадь. Тогда это множество будет аналогичным «совершенным множествам, которые не плотны ни в одном интервале» [20].

398. Мы могли бы представить различные точки пересечения двух кривых следующим образом. Пусть x — переменная, которая изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, когда мы следуем по асимптотической кривой первого семейства M_0A_0 от точки M_0 до бесконечности, и увеличивается на единицу, когда мы переходим от точки к ее пятой последующей, например от A_0 к A_5 (предполагая для определенности, что мы находимся в условиях рисунка на стр. 175). Пусть y — другая переменная, которая изменяется от $+\infty$ до $-\infty$, когда мы следуем по кривой второго семейства M_3B_5 от точки M_3 до бесконечности, и которая увеличивается на единицу, когда мы переходим от точки к ее пятой последующей.

Различные точки пересечения двух кривых характеризуются парой значений x и y и каждая из них может быть представлена точкой на плоскости, прямоугольные координаты которой суть x и y.

Таким образом, мы будем иметь на плоскости бесконечное число точек, представляющих двояко-асимптотические решения; из каждой из этих точек можно получить бесконечное число других; в самом деле, если точка x, y соответствует пересечению двух кривых, то это же будет справедливо для точек

$$x+1,\ y+1;\ x+2,\ y+2;\ \ldots;\ x+n,\ y+n,$$

где n — целое, положительное или отрицательное; для того чтобы найти все изображающие точки, достаточно будет найти все те, которые заключены в полосе $0 < x < 1$ или в полосе $0 < y < 1$.

Другое замечание состоит в том, что порядок, в котором будут следовать проекции этих изображающих точек на оси x, не будет иметь никакого отношения к порядку, в котором будут следовать их проекции на оси y; и вот какое отсюда следствие.

Рассмотрим несколько двояко-асимптотических решений; при отрицательных и очень больших t все они будут очень близки к периодическому решению и представятся в определенном порядке, причем некоторые из

них будут более близкими, а другие менее близкими к периодическому решению.

Затем все они сильно удалятся от периодического решения, потом при положительных и очень больших t они снова будут очень близки к нему; *но тогда они представятся в совершенно ином порядке*. Если из двух решений первое ближе при $t=-\infty$ к периодическому решению, чем второе, то может случиться, что при $t=+\infty$ первое будет более удалено от периодического решения, чем второе, но может также случиться обратное.

Это замечание снова заставляет нас понять всю сложность задачи трех тел и то, насколько трансцендентные функции, которые необходимо придумать для ее решения, отличаются от всех тех, которые мы знаем.

Гетероклинные решения

399. Существуют ли гетероклинные решения?

Мы можем видеть, что если имеется одно, то их имеется бесконечное множество.

В самом деле, пусть M_0 — точка, принадлежащая периодической системе; пусть M_0A_0 и M_0B_0 — две асимптотические кривые, сходящиеся в этой точке M_0, причем одна первого, а другая второго семейства. Мы видели только что, каким образом эти кривые пересекаются, определяя гомоклинные двояко-асимптотические решения.

Пусть теперь M'_0 — точка, принадлежащая *другой* периодической системе; пусть $M'_0A'_0$, $M'_0B'_0$ — две асимптотические кривые, причем $M'_0A'_0$ первого, $M'_0B'_0$ — второго семейства.

Предположим, что $M'_0A'_0$ пересекает M_0B_0 в Q_0; это пересечение будет соответствовать гетероклинному двояко-асимптотическому решению.

Но если эти две кривые пересекаются в Q_0, то они будут также пересекаться в бесконечно многих точках Q_n — последующих точки Q_0.

Я уточняю; я предполагаю, например, что периодическая система, частью которой является M_0, состоит из пяти точек M_0, M_1, M_2, M_3, M_4; тогда пятая последующая любой точки кривой M_0B_0 также будет находиться на этой кривой и, вообще, если Q_0 лежит на этой кривой, то это же будет и с ее n-й последующей Q_n, лишь бы n было кратным пяти.

Предположим также, что периодическая система, частью которой является M'_0, состоит из семи точек; тогда, если Q_0 лежит на кривой $M'_0A'_0$, то это же будет и с ее n-й последующей Q_n, лишь бы n было кратным семи.

Итак, если две кривые имеют пересечение в Q_0, то они будут пересекаться также в Q_n, лишь бы n было кратным тридцати пяти.

Итак, пусть $Q_0H_0Q_n$ — дуга кривой M_0B_0, а $Q_0K_0Q_n$ — дуга $M'_0A'_0$; совокупность этих двух дуг, имеющих одни и те же концы, образует замкнутую кривую. Относительно этой замкнутой кривой мы можем рассуждать, как в п. 396; мы видим, следовательно, что если две дуги не имеют других общих точек, кроме их концов, то эта замкнутая кривая не имеет двойной точки и ограничивает область, аналогичную области α_0 пунктов 395 и 396.

Если две дуги имеют другие общие точки, кроме их концов, то можно найти две другие дуги, составляющие часть двух дуг $Q_0H_0Q_n$, $Q_0K_0Q_n$, не имеющие других общих точек, кроме их концов, и ограничивающие область, аналогичную α_0. Относительно этой области α_0 мы будем рассуждать, как в пунктах 395 и 396, и увидим, что на каждой из этих кривых между двумя любыми точками пересечения с другой кривой можно найти бесконечно много других точек пересечения.

Это рассуждение показывает, что если имеется одно гетероклинное решение, то их имеется бесконечное множество.

400. Если имеется гетероклинное решение, то сеть, о которой мы говорили в п. 397, становится еще более сложной; вместо одной-единственной кривой M_0A_0, навивающейся на самое себя, никогда себя не пересекая, и пересекающей бесконечно много раз другую кривую M_0B_0, мы будем иметь две кривые M_0A_0, $M_0'A_0'$, которые, никогда взаимно не пересекаясь, должны пересекать бесконечно много раз M_0B_0.

В п. 397 мы определили множество E_0', относительно точки M_0 и асимптотических кривых M_0A_0, M_0B_0; мы могли бы определить аналогичное множество относительно точки M_0' и двух асимптотических кривых $M_0'A_0'$, $M_0'B_0'$.

Если гетероклинного решения нет, то эти два множества должны лежать вне друг друга; следовательно, они не могут заполнять полуплоскость.

Если, напротив, гетероклинное решение существует, то эти два множества совпадут. Мы видим, что существование подобного решения, если бы нам удалось его установить, было бы аргументом против устойчивости.

В главе XIII мы изучили ряды Ньюкома и Линдштедта, в п. 149 мы доказали, что эти ряды не могут сходиться для всех значений постоянных, которые в них входят. Но один вопрос оставался сомнительным; не могут ли сходиться эти ряды для некоторых значений этих постоянных и, например, не может ли случиться, что сходимость имеет место, когда отношение n_1/n_2 равно корню квадратному из рационального числа, не являющегося точным квадратом (см. т. II, стр. 420)?

Но если гетероклинное решение существует, то ответ на этот вопрос должен быть отрицательным. В самом деле, предположим, что для некоторых значений отношения n_1/n_2 ряды Ньюкома и Линдштедта сходятся, и вернемся к нашему способу представления. Решения дифференциальных уравнений, которые соответствовали бы этому значению n_1/n_2, представились бы определенными криволинейными траекториями. Множество этих кривых образовало бы поверхность, допускающую те же связности, что и тор, и эта поверхность пересекла бы нашу полуплоскость по определенной замкнутой кривой C.

Множество E_0', о котором мы только что говорили, должно было бы лежать целиком вне этой кривой или целиком внутри нее.

Пусть тогда M_0 и M_0' — две точки, принадлежащие двум различным системам. Если M_0 лежит внутри кривой C, а M_0' — вне этой кривой, то множество E_0' относительно M_0 должно быть целиком внутри нее, тогда как множество E_0' относительно M_0' будет целиком вне ее.

Таким образом, эти два множества не могли бы иметь ни одной общей точки, и гетероклинного асимптотического решения, идущего из M_0 в M_0', существовать не могло бы.

Но если мы допустим предположение, высказанное в томе II на стр. 420, которое я только что напомнил, т. е. если бы сходимость имела место для бесконечного числа значений отношения n_1/n_2, например, для которых квадрат есть рациональное число, то существовало бы бесконечное множество кривых C, которые отделяли бы друг от друга точки, принадлежащие различным периодическим системам. Это предположение, следовательно, несовместно с существованием гетероклинных решений (по крайней мере, если две точки M_0 и M_0', которые мы рассматриваем, или, точнее, соответствующие периодические решения, отвечают двум различным значениям числа n_1/n_2) [21].

Сравнение с п. 225

401. Прежде чем пытаться строить примеры гетероклинных решений, вернемся сейчас к примеру п. 225, в котором может быть обнаружено существование гомоклинных двояко-асимптотических решений.

Мы положим

$$-F = p + q^2 - 2\mu \sin^2 \frac{y}{2} - \mu\varepsilon\varphi(y) \cos x,$$

где $(p,\ x;\ q,\ y)$ — две пары сопряженных переменных.

Затем построим функцию Якоби S и разложим ее по степеням ε

$$S = S_0 + S_1\varepsilon + S_2\varepsilon^2 + \ldots.$$

Остановимся на втором члене, пренебрегая ε^2, и напишем

$$S = S_0 + S_1\varepsilon.$$

Затем мы нашли

$$S_0 = A_0 x + \sqrt{2\mu} \int \sqrt{h + \sin^2 \frac{y}{2}}\, dy$$

или, приписывая постоянным A_0 и h нулевое значение,

$$S_0 = \pm 2\sqrt{2\mu} \cos \frac{y}{2};$$

далее мы нашли

$$S_1 = \text{вещественной части } \psi e^{ix},$$

где ψ — функция от y, определяемая уравнением

$$i\psi + 2\sqrt{2\mu}\sqrt{h + \sin^2\frac{y}{2}}\,\frac{d\psi}{dy} = \mu\varphi(y).$$

Мы положили

$$\operatorname{tg}\frac{y}{4} = t$$

и, предполагая, что

$$h = 0, \qquad \varphi(y) = \sin y, \qquad \alpha = \frac{i}{2\sqrt{2\mu}},$$

мы нашли (стр. 734, т. II) два значения ψ, соответствующие двум асимптотическим кривым двух семейств. Одно из этих значений

$$\psi = \sqrt{2\mu}\,\frac{t}{1+t^2} + it^{-2\alpha}\int_t^\infty \frac{t^{2\alpha}dt}{1+t^2},$$

а другое —

$$\psi' = \sqrt{2\mu}\,\frac{t}{1+t^2} - it^{-2\alpha}\int_0^t \frac{t^{2\alpha}dt}{1+t^2}.$$

Тогда уравнениями двух асимптотических поверхностей будут следующие:

$$p = \varepsilon\frac{d}{dx}\ (\text{вещественная часть } [\psi e^{ix}]),$$

$$q = \sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2} + \varepsilon\frac{d}{dy}\ (\text{вещественная часть } [\psi e^{ix}]),$$

и

$$p = \varepsilon\frac{d}{dx}\ (\text{вещественная часть } [\psi' e^{ix}]),$$

$$q = \sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2} + \varepsilon\frac{d}{dy}\ (\text{вещественная часть } [\psi' e^{ix}]).$$

Чтобы найти двояко-асимптотические решения, необходимо искать пересечение этих двух асимптотических поверхностей; нам достаточно, следовательно, приравнять два значения p и два значения q.

Пусть

$$J = \int_0^\infty \frac{t^{2\alpha}dt}{1+t^2},$$

$$u = 2\log t.$$

Мы найдем

$$\frac{d}{dx}\,(\text{вещественная часть } [Jie^{-\alpha u+ix}]) = 0,$$

$$\frac{d}{dy}\,(\text{вещественная часть } [Jie^{-\alpha u+ix}]) = 0$$

или, полагая $J = \rho e^{i\omega}$,

$$x - \frac{u}{2\sqrt{2\mu}} + \omega = K\pi + \frac{\pi}{2},$$

где K — целое.

Таково уравнение двояко-асимптотических решений.

Это уравнение дает нам в действительности два различных решения; одно, соответствующее четным значениям, второе — нечетным значениям K.

402. Можно удивиться тому, что мы нашли таким образом только два двояко-асимптотических решения, тогда как мы знаем, что их бесконечно много.

Следующие приближения также дали бы нам лишь конечное число двояко-асимптотических решений. Каково же объяснение этого парадокса?

В предыдущих пунктах мы видели, что различные двояко-асимптотические решения в бесконечном числе соответствуют различным пересечениям определенной дуги $A_0H_0C_0$ с различными последующими другой дуги $A_0K_0C_0$.

Предположим, что первая из этих последующих, встречающая $A_0H_0C_0$, имеет порядок N. Число N будет, очевидно, зависеть от постоянной ε и будет тем больше, чем меньше эта постоянная. *Оно станет бесконечным, когда* ε *будет нулем.*

Но разлагая по степеням ε и останавливаясь на произвольном члене разложения, мы как бы считаем ε бесконечно малым.

Дуга $A_0H_0C_0$ встречает тогда последующие другой дуги $A_0K_0C_0$ только бесконечно большого порядка, и как раз благодаря этому большая часть двояко-асимптотических решений ускользает от нашего анализа [22].

Примеры гетероклинных решений

403. Попытаемся перейти к обобщению и положим

$$F = F_0 + \varepsilon F_1.$$

F_0 — функция p, q и y, а F_1 — функция p, q, x и y; кроме того, эти две функции периодичны как по x. так и по y.

Рассмотрим кривые

$$F_0 = \text{const}, \tag{1}$$

где мы будем считать p параметром, q и y — координатами точки.

Среди этих кривых наше внимание должны привлечь именно те, которые имеют двойные точки. Эти двойные точки действительно соответствуют периодическим решениям канонических уравнений, когда мы предполагаем, что ε равно нулю, а F сводится к F_0.

Мы имеем ∞^2 кривых (1), общее уравнение которых есть

$$F_0 = h$$

и которые зависят от двух параметров p и h.

Я только что сказал, что наиболее интересными являются те, которые имеют двойную точку, особенно в случае, когда какие-нибудь из этих кривых имеют две или несколько двойных точек. Тогда мы действительно встретим гетероклинные решения.

Как в п. 225, попытаемся построить функцию Якоби S и положим

$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \ldots.$$

Функция S_0 получается немедленно; мы будем иметь

$$\frac{dS_0}{dx} = p, \qquad \frac{dS_0}{dy} = q, \qquad S_0 = px + \int q\,dy,$$

где q — функция от y, определенная уравнением (1) и зависящая от двух параметров p и h.

Затем мы находим

$$\frac{dF_0}{dp}\frac{dS_1}{dx} + \frac{dF_0}{dq}\frac{dS_1}{dy} + F_1 = 0. \tag{2}$$

В dF_0/dp, dF_0/dq и F_1 мы считаем p постоянной и заменяем в них q его значением, полученным из уравнения (1). Следовательно, уравнение (2) — линейное уравнение относительно производных от S_1, коэффициенты которого являются заданными функциями от x и y, зависящими, кроме того, от параметров h и p.

Так как функция F_1 периодична по x, то я положу

$$F_1 = \sum \Phi_m e^{imx},$$

где Φ_m так же, как и производные от F_0, зависит только от y.

Я полагаю также

$$S_1 = \sum \psi_m e^{imx},$$

и функция ψ_m будет задана уравнением

$$im\frac{dF_0}{dp}\psi_m + \frac{dF_0}{dq}\frac{d\psi_m}{dy} + \Phi_m = 0, \tag{3}$$

коэффициенты которого являются заданными функциями от y.

Очевидно, можно проинтегрировать это уравнение в квадратурах.

Попытаемся определить этим путем наши асимптотические поверхности. Сначала мы должны выбрать постоянные h и p так, чтобы кривая (1) имела двойную точку; я предположу, кроме того, что эти постоянные та ковы, что каждому значению y соответствуют два вещественных значения q (что имеет место в примере п. 225).

Эти два значения q являются периодическими функциями y, которые становятся равными друг другу в двойной точке, например при $y=y_0$.

Мы можем так же, как это делали в п. 225, считать эти два значения q аналитическим продолжением друг друга.

Тогда функция q оказывается *однозначной* по y и периодической с периодом 4π, подобно $\sin\frac{y}{2}$.

Эта однозначная функция будет принимать одно и то же значение при $y=y_0$ и $y=y_0+2\pi$.

Если бы вместо одной двойной точки мы имели несколько, то мы снова смогли бы считать q однозначной функцией y с периодом 4π, если бы число двойных точек было нечетным. Если бы, наоборот, это число было четным, то мы имели бы для q два значения, которые не менялись бы ролями, когда y увеличивается на 2π, и которые, следовательно, можно было бы рассматривать как две *различные* однозначные функции от y, имеющие период 2π.

Для определенности будем предполагать, что мы имеем две двойные точки, соответствующие значениям y_0 и y_1 переменной y.

Отсюда вытекает, что при $y=y_0$ и при $y=y_1$ уравнение (1) должно иметь двойной корень, поскольку два значения q совпадают, и, следовательно, производная dF_0/dq должна обратиться в нуль.

Уравнение (3) является линейным уравнением с правой частью, интегрирование которого сводится к интегрированию уравнения без правой части и, следовательно, к интегрированию уравнения

$$\frac{dF_0}{dp}\theta+\frac{dF_0}{dq}\frac{d\theta}{dy}=0, \tag{4}$$

откуда

$$\theta=e^{-\int\frac{dy\frac{dF_0}{dp}}{\frac{dF_0}{dq}}}.$$

Функция θ, определенная таким образом, является голоморфной функцией y для всех вещественных значений этой переменной, за исключением значений $y=y_0$, $y=y_1$, которые соответствуют двойным точкам. Для этих значений функция θ, играющая роль, аналогичную роли $t=\operatorname{tg}\frac{y}{4}$ в п. 226, обращается в нуль или бесконечность.

Затем мы находим

$$\psi_m = \theta^{im} \int \frac{\theta^{-im}\Phi_m dy}{\frac{dF_0}{dq}} + C_m \theta^{im},$$

где C_m — постоянная интегрирования, откуда

$$S_1 = \sum \theta^{im} e^{imx} \int \frac{\theta^{-im}\Phi_m dy}{\frac{dF_0}{dq}} + \sum C_m \theta^{im} e^{imx}.$$

Чтобы найти уравнения асимптотических поверхностей, мы напишем

$$p = \frac{dS}{dx}, \quad q = \frac{dS}{dy},$$

приписывая постоянным интегрирования надлежащие значения.

Сначала пренебрежем ε; мы примем, следовательно, $S = S_0$, и дадим постоянным h и $p = p_0$ значения, соответствующие кривой, имеющей две двойные точки.

С этим приближением дифференциальные уравнения допускают в качестве периодических решений

$$p = p_0, \quad q = q_0, \quad y = y_0, \tag{5}$$

$$p = p_0, \quad q = q_1, \quad y = y_1, \tag{6}$$

где y_0, q_0; y_1, q_1 — координаты двух двойных точек.

Для представления наших асимптотических поверхностей мы можем взять точку четырехмерного пространства, координаты которой $(p+a)\cos x$, $(p+a)\sin x$, $(q+b)\cos y$, $(q+b)\sin y$, где a и b — две положительные постоянные, достаточно большие, чтобы можно было рассматривать только положительные значения $p+a$ и $q+b$.

Тогда уравнения (5) и (6) представляют две замкнутые кривые этого четырехмерного пространства, соответствующие двум периодическим решениям.

Через каждую из этих кривых проходят две асимптотические поверхности одна первого, другая — второго семейства.

Но с принятой степенью приближения, т. е. если мы пренебрегаем ε, эти четыре асимптотические поверхности попарно совпадают.

В самом деле, уравнениями асимптотических поверхностей будут

$$p = p_0, \quad F_0 = h.$$

Как мы видели, уравнение $F_0 = h$ допускает два корня, которые сливаются при $y = y_0$ и при $y = y_1$, которые не меняются ролями, когда y увеличивается на 2π, и которые периодичны по y с периодом 2π. Пусть q' и q'' —

эти два корня; таким образом, уравнения наших асимптотических поверхностей принимают вид

$$\begin{aligned} p=p_0, \quad q=q', \\ p=p_0, \quad q=q''. \end{aligned} \tag{7}$$

Но для того чтобы уточнить значение этих уравнений, мы будем различать несколько ветвей наших поверхностей. Мы имеем четыре асимптотические поверхности; каждая из них проходит через одну из кривых (5) или (6) и делится этой кривой на две ветви, которые я обозначу следующим образом:

Поверхность первого семейства, проходящая через кривую (5), будет разделена на две ветви N_1 и N_1'.

Поверхность второго семейства, проходящая через кривую (5), будет разделена на две ветви N_2 и N_2'.

Поверхность первого семейства, проходящая через кривую (6), будет разделена на две ветви N_3 и N_3'.

Поверхность второго семейства, проходящая через кривую (6), будет разделена на две ветви N_4 и N_4'.

Тогда, с принятой степенью приближения, уравнения этих ветвей будут иметь вид:

$$\begin{array}{llll} N_1; & p=p_0, \ q=q', \ y>y_0; & N_1'; & p=p_0, \ q=q', \ y<y_0; \\ N_2; & p=p_0, \ q=q'', \ y>y_0; & N_2'; & p=p_0, \ q=q'', \ y<y_0; \\ N_3; & p=p_0, \ q=q'', \ y>y_1; & N_3'; & p=p_0. \ q=q'', \ y<y_1; \\ N_4; & p=p_0, \ q=q', \ y>y_1; & N_4'; & p=p_0, \ q=q', \ y<y_1. \end{array}$$

Мы видим, что с этой степенью приближения две поверхности N_1+N_1' и N_4+N_4' сливаются, как и две поверхности N_2+N_2' и N_3+N_3'.

Итак, перейдем к следующему приближению и возьмем:

$$S=S_0+\varepsilon S_1.$$

Чтобы завершить определение S_1, надо выбрать постоянные C_m.

Для ветвей N_1 и N_1' мы должны выбрать эти постоянные таким образом, чтобы функции ψ_m были регулярны при $q=q'$, $y=y_0$; достаточно сослаться на анализ на стр. 735 II тома, чтобы понять, что это условие достаточно, чтобы полностью определить эти постоянные. Я назову $S_{1,1}$ функцию S_1, определенную таким образом.

Для ветвей N_2 и N_2' мы выберем C_m таким образом, чтобы функции ψ_m были регулярны при $q=q''$, $y=y_0$, и назовем $S_{1,2}$ функцию S_1, определенную таким образом.

Для ветвей N_3 и N_3' мы выберем C_m так, чтобы ψ_m были регулярны при $q=q''$, $y=y_1$; для ветвей N_4 и N_4' функции ψ_m должны быть регу-

лярны при $q=q'$, $y=y_1$. Мы обозначим через $S_{1,3}$ и $S_{1,4}$ две функции S_1, определенные таким образом.

Итак, уравнения четырех поверхностей принимают вид

$$
\begin{aligned}
&N_1+N_1'; && p=p_0+\varepsilon\frac{dS_{1,1}}{dx}; && q=q'+\varepsilon\frac{dS_{1,1}}{dy};\\
&N_2+N_2'; && p=p_0+\varepsilon\frac{dS_{1,2}}{dx}; && q=q''+\varepsilon\frac{dS_{1,2}}{dy};\\
&N_3+N_3'; && p=p_0+\varepsilon\frac{dS_{1,3}}{dx}; && q=q''+\varepsilon\frac{dS_{1,3}}{dy};\\
&N_4+N_4'; && p=p_0+\varepsilon\frac{dS_{1,4}}{dx}; && q=q'+\varepsilon\frac{dS_{1,4}}{dy}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Но важно отметить, что функция $S_{1,1}$, например, регулярная при $y=y_0$, перестает быть регулярной при $y=y_1$; отсюда вытекает, что наши уравнения становятся непригодными даже в качестве первого приближения, как только мы пройдем значение y_1.

Для большей доходчивости я ограничусь следующим замечанием: Пусть y' и y'' — два таких значения y, что

$$y_0<y'<y_1<y''.$$

Пусть M_0 — точка асимптотической кривой, соответствующая значению y'; пусть M_n — ее n-я последующая; я предполагаю, что мы берем n достаточно большим, чтобы соответствующее значение y было больше y''.

Значение, которое следует приписать n, очевидно, зависит от ε и неограниченно возрастает, когда ε стремится к нулю.

Вот, вообще говоря, значения y, при которых наши уравнения могут служить первым приближением:

$$
\begin{aligned}
&N_1 \text{ и } N_2; && y_1>y>y_0; && N_1' \text{ и } N_2'; && y_0>y>y_1-2\pi;\\
&N_3 \text{ и } N_4; && y_0+2\pi>y>y_1; && N_3' \text{ и } N_4'; && y_1>y>y_0.
\end{aligned}
$$

Если поверхности N_1 и N_4', например, пересекаются, то пересечение будет соответствовать гетероклинному двояко-асимптотическому решению, которое при $t=-\infty$ будет очень близким к периодическому решению (5), а при $t=+\infty$ — очень близким к периодическому решению (6).

Для исследования этого пересечения сопоставим уравнения N_1 и N_4'

$$p=p_0+\varepsilon\frac{dS_{1,1}}{dx},\qquad p=p_0+\varepsilon\frac{dS_{1,4}}{dx};$$

очевидно, пересечение будет задано уравнением

$$\frac{d(S_{1,1}-S_{1,4})}{dx}=0. \tag{9}$$

Разность $S_{1,1}-S_{1,4}$ является функцией от x и y, разложимой по целым положительным и отрицательным степеням

$$\theta^i e^{ix}.$$

Нам важно, что это периодическая функция от x; следовательно, она допускает по меньшей мере один максимум и один минимум; таким образом, уравнение (9) допускает, по меньшей мере, два решения, что сводится к утверждению, что имеется, по меньшей мере, два гетероклинных решения.

Мы доказали бы также, что имеется два решения, соответствующих пересечениям поверхностей N_4 и N_1', два решения, соответствующих поверхностям N_2 и N_3', и два — поверхностям N_3 и N_2'.

Предыдущий анализ не дает гомоклинных решений.

404. Возьмем, например,

$$F_0 = -p - q^2 + 2\mu \sin^2 \frac{y-y_0}{2} \sin^2 \frac{y-y_1}{2},$$

$$F_1 = \mu \cos x \sin(y-y_0) \sin(y-y_1).$$

Периодические решения (5) и (6), к которым стремятся гетероклинные решения при $t=-\infty$ и $t=+\infty$, тогда суть

$$x=t, \quad p=q=0, \quad y=y_0,$$

$$x=t, \quad p=q=0, \quad y=y_1.$$

Мы заметим, что при $\mu=0$ функция F сводится к $-p-q^2$. Следовательно, при $\mu=0$ функция F зависит только от переменных первого ряда p и q и не зависит от переменных второго ряда x и y. Таким образом, функция F имеет форму, рассмотренную в пунктах 13, 125 и т. д.

Однако мы не ограничимся этим примером, который доказывает, что канонические уравнения вида, рассмотренного в п. 13, могут допускать гетероклинные решения.

В самом деле, оба решения (5) и (6) соответствуют одному и тому же значению количеств dx/dt и dy/dt, а именно:

$$\frac{dx}{dt}=1, \quad \frac{dy}{dt}=0.$$

Но эти величины dx/dt и dy/dt являются не чем иным, как числами, названными выше n_1 и n_2.

Следовательно, мы видим, что существуют двояко-асимптотические решения, которые при $t=-\infty$ и при $t=+\infty$ неограниченно приближаются к двум различным периодическим решениям; но эти два периодических решения соответствуют одним и тем же значениям чисел n_1 и n_2.

Итак, я сейчас построю другой пример, в котором мы увидим уравнения той же формы, что и до п. 13, которые обладают двояко-асимптотическими решениями, неограниченно приближающимися к двум периодическим решениям, которые не только различны, но и соответствуют различным значениям отношения n_1/n_2.

Я смогу показать, что эти решения существуют для значений μ, близких к единице, но, к сожалению, я еще не в состоянии установить, что они существуют также при малых значениях μ.

405. Мы возьмем две пары сопряженных переменных

$$\xi_1,\ \eta_1;\ \xi_2,\ \eta_2$$

или же

$$x_1,\ y_1;\ x_2,\ y_2,$$

полагая

$$\xi_i = \sqrt{2x_i}\cos y_i; \qquad \eta_i = \sqrt{2x_i}\sin y_i.$$

Эта замена переменных не меняет канонической формы уравнений. Мы возьмем

$$F = F_0(1-\mu) + \mu F_1.$$

Предположим, что F_0 — функция, голоморфная по x_1 и x_2, не зависящая от y_1 и y_2; что при $x = \alpha^2/2$, $x_2 = {}^1/_2$ мы имеем

$$\frac{dF_0}{dx_2} = 0, \qquad \frac{dF_0}{dx_1} = -1$$

и что при $x_1 = {}^1/_2$, $x_2 = \alpha^2/2$ мы имеем

$$\frac{dF_0}{dx_2} = -1, \qquad \frac{dF_0}{dx_1} = 0;$$

я предполагаю, что величина $\alpha < 1$.

Из этих предположений вытекает, что если положить $\mu = 0$, откуда $F = F_0$, то наши уравнения будут допускать два замечательных периодических решения.

Первое решение, которое я назову σ, запишется в виде:

$$x_1 = \frac{\alpha^2}{2}, \qquad x_2 = \frac{1}{2}; \qquad y_1 = t, \qquad y_2 = 0,$$

$$\xi_1 = \alpha\cos t, \qquad \eta_1 = \alpha\sin t, \qquad \xi_2 = 1, \qquad \eta_2 = 0.$$

Второе, которое я назову σ', запишется:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{\alpha^2}{2}, \qquad y_1 = 0, \qquad y_2 = t,$$

$$\xi_1 = 1, \qquad \eta_1 = 0, \qquad \xi_2 = \alpha\cos t, \qquad \eta_2 = \alpha\sin t.$$

Первое решение соответствует $n_1=1$, $n_2=0$, второе — $n_1=0$, $n_2=1$; эти два периодических решения не соответствуют, следовательно, одному и тому же значению отношения n_1/n_2.

Для определения F_1 я полагаю

$$\xi_1 = 1 - r\cos\omega, \qquad \xi_2 = 1 - r\sin\omega,$$

приписывая переменной r существенно положительное значение.

Затем я предполагаю, что (если ρ — очень малое положительное количество) мы имеем при $r > \rho$

$$F_1 = -\frac{\eta_1^2+\eta_2^2}{2} - \frac{(r-1)^2}{2} + \varepsilon\frac{\psi(\omega)}{r^2}, \tag{1}$$

где $\psi(\omega)$ — функция от ω, регулярная для всех вещественных значений ω, периодическая с периодом 2π и, наконец, обращающаяся в нуль вместе со своей производной при $\omega=0$ и при $\omega=\pi/2$.

Так как функция (1) была бы бесконечной при $r=0$, т. е. при $\xi_1=\xi_2=1$, то я предположу, что при $r \leqslant \rho$ функция F_1 принимает произвольные значения, однако так, что она остается конечной и непрерывной, как и ее производные первых двух порядков.

Легко проверить, что при $\mu=1$, т. е. при $F=F_1$, наши уравнения также допускают два периодических решения σ и σ'; для первого из этих решений мы имеем $\omega=0$, для второго — $\omega=\pi/2$.

Отсюда мы сразу же заключаем, что *для всех значений* μ наши уравнения будут допускать эти два периодических решения.

406. Сейчас мы проинтегрируем наши уравнения в случае $\mu=1$ (по крайней мере в предположении, что r всегда остается $>\rho$).

Если бы мы предположили сначала, что $\varepsilon=0$, то встретились бы с задачей центральных сил, и интегрирование выполнялось бы без труда. Оно будет ничуть не труднее и в общем случае.

В самом деле, метод Якоби приводит к уравнению в частных производных

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dS}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{dS}{d\omega}\right)^2 + \frac{(r-1)^2}{2} - \varepsilon\frac{\psi(\omega)}{r^2} = h,$$

где h — постоянная. Положим

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dS}{d\omega}\right)^2 - \varepsilon\psi(\omega) = k,$$

где k — вторая постоянная, и мы получим

$$S = \sqrt{2}\int\sqrt{h - \frac{k}{r^2} - \frac{(r-1)^2}{2}}\,dr + \sqrt{2}\int\sqrt{k+\varepsilon\psi}\,d\omega.$$

Таким образом, общее решение наших уравнений имеет вид

$$(\xi_1-1)\eta_1+(\xi_2-1)\eta_2=\sqrt{2hr^2-2k-r^2(r-1)^2},$$
$$(\xi_1-1)\eta_2-(\xi_2-1)\eta_1=\sqrt{2}\sqrt{k+\varepsilon\psi}.$$
$$\int\frac{rdr}{\sqrt{2hr^2-2k-r^2(r-1)^2}}=h'+t,$$
$$\int_0^\omega\frac{d\omega}{\sqrt{2k+2\varepsilon\psi}}-\int\frac{2dr}{r\sqrt{2hr^2-2k-r^2(r-1)^2}}=k',$$

где h' и k' — две новые постоянные.

Мы найдем наши два периодических решения σ и σ', давая постоянным частные значения

$$k=0,\qquad h=\frac{\alpha^2}{2},\qquad k'\sqrt{2k}=0,$$
$$k=0,\qquad h=\frac{\alpha^2}{2},\qquad k'\sqrt{2k}=\frac{\pi}{2}.$$

Предположим, что мы хотим воспользоваться уравнением (2), чтобы определить r в функции $h'+t$; если мы дадим постоянным k и h значения, близкие к нулю и $\alpha^2/2$, то r будет периодической функцией $t+h'$. Мы положим

$$u=n(t+h'),$$

где число n выбрано так, чтобы r было периодической функцией от u с периодом 2π. Это число n, которое является чем-то вроде среднего движения, будет, естественно, зависеть от постоянных h и k.

Аналогично, dr/dt будет периодической функцией от u.

При $k=0$ мы имеем просто

$$r=1\pm\sqrt{2h}\cos u.$$

407. Итак, мы имеем два периодических решения σ и σ', которые представлены двумя замкнутыми кривыми, если мы условимся рассматривать величины ξ и η как координаты точки в четырехмерном пространстве. Через каждую из этих кривых проходят две асимптотические поверхности, одна — первого, другая — второго семейства; мы увидим сейчас, что эти четыре поверхности попарно сливаются, как это имело место в п. 403 [уравнение (7)] при пренебрежении ε.

В самом деле, чтобы найти уравнения этих поверхностей, достаточно дать постоянным k и h значения 0 и $\alpha^2/2$; таким образом, мы получим

$$(\xi_1-1)\eta_1+(\xi_2-1)\eta_2=r\sqrt{\alpha^2-(r-1)^2},$$
$$(\xi_1-1)\eta_2-(\xi_2-1)\eta_1=\pm\sqrt{2\varepsilon\psi}.$$

Таковы уравнения асимптотических поверхностей при $\mu = 1$; мы видим, что нашли только две из этих поверхностей, соответствующие двойному знаку у второго радикала.

Предположим, что функция $\varepsilon\psi$, *обращающаяся в нуль при* $\omega = 0$ *и* $\omega = \pi/2$, *положительна для всех остальных значений* ω.

Теперь мы попытаемся составить уравнения асимптотических поверхностей для значений μ, близких к 1.

Мы имеем

$$F = F_1 + (1-\mu)(F_0 - F_1);$$

F_0 и F_1 — голоморфные функции от ξ и η и, следовательно, от r, ω, dr/dt и $d\omega/dt$.

Уравнения наших поверхностей запишутся в виде

$$(\xi_1 - 1)\eta_1 + (\xi_2 - 1)\eta_2 = r\frac{dS}{dr},$$

$$(\xi_1 - 1)\eta_2 - (\xi_2 - 1)\eta_1 = \frac{dS}{d\omega},$$

где S — функция от r и ω, удовлетворяющая уравнению в частных производных

$$F = \text{const},$$

в котором производные $\frac{dr}{dt}$ и $\frac{d\omega}{dt}$ заменены на $\frac{dS}{dr}$ и $\frac{1}{r^2}\frac{dS}{d\omega}$.

Разложим S по степеням $1-\mu$:

$$S = S_0 + (1-\mu)S_1 + (1-\mu)^2 S_2 + \ldots,$$

мы получим в первом приближении уравнения асимптотических поверхностей в виде

$$(\xi_1 - 1)\eta_1 + (\xi_2 - 1)\eta_2 = r\frac{dS_0}{dr} + (1-\mu)r\frac{dS_1}{dr},$$

$$(\xi_1 - 1)\eta_2 - (\xi_2 - 1)\eta_1 = \frac{dS_0}{d\omega} + (1-\mu)\frac{dS_1}{d\omega}.$$

Мы уже нашли

$$\frac{dS_0}{dr} = \sqrt{\alpha^2 - (r-1)^2}, \qquad \frac{dS_0}{d\omega} = \pm\sqrt{2\varepsilon\psi}.$$

Остается определить S_1; для этого мы имеем уравнение

$$\frac{dS_0}{dr}\frac{dS_1}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{dS_0}{d\omega}\frac{dS_1}{d\omega} = F_1 - F_0.$$

Производные dr/dt и $d\omega/dt$ в правой части должны быть заменены на $dS_0/dr = \sqrt{\alpha^2 - (r-1)^2}$ и на $\frac{1}{r^2}\frac{dS_0}{d\omega} = \frac{\pm\sqrt{2\varepsilon\psi}}{r^2}$. Таким образом, эта правая часть является известной функцией от r и ω.

Уравнение принимает вид

$$r^2\sqrt{\alpha^2-(r-1)^2}\,\frac{dS_1}{dr}\pm\sqrt{2\varepsilon\psi}\,\frac{dS_1}{d\omega}=r^2(F_1-F_0).$$

Положим

$$v=\int\frac{dr}{r^2\sqrt{\alpha^2-(r-1)^2}}.$$

Мы видим, что r и $\sqrt{\alpha^2-(r-1)^2}$ — периодические функции от v, и мы должны считать S функцией v и ω.

Тогда наше уравнение примет вид

$$\frac{dS_1}{dv}\pm\sqrt{2\varepsilon\psi}\,\frac{dS_1}{d\omega}=r^2(F_1-F_0).$$

Правая часть — известная функция от v и ω, периодическая относительно v.

Это уравнение — совершенно того же вида, что и уравнение (2) п. 403, причем v играет роль x, а ω — y.

Мы поступим с ним таким же образом; мы определим методами п. 403 четыре функции $S_{1,\,1}$, $S_{1,\,2}$, $S_{1,\,3}$, $S_{1,\,4}$, соответствующие четырем асимптотическим поверхностям.

Как и в п. 403, мы найдем, что эти асимптотические поверхности пересекаются и что, следовательно, существуют гетероклинные решения.

Но это установлено только для значений μ, близких к 1; я не знаю, справедливо ли это также для малых значений μ.

Таким образом, результат является довольно неполным; однако я надеюсь, что мне простят длинноту этого отступления, ибо вопрос, который я скорее поставил, чем решил, оказывается непосредственно связанным с вопросом об устойчивости, как я показал в п. 400.

О ПРОБЛЕМЕ ТРЕХ ТЕЛ И ОБ УРАВНЕНИЯХ ДИНАМИКИ. II

ОТ РЕДАКЦИИ

В предисловии к этому тому указаны причины, в силу которых в наше Собрание трудов Пуанкаре включена только вторая часть мемуара. Историю этой работы и примечания к ней читатель найдет в комментариях. Здесь же дается только справка о содержании первой части мемуара.

Содержание первой части, озаглавленной «Общие результаты», следующее:

Глава I. Общие свойства дифференциальных уравнений.

1. Обозначения и определения.
2. Исчисление пределов.
3. Применение исчисления пределов к уравнениям в частных производных.
4. Интегрирование линейных уравнений с периодическими коэффициентами.

Глава II. Теория интегральных инвариантов.

5. Различные свойства уравнений динамики.
6. Определение интегральных инвариантов.
7. Преобразование интегральных инвариантов.
8. Применение интегральных инвариантов.

Глава III. Теория периодических решений.

9. Существование периодических решений.
10. Характеристические показатели.
11. Периодические решения уравнений динамики.
12. Вычисление характеристических показателей.
13. Асимптотические решения.
14. Асимптотические решения уравнений динамики.

Содержание главы I можно охарактеризовать весьма кратко. Нет нужды говорить о первом параграфе, где вводятся обозначения и некоторые термины. Во втором параграфе речь идет о методе мажорант Коши, который Пуанкаре называет исчислением пределов. Здесь изложены общие теоремы о решении системы дифференциальных уравнений, заданной в нормальной форме в виде рядов по степеням аргумента, начальных значений искомых функций и параметра, несколько обобщенные Пуанкаре (по сравнению с Коши). Это теоремы I—III мемуара; они изложены с незначительными редакционными изменениями в главе II, в пунктах 23—27, «Новых методов небесной механики». В этом же параграфе даны теоремы о неявных функциях и об исключении (теоремы IV—VI мемуара), изложенные в главе II «Новых методов», пункты 30, 31, 33.

Третий параграф воспроизводит в основном результаты, вошедшие в диссертацию Пуанкаре, — о форме разложений в ряды интегралов дифференциальных уравнений в частных производных вблизи особой точки. Эти результаты были использованы Пуанкаре в его исследованиях «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями», но здесь фактически остались без применения и в «Новые методы» содержание этого параграфа не вошло.

Четвертый параграф вошел — это п. 29 (глава II первого тома).

Пятый параграф мемуара (глава II) полностью вошел в «Новые методы» под названием «Уравнения в вариациях в динамике» — это п. 56 (глава IV первого тома). Следующие два параграфа, где впервые даны понятия и изложены основы теории интегральных инвариантов, вошли в третий том в значительно расширенном виде — там этой теории отведено несколько глав (XXII—XXVI).

В восьмом параграфе, т. е. в последнем параграфе главы II, содержится теорема о возвращении, рассматривается устойчивость по Пуассону, уточняются результаты Хилла и Болина. Основные результаты этого параграфа вошли в главы XXV и XXVII «Новых методов», где даже воспроизведены те же рисунки (рис. 1 и 2 мемуара — это рис. 2 и 3 главы XXVII).

Материал третьей главы подробно изложен в главах III, IV и VII.

В девятом параграфе рассматривается вопрос о зависимости периодических решений от параметра — то, что теперь называется методом малого параметра Пуанкаре, — и основания теории бифуркаций периодических решений. В «Новых методах» этим вопросам посвящены пункты 36—38 главы III.

В десятом параграфе, кроме общих определений, выясняются специальные свойства характеристических показателей периодических решений канонических уравнений динамики и даются условия бифуркаций в терминах характеристических показателей. Это изложено в пунктах 59—63 главы IV.

В одиннадцатом параграфе предыдущая теория применяется к исследованию уравнений динамики, близких к интегрируемым, описывающим условно-периодические движения, частоты которых зависят от начальных условий. В частности, рассматриваются малые периодические гамильтоновы возмущения нелинейного одномерного осциллятора и плоская ограниченная круговая задача трех тел (пункты 42—46 главы III).

Двенадцатый параграф содержит построение рядов по степеням квадратного корня из малого параметра для характеристических показателей периодических решений, найденных в § 11. Содержание параграфа вошло в пункты 74—77, 79—80 главы IV «Новых методов».

В тринадцатом параграфе исследуются решения, стремящиеся к периодическим при неограниченном продолжении вперед или назад (пункты 104—106, глава VII).

Четырнадцатый параграф (последний параграф первой части мемуара) посвящен приложению предыдущей теории к каноническим уравнениям динамики. Его содержание вошло в пункты 107—117 главы VII «Новых методов».

Таково краткое содержание первой части мемуара.

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ И ПРОБЛЕМА n ТЕЛ

Глава I

ИЗУЧЕНИЕ СЛУЧАЯ, КОГДА ИМЕЮТСЯ ДВЕ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

§ 15. Различные геометрические представления

Вернемся к уравнениям

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt}=\frac{dF}{dy_2}, \qquad \frac{dy_1}{dt}=-\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt}=-\frac{dF}{dx_2}. \tag{1}$$

Мы ограничимся наиболее простым случаем, когда имеются всего лишь две степени свободы; действительно, мне нет нужды заниматься случаем, когда имеется одна степень свободы, поскольку тогда уравнения динамики легко интегрируются в простых квадратурах.

Итак, предположим, что функция F зависит всего лишь от четырех переменных x_1, x_2, y_1, y_2. Кроме того, предположим, что эта функция непрерывна по этим четырем переменным и периодична с периодом 2π по y_1 и y_2.

Таким образом, положение системы определено четырьмя величинами x_1, x_2, y_1, y_2, и это положение не изменяется, когда y_1 или y_2 увеличивается на 2π или на число, кратное 2π. Другими словами, x_1 и x_2 — линейные переменные, в то время как y_1 и y_2 — переменные угловые.

Нам известен интеграл уравнений (2), имеющий следующий вид:

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2)=C. \tag{2}$$

Здесь C обозначает постоянную живых сил. Если эту постоянную рассматривать как данную в условии задачи, то четыре величины x, y не являются независимыми, они связаны уравнением (2). Таким образом, для определения положения системы достаточно произвольно задать три из четырех величин. Следовательно, станет возможным представлять положение системы посредством расположения точки P в пространстве.

Кроме того, по различным причинам может случиться, что четыре переменные x и y подчиняются не только равенству (2), но одному или нескольким неравенствам:

$$\varphi_1(x_1, x_2, y_1, y_2)>0, \qquad \varphi_2(x_1, x_2, y_1, y_2)>0. \tag{3}$$

Предположим, например, для определенности, что неравенства (3) записываются в виде

$$a > x_1 > b$$

и неравенство (2) таково, что если x_1 удовлетворяет этим неравенствам, то из соотношения (2) можно получить четвертую переменную x_2 как однозначную функцию трех основных x_1, y_1 и y_2.

Тогда мы можем представить положение системы с помощью точки, прямоугольные координаты которой будут

$$X = \cos y_1 [1 + \cos y_2 (cx_1 + d)], \qquad Y = \sin y_1 [1 + \cos y_2 (cx_1 + d)],$$
$$Z = \sin y_2 (cx_1 + d),$$

где c и d — новые положительные постоянные, такие, что

$$ca + d < 1; \qquad cb + d > 0.$$

В самом деле, ясно, что каждому положению системы, т. е. каждой системе значений x_1, y_1 и y_2, удовлетворяющих условиям

$$a > x_1 > b, \quad 2\pi > y_1 > 0, \quad 2\pi > y_2 > 0,$$

соответствует одна-единственная точка пространства, заключенная между двумя торами

$$\begin{aligned} &(1 - \sqrt{X^2 + Y^2})^2 + Z^2 = (cb + d)^2, \\ &(1 - \sqrt{X^2 + Y^2})^2 + Z^2 = (ca + d)^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Обратно, каждой точке пространства, заключенной между этими двумя торами, соответствует одна-единственная система значений x_1, y_1 и y_2, удовлетворяющая предыдущим неравенствам.

Может случиться, что неравенства (3) больше не записываются в форме $a > x_1 > b$, но что тем не менее из этих неравенств, присоединенных к соотношению (2), вытекает как следствие соотношение

$$a > x_1 > b.$$

Если, кроме того, x_2 является однозначной функцией трех других переменных, то наш способ геометрического представления все еще применим.

Мы можем рассмотреть и такой более общий случай.

Предположим, что можно найти вспомогательную переменную со следующими свойствами. Если x_1, x_2, y_1 и y_2 одновременно удовлетворяют равенству (2) и неравенствам (3), то можно выразить x_1 и x_2 как однозначные функции ξ, y_1 и y_2. Кроме того, в силу неравенств (3), ξ не сможет

стать бесконечной и остается заключенной между некоторыми пределами таким образом, что из соотношений (2) и (3) следует неравенство

$$a > \xi > b.$$

Тогда мы сможем полностью определить положение системы, задав три переменные ξ, y_1 и y_2, и представить его с помощью точки P с прямоугольными координатами

$$X = \cos y_1 [1 + \cos y_2 (c\xi + d)], \qquad Y = \sin y_1 [1 + \cos y_2 (c\xi + d)],$$
$$Z = \sin y_2 (c\xi + d)$$

при наличии условий

$$c \geqslant 0, \qquad ca + d < 1, \qquad cb + d > 0.$$

Как и в предыдущем случае, теперь видно, что всякому положению системы соответствует одна-единственная точка пространства, заключенная между двумя торами (4); и наоборот, всякой точке, заключенной между этими двумя торами, может соответствовать лишь одно положение системы.

Может случиться, что при $x_1 = a$ (или более общо, при $\xi = a$) положение системы остается неизменным независимо от значения y_2. В дальнейшем мы дадим примеры этого. Подобным же образом в полярных координатах в общем случае для определения положения точки нужно задать две координаты ρ и ω, однако, если предположить, что $\rho = 0$, то при любом ω мы всегда получаем одну и ту же точку, а именно, полюс.

В таком случае мы выберем постоянные c и d так, что

$$ca + d = 0.$$

Второй из двух торов (4) тогда сводится к окружности

$$Z = 0, \qquad X^2 + Y^2 = 1.$$

В каждой точке этой окружности y_2 не определен, но, тем не менее, поскольку при $\xi = a$ положение системы не зависит от y_2, каждой точке окружности соответствует одно-единственное положение системы.

Можно теперь сказать, что всякому положению системы соответствует одна внутренняя точка первого из двух торов (4) и что, наоборот, одной внутренней точке этого тора может соответствовать лишь одно положение системы.

Рассмотрим теперь другой случай.

Представим себе, что в силу неравенств (3) ξ может принимать все положительные значения, т. е. что

$$a = 0, \qquad b = +\infty.$$

Предположим, что при $\xi = 0$ положение системы не зависит от y_2 и что при $\xi = \infty$ это положение не зависит от y_1.

Мы сможем теперь представить положение системы с помощью точки со следующими прямоугольными координатами:

$$X = \cos y_1 e^{\xi \cos y_2}, \qquad Y = \sin y_1 e^{\xi \cos y_2}, \qquad Z = \xi \sin y_2.$$

При $\xi=0$ (при любом y_2) получаем

$$X=\cos y_1, \quad Y=\sin y_1, \quad Z=0.$$

Изображающая точка находится на окружности

$$X^2+Y^2=1, \quad Z=0$$

и ее положение не зависит от y_2; это не вызывает неудобств, поскольку по предположению положение системы при $\xi=0$ также не зависит от y_2.

При $\xi=\infty$ мы находим, если только $\cos y_2$ не является отрицательным:

$$X=Y=0, \quad Z=\sin y_2.$$

Изображающая точка находится на оси Z и ее положение не зависит от y_1, но при $\xi=\infty$ положение системы не зависит уже от y_1.

Таким образом, принятый способ представления является вполне законным.

Предыдущие рассуждения требуют подтверждения некоторыми примерами. Я рассматриваю лишь три из них.

Первый из этих примеров наиболее важный, потому что он является частным случаем задачи трех тел. Представим себе два тела, первое большой массы, второе конечной, но очень малой массы, и предположим, что эти два тела описывают вокруг их общего центра тяжести окружности, двигаясь равномерно. Рассмотрим затем третье тело бесконечно малой массы, такой, что его движение испытывает возмущение из-за притяжения двух первых тел, но само оно не может возмущать орбиты этих тел. Кроме того, ограничимся случаем, когда движение третьего тела происходит в плоскости окружностей, описываемых двумя первыми массами.

Это как раз случай маленькой планеты, движущейся под влиянием Солнца и Юпитера, если пренебречь эксцентриситетом Юпитера и наклонением орбит.

Это мы имеем и в случае Луны, движущейся под влиянием Солнца и Земли, если пренебречь эксцентриситетом земной орбиты и наклонением лунной орбиты к эклиптике.

Мы определим положение третьего тела с помощью ее оскулирующих в данный момент элементов и запишем уравнения движения, принимая обозначения Тиссерана в его заметке, помещенной в «Comptes rendus» от 31 января 1887 г.

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt}&=\frac{dR}{dl}, & \frac{dl}{dt}&=-\frac{dR}{dL}, \\ \frac{dG}{dt}&=\frac{dR}{dg}, & \frac{dg}{dt}&=-\frac{dR}{dG}. \end{aligned} \tag{5}$$

Мы обозначили здесь через a, e и n большую ось оскулирующей орбиты, эксцентриситет и среднее движение третьей массы; l обозначает среднюю аномалию этой третьей массы, а g — долготу ее перигелия.

Затем я полагаю

$$L=\sqrt{a}, \qquad G=\sqrt{a(1-e^2)}.$$

Я выбираю единицы таким образом, чтобы постоянная Гаусса была равна 1 и чтобы среднее движение второй массы было равно 1, а долгота этой второй массы была равна t.

В этих условиях угол, под которым расстояние между двумя последними массами видно с первой массы, отличается от $l+g-t$ только на периодическую функцию l периода 2π.

Функция R является обычной пертурбационной функцией, увеличенной на $\frac{1}{2a}-\frac{1}{2L^2}$. Эта функция зависит лишь от L, G, l и $l+g-t$, так как расстояние от второй массы до первой постоянно, а расстояние от третьей массы до первой зависит лишь от L, G и l. Кроме того, эта функция периодическая с периодом 2π как по l, так и по $l+g-t$.

Отсюда можно заключить, что

$$\frac{dR}{dt}+\frac{dR}{dg}=0$$

и что уравнения (5) допускают в качестве интеграла выражение

$$R+G=\text{const}.$$

Мы попытаемся придать уравнениям (5) форму уравнений (1). Для этого нам надо только положить

$$x_1=G, \qquad x_2=L,$$
$$y_1=g-t, \qquad y_2=l,$$
$$F(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2)=R+G,$$

и уравнения (5) примут вид

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i}. \tag{1}$$

Функция F зависит от очень малого параметра μ, являющегося массой второго тела, и мы можем записать

$$F=F_0+\mu F_1,$$

где F — периодическая функция по y_1 и y_2, т. е. по угловым переменным, а x_1 и x_2 — линейные переменные. Если положить $\mu=0$, то F сведется к F_0 и

$$F_0=\frac{1}{2a}+G=x_1+\frac{1}{2x_2^2}$$

будет зависеть лишь от линейных переменных.

Из самого определения L и G как функций a и e следует, что

$$L^2 > G^2 \quad \text{или} \quad x_2^2 > x_1^2;$$

это показывает, что x_1 может изменяться от $-x_2$ до $+x_2$.

Если предположить, что $x_1 = +x_2$, то эксцентриситет будет равен нулю; из этого следует, что пертурбационная функция и положение системы зависят только от разности долгот двух малых масс, т. е. что

$$l + g - t = y_1 + y_2.$$

Отсюда получаем

$$\frac{dF}{dy_1} = \frac{dF}{dy_2},$$

откуда

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 0; \tag{6}$$

из этого можно заключить (поскольку начальное значение $x_1 - x_2$ предполагается равным нулю), что x_1 должно постоянно оставаться равным x_2, но это является особым решением уравнения (1), которое должно быть отброшено. Что же касается «частных» решений, которые мы должны сохранить, уравнение (6) просто означает, что когда $x_1 - x_2$ достигает значения 0, это значение является максимумом, как это, впрочем, следует из неравенства $x_2^2 > x_1^2$.

Если теперь предположить, что $x_2 = -x_1$, то эксцентриситет будет равен нулю, но движение будет происходить в обратном направлении, будет попятным (оно становится таким каждый раз, когда x_1 и x_2 разного знака); тогда функция F и положение системы зависят только от угла

$$-l + g - t = y_1 - y_2,$$

что приводит к

$$\frac{dF}{dy_1} + \frac{dF}{dy_2} = 0.$$

Теперь я займусь следующим вопросом:

Найти такую переменную ξ, что если x_1, x_2, y_1, y_2 удовлетворяют соотношениям (2) и (3) (которые в нашем случае сводятся к

$$F = C, \qquad x_2^2 > x_1^2),$$

то эти четыре величины могут быть выражены как непрерывные функции ξ, y_1 и y_2.

Я займусь изучением вопроса сначала в случае, когда $\mu = 0$ и когда

$$F = F_0 = \frac{1}{2x_2^2} + x_1.$$

Рассмотрим плоскость и в этой плоскости точку с координатами

$$X=x_1-c, \qquad Y=x_2.$$

Тогда равенства и неравенства (2) и (3) запишутся в виде

$$X+\frac{1}{2Y^2}=0, \qquad Y>X+c>-Y.$$

Построим кривую

$$X+\frac{1}{2Y^2}=0$$

и две прямые

$$X+c=\pm Y.$$

Эти прямые и кривая могут находиться в двух различных положениях, представленных на рис. 3 и 4.

Каждый из двух рисунков должен был бы состоять из двух частей, симметричных относительно оси x, но мы изобразили лишь половину каждого рисунка, расположенную над этой осью. В случае рис. 3 кривая дает нам две дуги BC и DE, в то время как дуги AB и CD должны быть отброшены в силу неравенства $Y^2>(X+c)^2$. В случае рис. 4 нужно рассмотреть лишь одну дугу BC, а дуга AB должна быть отброшена.

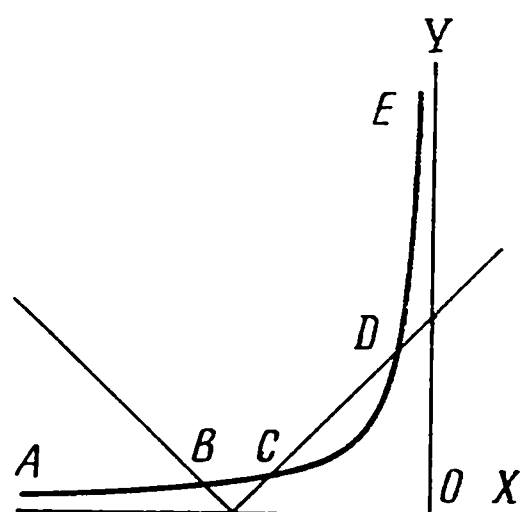


Рис. 3

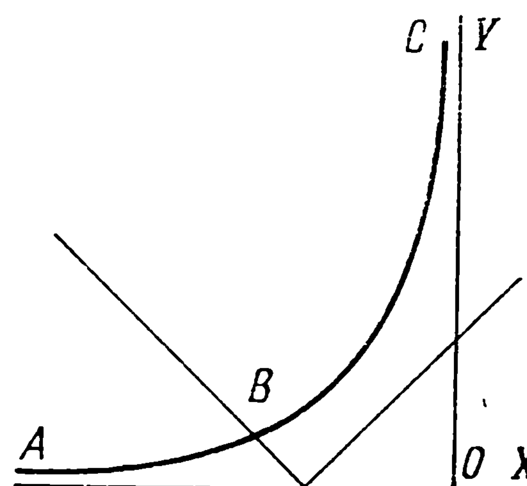


Рис. 4

Переход от рис. 3 к рис. 4 происходит тогда, когда прямая CD становится касательной к кривой, а точки C и D совпадают. Это имеет место при

$$c=\frac{3}{2}, \qquad X=-\frac{1}{2}, \qquad Y=1.$$

Предположим, что в дальнейшем имеет место случай рис. 3 и рассмотрим лишь дугу BC; в самом деле, это наиболее интересный случай с точки зрения приложений.

Положим

$$\xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = \frac{L - G}{L + G};$$

мы видим, что ξ обращается в нуль в точке C и становится бесконечным в точке B; когда же мы пробегаем дугу BC от C до B, мы видим, что ξ постоянно возрастает от 0 до $+\infty$. Если же задать ξ, соответствующая точка дуги BC будет полностью определена; это равнозначно тому, что x_1 и x_2 — однозначные функции ξ.

Что произойдет теперь, если μ не будет равно нулю, но только очень мало?

Положим

$$\xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1}$$

и посмотрим, будут ли x_1 и x_2 оставаться однозначными функциями ξ, y_1 и y_2, если учитывать соотношения

$$F = C, \quad \xi > 0, \quad x_2 > 0\,^*. \tag{7}$$

Для того чтобы это положение изменилось, надо, чтобы функциональный определитель

$$\frac{\partial(\xi, F)}{\partial(x_1, x_2)}$$

обращался в нуль для системы значений, удовлетворяющей условиям (7). Однако этого не произойдет, если μ достаточно мало и если c достаточно отличается от 3/2.

Во многих приложениях эти условия выполнены; мы можем, следовательно, взять ξ как независимую переменную; эта переменная будет строго положительна, а x_1 и x_2 будут однозначными функциями ξ, y_1 и y_2.

Однако, чтобы найти наиболее удобный способ геометрического представления, надо сделать еще одну замену переменных.

Положим

$$x_1' = x_1 + x_2, \qquad x_2' = x_1 - x_2,$$
$$y_1' = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \qquad y_2' = \frac{1}{2}(y_1 - y_2).$$

После этой замены переменных уравнения сохранят каноническую форму:

$$\frac{dx_1'}{dt} = \frac{dF}{dy_1'}, \qquad \frac{dy_1'}{dt} = -\frac{dF}{dx_1'},$$
$$\frac{dx_2'}{dt} = \frac{dF}{dy_2'}, \qquad \frac{dy_2'}{dt} = -\frac{dF}{dx_2'}.$$

---

* Легко понять, почему я написал последнее соотношение; дуга BC, как это видно на рисунке, вся целиком находится выше оси x, что влечет за собой неравенство $x_2 > 0$; ясно, что это неравенство будет все еще сохраняться для достаточно малых значений μ.

Мы видим, что y_1' и y_2' по-прежнему являются угловыми переменными; действительно, когда y_1' или y_2' увеличивается на величину, кратную 2π, y_1 и y_2 также увеличиваются на величину, кратную 2π, и, следовательно, положение системы не меняется.

Более того, когда одновременно y_1' и y_2' заменяются на $y_1'+2\pi$ и $y_2'+\pi$, y_2 не меняется, а y_1 увеличивается на 2π. Следовательно, положение системы не меняется.

При этих предположениях мы будем представлять положение системы точкой пространства с прямоугольными координатами

$$X = \cos y_1' e^{\xi \cos y_2'}, \qquad Y = \sin y_1' e^{\xi \cos y_2'}, \qquad Z = \xi \sin y_2'.$$

При $\xi=0$ положение системы не зависит от y_2', то же самое можно сказать об изображающей точке, которая тогда будет находиться на окружности

$$X^2+Y^2=1, \qquad Z=0.$$

При $\xi=\infty$ положение системы не зависит от y_1', не зависит от него и изображающая точка, которая будет тогда на оси Z, если $\cos y_2'$ отрицателен, и в бесконечности, если $\cos y_2'$ положителен.

Итак, каждой точке пространства соответствует одно-единственное положение системы; соответственно, каждому положению системы соответствует не одна, а две точки пространства, и действительно, двум системам значений (x_1', x_2', y_1', y_2') и $(x_1', x_2', y_1'+\pi, y_2'+\pi)$ соответствуют две различные точки пространства, но одно положение системы.

Уравнения (1) допускают интегральные инварианты

$$\int (dx_1 dy_1 + dx_2 dy_2) = \int (dx_1' dy_1' + dx_2' dy_2')$$

и

$$\int dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \int dx_1' dy_1' dx_2' dy_2'.$$

Если мы преобразуем последний инвариант по известным нам правилам, мы увидим, что

$$\int \frac{x_1'^2 d\xi dy_1' dy_2'}{x_1' \frac{dF}{dx_1'} + x_2' \frac{dF}{dx_2'}} = \int \frac{x_1'^2 dX dY dZ}{\left(x_1' \frac{dF}{dx_1'} + x_2' \frac{dF}{dx_2'}\right) \xi (X^2 + Y^2)}$$

— тоже интегральный инвариант.

Поскольку ξ строго положительно, подынтегральное выражение имеет тот же знак, что и

$$x_1' \frac{dF}{dx_1'} + x_2' \frac{dF}{dx_2'} = x_1 \frac{dF}{dx_1} + x_2 \frac{dF}{dx_2}.$$

Однако при $\mu=0$ находим

$$x_1\frac{dF}{dx_1}+x_2\frac{dF}{dx_2}=x_1-\frac{1}{x_2^2}.$$

Если мы предположим, что имеет место случай рис. 4 и дуги BC, мы должны предположить, что

$$c>\frac{3}{2},\quad x_1^2<x_2^2,\quad 0<x_2<1,$$

откуда получаем

$$x_1-\frac{1}{x_2^2}=3x_1-2c<3x_1-2\cdot\frac{3}{2}=3(x_1-1)<0.$$

Таким образом, $x_1\frac{dF}{dx_1}+x_2\frac{dF}{dx_2}$ всегда отрицательно, когда μ равно нулю. Это же будет иметь место, когда μ перестанет быть нулем, лишь бы c достаточно отличалось от 3/2.

В этих условиях интеграл

$$\int\frac{x_1'^2dX\,dY\,dZ}{\xi(X^2+Y^2)\left(-x_1'\frac{dF}{dx_1'}-x_2'\frac{dF}{dx_2'}\right)}$$

является положительным инвариантом.

При $\mu=0$, как известно, уравнения (5) легко интегрируются и мы находим

$$L=\text{const},\ G=\text{const},\ g=\text{const},\ l=nt+\text{const}.$$

Полученные таким образом решения представлены в принятом нами способе геометрического представления некоторыми траекториями. Эти траектории замкнуты всякий раз, когда среднее движение n есть рациональное число.

Они лежат на образованных траекториями поверхностях, имеющих общее уравнение

$$\xi=\text{const}$$

и являющихся, следовательно, замкнутыми поверхностями вращения, аналогичными торам.

Впоследствии мы увидим, как эти результаты изменяются при μ, не равном нулю.

В качестве второго примера я снова возьму уравнение, о котором я уже говорил в конце § 11,

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}+n^2\rho+m\rho^3=\mu R,$$

где R — функция ρ и t, голоморфная по ρ и обращающаяся в нуль одновременно с ρ и периодическая по t. Это уравнение можно записать (в обо-

значениях § 11)

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{dF}{d\sigma}, \quad \frac{d\sigma}{dt}=-\frac{dF}{d\rho}, \quad \frac{d\xi}{dt}=\frac{dF}{d\eta}, \quad \frac{d\eta}{dt}=-\frac{dF}{d\xi},$$

где

$$\xi=t, \qquad \frac{d\rho}{dt}=\sigma, \qquad F=\frac{\sigma^2}{2}+\frac{n^2\rho^2}{2}+\frac{m\rho^4}{4}-\mu\int R(\rho,\ \xi)\,d\rho+\eta.$$

Положим

$$\sigma=\sqrt{n}\,\sqrt{2x_1}\cos y_1, \qquad \rho=\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{2x_1}\sin y_1.$$

Уравнения сохранят канонический вид уравнений динамики, и функция F будет зависеть от двух линейных переменных x_1 и η и от двух угловых переменных y_1 и ξ.

Легко видеть, что когда мы задаем постоянную живых сил C, переменные x_1, y_1 и ξ, четвертая переменная η полностью определена; действительно, имеем

$$\eta=C-nx_1-\frac{m}{n^2}x_1^2\sin^2 y_1+\mu\int R(\rho,\ \xi)\,d\rho.$$

При $x_1=0$ положение системы больше не зависит от y_1. Следовательно, мы можем, чтобы изобразить это положение, взять точку с координатами

$$X=\cos\xi e^{x_1\cos y_1}, \qquad Y=\sin\xi e^{x_1\cos y_1}, \qquad Z=x_1\sin y_1.$$

Таким образом, каждому положению системы соответствует одна точка пространства, и наоборот. Надо исключить точки на бесконечности и точки оси Z, которые нам дадут $x_1=\infty$ и, следовательно, нереальный результат.

В качестве третьего примера рассмотрим тяжелую материальную точку, движущуюся по идеально гладкой поверхности в окрестности положения устойчивого равновесия.

Возьмем за начало координат самую низшую точку поверхности, за плоскость xy возьмем касательную к поверхности плоскость (она будет горизонтальной), за оси x и y — оси индикатрисы, так что уравнение поверхности будет иметь вид

$$z=\frac{ax^2}{2}+\frac{by^2}{2}+\mu\varphi(x,\ y),$$

где $\varphi(x,\ y)$ — совокупность членов третьей и более высоких степеней по x и y, а μ — очень маленький коэффициент.

Обозначая через x' и y' проекции скорости на оси x и y, мы получим

$$F=\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{2}+gz,$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dF}{dx'}, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{dF}{dy'}, \quad \frac{dx'}{dt}=-\frac{dF}{dx}, \quad \frac{dy'}{dt}=-\frac{dF}{dy}.$$

Сделаем замену переменных, положив

$$x = \frac{\sqrt{2x_1}}{\sqrt[4]{ga}} \cos y_1, \qquad x' = \sqrt{2x_1}\,\sqrt[4]{ga}\,\sin y_1,$$
$$y = \frac{\sqrt{2x_2}}{\sqrt[4]{gb}} \cos y_2, \qquad y' = \sqrt{2x_2}\,\sqrt[4]{gb}\,\sin y_2.$$

Дифференциальные уравнения сохранят каноническую форму уравнений динамики. Уравнение живых сил запишется в виде

$$\sqrt{ga}\,x_1 + \sqrt{gb}\,x_2 + \mu g \varphi (x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2) = C,$$

где φ — та же функция, что и выше, но преобразованная заменой переменных. Поскольку x_1 и x_2 строго положительны (так же, как и коэффициенты a и b), уравнение живых сил показывает, что эти две величины остаются все время меньше некоторого предела. В силу своего определения функция φ обращается в нуль одновременно с x_1 и x_2 вместе со своими частными производными 1-го порядка. Из этого мы заключаем, что поскольку μ очень мало, функция $\mu\varphi$ и ее частные производные первого порядка никогда не могут превосходить некоторой весьма малой верхней грани. Мы можем, следовательно, записать, что

$$\left|\mu \frac{d\varphi}{dx_1}\right| < \sqrt{\frac{a}{g}}, \qquad \left|\mu \frac{d\varphi}{dx_2}\right| < \sqrt{\frac{b}{g}}.$$

Положим теперь $x_2 = \xi x_1$; отношение ξ будет строго положительным. Уравнение живых сил примет вид

$$x_1(\sqrt{ga} + \sqrt{gb}\,\xi) + \mu g \varphi (x_1,\ \xi x_1,\ y_1,\ y_2) = C. \tag{9}$$

Производная левой части (9) по x_1 будет иметь вид

$$\sqrt{ga} + \sqrt{gb}\,\xi + \mu g \frac{d\varphi}{dx_1} + \mu \xi g \frac{d\varphi}{dx_2}.$$

В силу неравенств (8) это выражение всегда положительно; это показывает, что из уравнения (9) можно получить x_1 как однозначную функцию от ξ, y_1 и y_2, и, следовательно, положение системы полностью определяется тремя переменными y_1, y_2 и ξ.

При $\xi = 0$ положение не зависит от y_1, при $\xi = \infty$ оно не зависит от y_2. Итак, мы представим это положение точкой

$$X = \cos y_2 e^{\xi \cos y_1}, \qquad Y = \sin y_2 e^{\xi \cos y_1}, \qquad Z = \xi \sin y_1.$$

Таким образом, каждой точке пространства будет соответствовать одно положение системы, и наоборот.

Предыдущих примеров, я думаю, достаточно для того, чтобы оценить важность задачи, которой мы будем заниматься в следующей главе и для иллюстрации того, как мы можем варьировать способы геометрического представления.

Глава II

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 16. Изложение проблемы

Вернемся к уравнениям динамики, предположив, что имеется всего две степени свободы и, следовательно, четыре переменные x_1, x_2, y_1 и y_2. В силу § 14 эти уравнения допускают некоторые замечательные частные решения, которые мы назвали асимптотическими. Каждое из этих асимптотических решений представлено в той системе геометрического представления, которая изложена в предыдущем параграфе, некоторыми траекториями. Совокупность этих кривых порождает некоторые поверхности, которые мы можем назвать асимптотическими поверхностями и которые мы собираемся изучить.

Эти асимптотические решения могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{gathered} x_1 = \varphi_1(t,\ w),\ x_2 = \varphi_2(t,\ w),\ y_1 = n_1 t + \varphi_3(t,\ w), \\ y_2 = n_2 t + \varphi_4(t,\ w), \end{gathered} \tag{1}$$

где w равно $Ae^{\alpha t}$, а A — произвольная постоянная. Кроме того, φ_1, φ_2, φ_3 и φ_4 являются (по t, если w рассматривать как постоянную) периодическими функциями с периодом T, а $n_1 T$ и $n_2 T$ — кратные 2π.

Если в уравнениях (1) исключить t и w, то получим

$$x_1 = f_1(y_1,\ y_2), \qquad x_2 = f_2(y_1,\ y_2) \tag{2}$$

и можно считать, что эти уравнения определяют наши асимптотические поверхности. Далее, мы видели, что если мы пытаемся разложить φ_1, φ_2, φ_3 и φ_4 по степеням $\sqrt{\mu}$, мы получаем расходящиеся ряды; тем не менее они асимптотически представляют рассматриваемые функции при очень малых μ.

Напомню, что мы условились, что ряд

$$A_0 + A_1 x + \ldots + A_p x^p + \ldots$$

асимптотически представляет функцию $E(x)$ для очень малых x при

$$\lim \frac{F(x) - A_0 - A_1 x - \ldots - A_p x^p}{x^p} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

В т. 8 «Acta mathematica» я изучил свойства расходящихся рядов, асимптотически представляющих некоторые функции, и установил, что обычные правила действий применимы к этим рядам*.

К асимптотическому равенству, т. е. равенству между расходящимся рядом и функцией, которую он асимптотически представляет, можно применить все обычные операции анализа, за исключением дифференцирования.

Итак, пусть

$$\sigma_1(t,\ w,\ \sqrt{\mu});\quad \sigma_2(t,\ w,\ \sqrt{\mu}),\quad \sigma_3(t,\ w,\ \sqrt{\mu}),\quad \sigma_4(t,\ w,\ \sqrt{\mu})$$

— расходящиеся ряды по степеням $\sqrt{\mu}$, асимптотически представляющие функции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4.

Таким образом, мы будем иметь четыре асимптотических равенства

$$\begin{gathered} x_1=\sigma_1(t,\ w,\ \sqrt{\mu}),\quad x_2=\sigma_2(t,\ w,\ \sqrt{\mu}),\\ y_1=n_1t+\sigma_3(t,\ w,\ \sqrt{\mu}),\quad y_2=n_2t+\sigma_4(t,\ w,\ \sqrt{\mu}). \end{gathered} \tag{3}$$

Мы можем исключить из этих равенств t и w, пользуясь обычными правилами, и получим два новых асимптотических равенства

$$x_1=s_1(y_1,\ y_2,\ \sqrt{\mu}),\qquad x_2=s_2(y_1,\ y_2,\ \sqrt{\mu}), \tag{4}$$

где s_1 и s_2 — расходящиеся ряды по степеням $\sqrt{\mu}$, коэффициенты которых есть функции от y_1 и y_2.

Вообще нельзя дифференцировать асимптотическое равенство, однако в конце § 14 мы показали непосредственно, что в нашем частном случае можно сколько угодно раз дифференцировать равенства (3) как по t, так и по w.

Из этого мы можем заключить, что можно также сколько угодно раз дифференцировать равенства (4) по y_1 и y_2.

Мы собираемся изучать асимптотические поверхности, определенные уравнениями (2). Функции $x_1=f_1$, $x_2=f_2$, входящие в эти уравнения, должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{gathered} \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1}+\frac{dF}{dx_2}\frac{dx_1}{dy_2}+\frac{dF}{dy_1}=0,\\ \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_2}{dy_1}+\frac{dF}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2}+\frac{dF}{dy_2}=0. \end{gathered} \tag{5}$$

Мы будем действовать по методу последовательных приближений и в первом приближении примем за асимптотические уравнения поверхно-

* Пуанкаре ссылается здесь на свой мемуар «Sur les intégrales irréguliéres des equations linéaries» (Об иррегулярных интегралах линейных уравнений). — Acta mathematica, 1886, 8, 295—344. См. также «Oeuvres», t. 3. (*Прим. ред.*).

стей уравнения (4), оборвав ряды на втором члене (т. е. на члене с $\sqrt{\mu}$) включительно. Допускаемая при этом ошибка будет иметь тот же порядок величины, что и μ.

Во втором приближении мы снова примем за уравнения асимптотических поверхностей уравнения (4), но с бо́льшим числом членов ряда. Мы можем взять достаточное количество членов для того, чтобы ошибка имела порядок μ^p при любом μ.

Наконец, в третьем приближении мы попытаемся установить свойства *точных* уравнений асимптотических поверхностей, т. е. уравнений (2).

Итак, мы должны прежде всего попытаться непосредственно составить ряды s_1 и s_2 из уравнений (4). Эти ряды, подставленные вместо x_1 и x_2, должны формально удовлетворять уравнениям (5).

Следовательно, мы должны отыскать ряды по степеням $\sqrt{\mu}$, формально удовлетворяющие уравнениям (5). Коэффициенты этих рядов будут функциями y_1 и y_2, которые не должны изменяться при увеличении y_1 и y_2 на n_1T и n_2T соответственно.

Но мы найдем бесконечное число рядов, удовлетворяющих этим условиям. Как среди них выделить те, которые должны входить в равенства (4)? Выше мы видели, что при нашем способе геометрического представления рассматриваемое периодическое решение представлено замкнутой кривой и что через эту замкнутую кривую проходят две асимптотические поверхности. Можно перейти от одной к другой, заменяя $\sqrt{\mu}$ на $-\sqrt{\mu}$.

Итак, если в уравнениях (2) заменить $\sqrt{\mu}$ на $-\sqrt{\mu}$, то получится вторая асимптотическая поверхность, которая должна пересекать первую.

Другими словами, если рассматривать две полученные таким образом поверхности как две полы одной и той же поверхности, можно сказать, что эта поверхность имеет двойную кривую.

Пусть s_1^p и s_2^p — сумма p первых членов ряда s_1 и s_2; уравнения

$$\begin{aligned} x_1 &= s_1^p(y_1,\ y_2,\ \sqrt{\mu}), & x_2 &= s_2^p(y_1,\ y_2,\ \sqrt{\mu}), \\ x_1 &= s_1^p(y_1,\ y_2,\ -\sqrt{\mu}), & x_2 &= s_2^p(y_1,\ y_2,\ -\sqrt{\mu}) \end{aligned} \tag{6}$$

будут представлять две поверхности, и эти поверхности будут мало отличаться от тех двух пол, о которых только что была речь, и, следовательно, должны пересекаться.

Если рассматривать эти две поверхности как две полы единственной поверхности, можно сказать, что эта поверхность имеет двойную кривую.

В дальнейшем мы увидим, что это условие достаточно, чтобы различать ряды s_1 и s_2 среди всех рядов одинакового вида, формально удовлетворяющих уравнениям (5).

§ 17. Первое приближение

Вернемся к нашим обычным предположениям.

Пусть четыре переменные, две линейные, x_1 и x_2, и две угловые, y_1 и y_2, связаны уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt}=\frac{dF}{dy_2},$$
$$\frac{dy_1}{dt}=-\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt}=-\frac{dF}{dx_2}. \tag{1}$$

Пусть постоянная живых сил C рассматривается как данная в задаче, так что эти четыре переменные удовлетворяют уравнению

$$F\,(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2)=C, \tag{2}$$

и, следовательно, имеются только три независимые переменные.

Пусть принят такой способ геометрического представления, что всякому положению системы соответствует одна изображающая точка, и наоборот.

Пусть F зависит от очень малого параметра μ, так что его можно разложить в ряд по степеням μ:

$$F=F_0+\mu F_1+\mu^2 F_2 \ldots,$$

где F_0 зависит лишь от x_1 и x_2 и не зависит от y_1 и y_2.

Все эти условия выполнены в том частном случае задачи трех тел, который послужил нам примером в предыдущем параграфе.

Предположим, что для некоторых значений x_1 и x_2, например для

$$x_1=x_1^0, \qquad x_2=x_2^0,$$

два числа

$$-\frac{dF_0}{dx_1} \quad \text{и} \quad -\frac{dF_0}{dx_2}$$

(для краткости я их обозначу n_1 и n_2) соизмеримы между собой.

В силу того, что мы видели в § 11, каждому рациональному значению отношения n_1/n_2 соответствует уравнение

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2}=0,$$

обозначенное (7) в цитированном параграфе, и каждому корню этого уравнения соответствует одно периодическое решение уравнений (1).

Затем мы видели в § 12, что число корней уравнения (7) всегда четно, что половина этих корней соответствует устойчивым периодическим решениям, а вторая половина — неустойчивым решениям.

Следовательно, уравнения (1) *при достаточно малых* μ *имеют неустойчивые периодические решения.*

Каждое из этих периодических решений будет представлено при принятом нами способе геометрического изображения замкнутой кривой.

Мы видели в § 13, что через каждую из замкнутых кривых, представляющих неустойчивое периодическое решение, проходят две поверхности, образованные траекториями, которые мы назвали *асимптотическими* и на которых имеется бесконечно много траекторий, асимптотически приближающихся к замкнутой кривой.

Следовательно, уравнения (1) дают нам бесконечно много образованных траекториями асимптотических поверхностей, уравнение которых я собираюсь отыскать.

Посмотрим сначала, в каком виде в общем случае представляется уравнение образованной траекториями поверхности. Это уравнение можно записать в виде

$$x_1 = \Phi_1(y_1, y_2), \qquad x_2 = \Phi_2(y_1, y_2),$$

где Φ_1 и Φ_2 — две функции от y_1 и y_2, выбираемые таким образом, что тождественно выполняется равенство

$$F(\Phi_1, \Phi_2, y_1, y_2) = C.$$

Кроме того, эти функции Φ_1 и Φ_2 должны удовлетворять двум уравнениям в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dF}{dy_1} = 0, \\ \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_2}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2} + \frac{dF}{dy_2} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Впрочем, возможно, что нам достаточно будет рассмотреть первое из этих уравнений, поскольку в нем можно избавиться от x_2, заменив эту переменную ее выражением в виде функции от x_1, y_1 и y_2, полученной из равенства (2).

Вот как мы будем действовать, чтобы проинтегрировать уравнения (3), предполагая, что x_1 и x_2 очень близки к x_1^0 и x_2^0 и что отношение n_1/n_2 рационально.

Мы предположим, что x_1 и x_2 разложены по степеням $\sqrt{\mu}$, и запишем, что

$$\begin{aligned} x_1 = x_1^0 + x_1^1\sqrt{\mu} + x_1^2\mu + x_1^3\mu\sqrt{\mu} + \ldots, \\ x_2 = x_2^0 + x_2^1\sqrt{\mu} + x_2^2\mu + x_2^3\mu\sqrt{\mu} + \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Мы попытаемся теперь определить функции x^k так, чтобы при подстановке в уравнения (3) вместо x_1 и x_2 их значений (4) эти уравнения формально удовлетворялись *.

Если в выражение F мы подставим вместо x_1 и x_2 их значения (4), F станет разложимой по степеням $\sqrt{\mu}$ и можно будет записать

$$F = H_0 + \sqrt{\mu} H_1 + \mu H_2 + \mu \sqrt{\mu} H_3 + \ldots .$$

Впрочем, можно видеть без труда, что

$$H_0 = F_0(x_1^0, x_2^0),$$

$$H_1 = x_1^1 \frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^1 \frac{dF_0}{dx_2^0} = -n_1 x_1^1 - n_2 x_2^1,$$

$$H_2 = F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2) + \\ + \frac{1}{2}\left[(x_1^1)^2 \frac{d^2F_0}{(dx_1^0)^2} + 2x_1^1 x_2^1 \frac{d^2F_0}{dx_1^0 dx_2^0} + (x_2^1)^2 \frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2}\right] - n_1 x_1^2 - n_2 x_2^2,$$

. . . .

и, более общо,

$$H_k = \Theta_k - [L x_1^1 x_1^{k-1} + M(x_1^1 x_1^{k-1} + x_2^1 x_1^{k-1}) + N x_2^1 x_2^{k-1}] - n_1 x_1^k - n_2 x_2^k,$$

где Θ_k зависит лишь от y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, ... x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, ..., x_2^{k-2}, и для краткости положено

$$L = -\frac{d^2F_0}{(dx_1^0)^2}, \quad M = -\frac{d^2F_0}{dx_1^0 dx_2^0}, \quad N = -\frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2}.$$

Первое из уравнений (3) дает нам тогда, если приравнять одинаковые степени по $\sqrt{\mu}$, последовательность уравнений, которые нам позволят определить один за другим x_1^0, x_1^1, x_1^2, ..., x_1^k.

Мы можем всегда предполагать, что $n_2 = 0$. Ибо если это не имеет места, мы положили бы

$$x_1'' = a x_1 + b x_2, \quad y_1'' = -d y_1 - c y_2,$$
$$x_2'' = c x_1 + d x_2, \quad y_2'' = -b y_1 + a y_2,$$

где a, b, c, d — четыре целых числа, таких, что

$$ad - bc = 1.$$

После этой замены переменных уравнения сохраняют канонический вид.

---

* Если x_1^0 и x_2^0 выбраны так, что отношение n_1/n_2 иррационально, то можно удовольствоваться лишь разложением x_1 и x_2 по степеням μ (но не $\sqrt{\mu}$). Таким образом, мы придем к рядам, которые на самом деле не сходятся в математическом смысле слова, но которые, подобно рядам Линдштедта, могли бы быть полезны в некоторых случаях.

Функция F, периодическая с периодом 2π по y_1 и y_2, также является периодической с тем же периодом по y_1'' и y_2''. Таким образом, наша замена переменных не нарушает формы уравнений (1).

Числа n_1 и n_2 заменены двумя новыми числами n_1'' и n_2'', которые играют по отношению к преобразованным уравнениям ту же роль, что и n_1 и n_2 по отношению к первоначальным уравнениям, и мы имеем

$$n_1'' = dn_1 - cn_2,$$
$$n_2'' = -bn_1 + an_2.$$

Но поскольку отношение n_1/n_2 по предположению рационально, всегда возможно выбрать четыре таких целых числа a, b, c, d, что

$$n_2'' = -bn_1 + an_2 = 0.$$

Таким образом, мы можем без ограничения общности предполагать, что n_2 равно нулю; мы это будем делать до тех пор, пока не оговорим противное.

Предположим также, что $n_1 T = 2\pi$.

Если после этого упрощения мы приравняем коэффициенты при $\sqrt{\mu}$ в обеих частях двух уравнений (3), то получим

$$-n_1 \frac{dx_1^1}{dy_1} = -n_1 \frac{dx_2^1}{dy_1} = 0, \tag{5}$$

откуда видно, что x_1^1 и x_2^1 зависят лишь от y_2.

Приравняем теперь коэффициенты при μ в обеих частях первого из уравнений (3); принимая во внимание уравнения (5), получаем

$$-n_1 \frac{dx_1^2}{dy_1} - (Mx_1^1 + x_2^1) \frac{dx_1^1}{dy_2} + \frac{dF_1}{dy_1} = 0. \tag{6}$$

Поставим себе целью в дальнейшем определить функции x^k так, чтобы они были периодическими функциями по y_1, а именно, чтобы они не изменялись, когда y_1 увеличивается на 2π при неизменном y_2.

Тогда наши функции можно будет разложить в тригонометрические ряды по синусам и косинусам кратных y_1. Условимся обозначать через $[U]$ тот член в разложении периодической функции U по тригонометрическим функциям y_1 и его кратных, который вполне известен.

В этих условиях имеем

$$\left[\frac{dU}{dy_1}\right] = 0,$$

и я могу записать

$$\left[(Mx_1^1 + Nx_2^1) \frac{dx_1^1}{dy_2}\right] = 0,$$
$$\left[(Mx_1^1 + Nx_2^1) \frac{dx_2^1}{dy_2}\right] = \left[\frac{dF_1}{dy_2}\right].$$

Поскольку x_1^1 и x_2^1 не зависят от y_1, можно записать и проще:

$$\frac{dx_1^1}{dy_2} = 0, \qquad (Mx_1^1 + Nx_2^1)\frac{dx_2^1}{dy_2} = \left[\frac{dF_1}{dy_2}\right]. \tag{7}$$

Первое из этих уравнений показывает, что x_1^1 сводится к постоянной. Второе же легко интегрируется. Действительно,

$$\left[\frac{dF_1}{dy_2}\right] = \frac{d\,[F_1]}{dy_2},$$

откуда мы получаем в качестве интеграла уравнения (7)

$$Mx_1^1x_2^1 + \frac{N}{2}(x_2^1)^2 = [F_1] + C_1, \tag{8}$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Если же мы рассматриваем постоянную живых сил C как данную в задаче, мы не можем считать две постоянные x_1^1 и C_1 произвольными. Действительно, должно выполняться тождество

$$F = H_0 + \sqrt{\mu}H_1 + \mu H_2 + \mu\sqrt{\mu}H_3 + \ldots = C,$$

где

$$H_0 = C, \; H_1 = 0, \; H_2 = 0, \ldots$$

и где

$$F_0(x_1^0, \; x_2^0) = C, \quad -n_1x_1^1 = 0, \; \ldots .$$

Таким образом, постоянная x_1^1 равна нулю, что снова упрощает наши уравнения.

Действительно, уравнение (8) принимает вид

$$x_2^1 = \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}.$$

В этом параграфе мы ограничимся описанием и исследованием уравнений наших траекторных поверхностей, пренебрегая членами, содержащими μ, и учитывая лишь члены с $\sqrt{\mu}$.

Итак, предположим, что x_1 и x_2 определены как функции от y_1 и y_2 следующими уравнениями:

$$x_1 = x_1^0 + \sqrt{\mu}x_1^1 = x_1^0,$$

$$x_2 = x_2^0 + \sqrt{\mu}x_2^1 = x_2^0 + \sqrt{\frac{2\mu}{N}([F_1] + C_1)}.$$

В силу этих уравнений x_1 будет постоянной, а x_2 будет функцией только от y_2 и не будет зависеть от y_1.

Вернемся к нашему первому примеру в § 15. Нижеследующие рассуждения будут также применимы и к двум другим примерам, однако я останавливаюсь на первом, потому что он является частным случаем задачи трех тел.

Мы видели, что положение системы можно представить с помощью точки P с прямоугольными координатами

$$\cos y_1' e^{\xi \cos y_2'}, \quad \sin y_1' e^{\xi \cos y_2'}, \quad \xi \sin y_2',$$

где

$$y_1' = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad y_2' = \frac{1}{2}(y_1 - y_2), \quad \xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = \frac{L - G}{L + G} = \frac{-x_2'}{x_1'},$$

$$y_1 = g - t, \quad y_2 = l.$$

Кроме того, мы заметили, что переменные

$$x_1' = x_1 + x_2, \quad x_2' = x_1 - x_2$$

вместе с y_1' и y_2' образуют систему канонических переменных.

Следовательно, мы можем рассматривать ξ, y_1' и y_2' как некоторую систему координат, определяющую положение точки в пространстве, так что всякое соотношение между ξ, y_1' и y_2' является уравнением поверхности.

Но мы должны были затем сделать другую замену переменных.

Мы положили

$$x_1'' = ax_1 + dx_2, \quad y_1'' = dy_1 - cy_2,$$
$$x_2'' = cx_1 + dx_2, \quad y_2'' = -by_1 + ay_2,$$

выбрав целые числа a, b, c, d так, чтобы число, обозначенное нами n_2'', обратилось в нуль.

После этой замены переменных мы освободились от ставших ненужными штрихов и снова пришли к обозначению x_1, x_2, y_1, y_2 наших новых независимых переменных x_1'', x_2'', y_1'' и y_2''.

Вследствие этого, переменные, которые мы обозначали во всех предыдущих рассуждениях x_1, x_2, y_1 и y_2 и за которыми мы отныне сохраним эти обозначения, не являются такими же, которые мы обозначали теми же буквами в первом примере § 15, т. е. G, L, $g - t$ и l.

Ясно, что наш новый y_1 и наш новый y_2 являются линейными функциями от

$$y_1' = \frac{1}{2}(g - t + l) \quad \text{и} \quad y_2' = \frac{1}{2}(g - t - l),$$

а отношение нового x_2 к новому x_1 является дробно-линейной функцией ξ.

Отсюда мы должны сделать вывод, что можно полностью определить положение точки P в пространстве с помощью новых y_1, y_2 и отношения

новых x_2 и x_1 так, что всякое соотношение между y_1, y_2 и x_2/x_1 является уравнением поверхности.

Кроме того, эта система координат такова, что можно увеличивать y_1 или y_2 на кратное 2π без изменения точки P.

Приближенное уравнение наших траекторных поверхностей, если пренебречь членами, содержащими μ, будет следующим:

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_2^0+x_2^1\sqrt{\mu}}{x_1^0+x_1^1\sqrt{\mu}}=\frac{x_2^0}{x_1^0}+\frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1]+C_1)}. \quad (9)$$

Прежде всего мы собираемся построить поверхности, представленные этим приближенным уравнением (9).

Заметим сначала, что $y_1=0$ есть уравнение некоторой поверхности S, и та часть этой поверхности, которая нам понадобится, является частью поверхности без контакта.

Действительно, достаточно показать, что

$$\frac{dy_1}{dt}\neq 0.$$

Но это очевидно, поскольку, если положить

$$F=F_0+\mu F_1+\mu^2 F_2+\ldots,$$

получим

$$\frac{dy_1}{dt}=n_1-\mu\frac{dF_1}{dx_1}-\mu^2\frac{dF_2}{dx_1}+\ldots.$$

Так как параметр μ очень мал, dy_1/dt имеет тот же знак, что и n_1, а n_1 — постоянная, которая имеет всегда один и тот же знак.

Следовательно, dy_1/dt всегда одного знака и не может обращаться в нуль, что и требовалось доказать.

Положение точки P на поверхности S будет определено двумя другими координатами y_2 и x_2/x_1; эта система координат вполне аналогична полярным координатам, т. е. кривые

$$\frac{x_2}{x_1}=\text{const}$$

— это замкнутые концентрические кривые, и точка P не изменяется при увеличении другой координаты y_2 на 2π.

Вернемся к поверхностям, определенным уравнением (9), и исследуем их пересечения с той частью поверхности S, которая определяется уравнением $y_1=0$.

Прежде всего я замечу, что, поскольку $\sqrt{\mu}$ очень мало, эти пересечения очень мало будут отличаться от кривых $x_2/x_1=\text{const}$.

Но чтобы более полно изучить форму этих кривых пересечения, нужно прежде всего выяснить, каковы свойства функции $[F_1]$.

Вернемся к обозначениям § 11. В этом параграфе мы положили

$$E_1 = \sum A \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + h),$$

где A и h — функции x_1^0, x_2^0, x_3^0; поскольку мы имеем здесь только две степени свободы, запишем просто, что

$$F_1 = \sum A \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + h).$$

Положив затем

$$y_1 = n_1 t,\ \ y_2 = n_2 t + \varpi_2,\ \ \omega = (n_1 m_1 + n_2 m_2)\, t - m_2 \varpi_2 + h,$$

мы найдем

$$F_1 = \sum A \sin \omega;$$

затем я положу

$$\psi = SA \sin \omega,$$

где суммирование, обозначенное знаком S, распространяется на все члены вида

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0;$$

отсюда

$$\omega = m_2 \varpi_2 + n.$$

В нашем случае n_2 равно нулю; условие $m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0$ сводится к $m_1 = 0$, и мы получаем $y_2 = \varpi_2$; итак, имеем

$$\psi = SA \sin(m_2 \varpi_2 + h) = SA \sin(m_2 y_2 + h).$$

В силу определения $[F_1]$, для получения этой величины достаточно в выражении F_1 опустить все члены, где m_1 не равно нулю; получаем, таким образом, что

$$[F_1] = SA \sin(m_2 y_2 + h) = \psi.$$

(Итак, функция, обозначенная нами здесь $[F_1]$, есть та же самая, которую мы в правой части обозначили ψ.)

Следовательно, $[F_1]$ является периодической функцией y_2; и эта функция конечна, следовательно, она должна проходить по крайней мере через один максимум и один минимум.

Предположим для определенности, что $[F_1]$ изменяется следующим образом, когда y_2 изменяется от 0 до 2π:

при $y_2 = 0$ $[F_1]$ проходит через максимум, равный φ_1;
при $y_2 = \eta_1$ $[F_1]$ проходит через минимум, равный φ_2;
при $y_2 = \eta_2$ $[F_1]$ проходит через максимум, равный φ_3;

при $y_2 = \eta_3$ $[F_1]$ проходит через минимум, равный φ_4;
при $y_2 = 2\pi$ $[F_1]$ снова принимает значение φ_1;

$$\varphi_1 > \varphi_2; \quad \varphi_3 > \varphi_4.$$

Эти предположения могут быть представлены следующей кривой с абсциссой y_2 и ординатой $[F_1]$ (рис. 5).

Сделав эти предположения, я смогу построить кривые

$$y_1 = 0, \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_2^0} \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}.$$

Мы увидим, что в зависимости от значения постоянной интегрирования C_1, эти кривые будут принимать различные формы.

На рис. 6 я изобразил сплошной линией кривые $C_1 = -\varphi_4$ и $C_1 = -\varphi_2$. Эти две кривые имеют каждая по двойной точке с координатами

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \quad y_2 = \eta_3$$

и

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \quad y_2 = \eta_1$$

соответственно.

Я изобразил пунктирной линией две ветви кривой, соответствующей значению $C_1 > -\varphi_4$, пунктирно-точечной линией — кривую, соответствующую значению C_1, заключенному между $-\varphi_2$ и $-\varphi_4$. Точечной линией

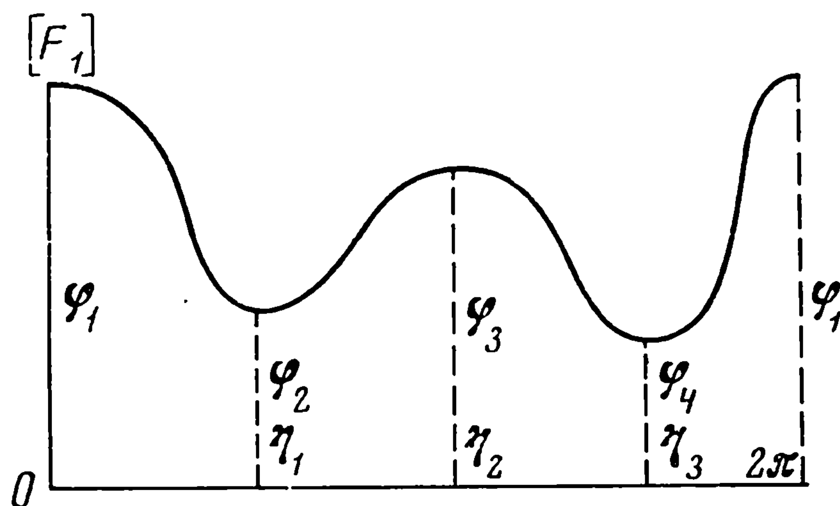


Рис. 5

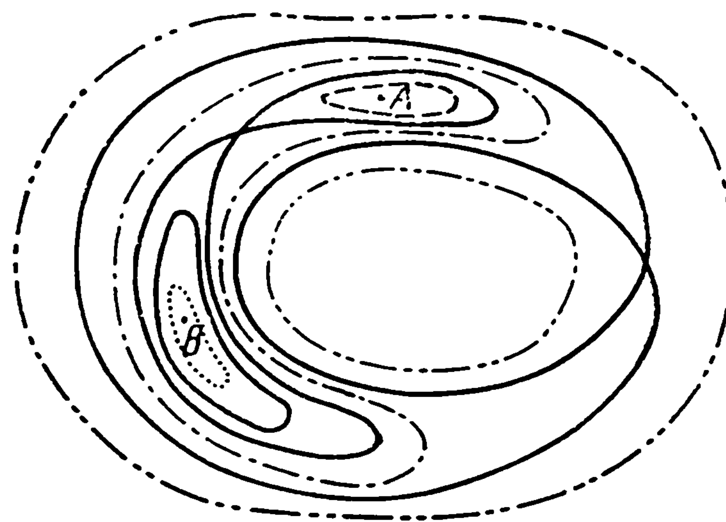


Рис. 6

я изобразил две ветви кривой, соответствующей значению C_1, заключенному между $-\varphi_2$ и $-\varphi_3$.

При $C_1 = -\varphi_3$ одна из этих ветвей сводится к точке, обозначенной на рисунке буквой A $\left(\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \ y_2 = \eta_2\right)$; другая ветвь изображена линией, составленной из крестиков.

При C_1, заключенном между — φ_3 и $-\varphi_1$, лишь эта вторая ветвь сохраняется; при $C_1 = -\varphi_1$ она также сводится к точке, обозначенной на рисунке B и имеющей координаты

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \qquad y_2 = 0.$$

Наконец, при $C_1 < -\varphi_1$ вся кривая становится мнимой.

Поверхности, определенные уравнением (1), имеют общий вид, который легко представить себе с помощью кривых, которые мы только что построили.

Действительно, рассмотрим любую из этих кривых и проведем через все точки одну из линий, общее уравнение которых есть

$$y_2 = \text{const}; \qquad \frac{x_2}{x_1} = \text{const}.$$

Множество линий, построенных таким образом, составит замкнутую поверхность, которая будет в точности одной из поверхностей, определяемых уравнением (9).

Отсюда видно, что эти поверхности будут вообще замкнутыми трехсвязными поверхностями (т. е. имеющими такую же связность, как и тор).

При $C_1 > -\varphi_4$ или при C_1, заключенном между $-\varphi_2$ и $-\varphi_3$, можно найти две подобные поверхности, находящиеся одна внутри другой в первом случае и одна вне другой во втором.

При C_1, заключенном между $-\varphi_3$ и $-\varphi_1$ или же между $-\varphi_2$ и $-\varphi_4$, имеем только одну трехсвязную поверхность; наконец, при $C_1 < -\varphi_1$ поверхность полностью перестает существовать.

Перейдем к четырем замечательным поверхностям

$$C = -\varphi_1, \ -\varphi_2, \ -\varphi_3 \ \text{ и } \ -\varphi_4.$$

Поверхности $C_1 = -\varphi_2$ и $C_1 = -\varphi_4$ представляют собой двойную кривую и имеют ту же связность, что и поверхность, порожденная вращением улитки Паскаля с двойной точкой, или лемнискаты, вокруг оси, не пересекающей этой кривой.

Поверхность $C_1 = -\varphi_3$ сводится к одной замкнутой трехсвязной поверхности и имеет изолированную замкнутую кривую; наконец, поверхность $C_1 = -\varphi_1$ сводится к замкнутой изолированной кривой.

В § 11 мы рассматривали уравнение (7)

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0;$$

мы видели, что каждому из корней этого уравнения соответствует периодическое решение. Но в нашем случае, в силу замечания, которое мы только что сделали, это уравнение может быть записано в виде

$$\frac{[dF_1]}{dy_2} = 0,$$

так что периодические решения соответствуют максимумам и минимумам $[F_1]$. В настоящем случае число этих максимумов, так же, как и минимумов, будет равно двум.

Таким образом, мы будем иметь два неустойчивых периодических решения, соответствующих двум двойным кривым поверхностей $C_1 = -\varphi_2$ и $C_1 = \varphi_4$, и два устойчивых периодических решения, соответствующих двум замкнутым изолированным кривым поверхностей $C_1 = -\varphi_3$ и $C_1 = -\varphi_1$.

Какие из этих поверхностей мало отличаются от асимптотических поверхностей и представляют их в первом приближении? В силу того, что мы видели в § 16, это будут те из них, которые имеют двойную кривую, т. е. поверхности $C_1 = -\varphi_4$ и $C_1 = -\varphi_2$.

§ 18. Второе приближение

Вернемся к уравнениям (1) предыдущего параграфа и предположениям, сделанным в начале этого параграфа. Запишем

$$x_1 = x_1^0 + x_1^1\sqrt{\mu} + x_1^2\mu + x_1^3\mu\sqrt{\mu} + \ldots,$$
$$x_2 = x_2^0 + x_2^1\sqrt{\mu} + x_2^2\mu + x_2^3\mu\sqrt{\mu} + \ldots;$$

предположим, что коэффициенты этих двух разложений являются функциями y_1 и y_2, и попытаемся определить эти коэффициенты так, чтобы эти уравнения были совместны с дифференциальными уравнениями (1) предыдущего параграфа, т. е. чтобы имели место соотношения

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dF}{dy_1} = 0, \\ \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_2}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2} + \frac{dF}{dy_2} = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Это именно та задача, которую мы себе поставили выше.

Эта задача может быть представлена в другой форме (с точки зрения «Лекций по динамике» Якоби).

Если x_1 и x_2 — функции y_1 и y_2, удовлетворяющие уравнениям (1), выражение

$$x_1 dy_1 + x_2 dy_2$$

должно быть точным дифференциалом. Если же мы положим

$$dS = x_1 dy_1 + x_2 dy_2,$$

то S будет функцией y_1 и y_2 и будет определена уравнением в частных производных

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, y_1, y_2\right) = C. \qquad (2)$$

S можно разложить по степеням $\sqrt{\mu}$, и мы получим

$$S = S_0 + S_1\sqrt{\mu} + S_2\mu + S_3\mu\sqrt{\mu} + \ldots, \tag{3}$$

где S_0, S_1, ..., S_k, ... будут функциями y_1 и y_2, и мы будем иметь

$$\frac{dS_k}{dy_1} = x_1^k, \quad \frac{dS_k}{dy_2} = x_2^k.$$

Я напомню теперь, какие условия мы наложили в предыдущем параграфе на функции x_1^k и x_2^k; мы условились прежде всего, что x_1^0 и x_2^0 должны быть постоянными. В таком случае будет

$$S_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2.$$

Если мы обозначим затем через n_1 и n_2 величины $-dF_0/dx_1$ и $-dF_0/dx_2$ при $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, то эти величины n_1 и n_2 также будут постоянными.

Последующие рассуждения применимы в случае, когда отношение n_1/n_2 рационально. В этом случае всегда можно, как мы это уже видели, предположить, что $n_2 = 0$; это мы и будем делать, как и в предыдущем параграфе.

Кроме того, в этом параграфе мы предположили, что x_1^k и x_2^k являются периодическими функциями y_1, не изменяющими своего значения при замене y_1 и y_2 на $y_1 + 2\pi$ и y_2.

Отсюда следует, что dS_k/dy_1 и dS_k/dy_2 являются периодическими функциями по y_1, и можно записать

$$S_k = \frac{\lambda_k}{n_1} y_1 + S'_k, \tag{4}$$

где λ_k — постоянная и S'_k — периодическая функция y_1.

Предположим, что в левой части уравнения (2) мы заменим S его разложением (3); мы увидим, что F станет разложимой по степеням $\sqrt{\mu}$, и получим, как это было в предыдущем параграфе,

$$F = H_0 + H_1\sqrt{\mu} + H_2\mu + H_3\mu\sqrt{\mu} + \ldots,$$

где H — функции y_1, y_2 и частных производных S_0, S_1, S_2 и т. д.

Кроме того, видно, что H_0 будет зависеть только от S_0, H_1 от S_0 и S_1, H_2 от S_0, S_1 и S_2, H_3 от S_0, S_1, S_2, S_3, и т. д.

Кроме того, мы находим

$$\begin{aligned}
H_0 &= F_0(x_1^0, x_2^0) = C,\\
H_1 &= -n_1\frac{dS_1}{dy_1},\\
H_2 &= -n_1\frac{dS_2}{dy_1} + \Delta S_1 + K_2,\\
H_3 &= -n_1\frac{dS_3}{dy_1} + 2\Delta S_2 + K_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
H_p &= -n_1\frac{dS_p}{dy_1} + 2\Delta S_{p-1} + K_p,
\end{aligned}$$

где для краткости положено

$$\Delta S_p = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2F_0}{(dx_1^0)^2} x_1^1 x_1^p + \frac{d^2F_0}{dx_1^0 dx_2^0}(x_1^1 x_2^p + x_2^1 x_1^p) + \frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2} x_2^1 x_2^p\right]$$

и где K_p зависит лишь от $S_0, S_1, \ldots, S_{p-2}$.

Таким образом, для рекуррентного определения функций имеем следующие уравнения:

$$H_0 = C,\ H_1 = 0,\ H_2 = 0, \ldots, H_p = 0.$$

Если бы мы предполагали, что функции $S_0, S_1, \ldots, S_{p-1}$ полностью известны, то уравнение

$$H_p = 0$$

или

$$n_1 \frac{dS_p}{dy_1} = 2\Delta S_{p-1} + K_p \tag{5}$$

определяло бы функцию S_p с точностью до произвольной функции от y_2.

Однако вопрос ставится несколько иначе.

Предположим, что нам полностью известны

$$S_0,\ S_1, \ldots, S_{p-2}$$

и что S_{p-1} нам известна с точностью до произвольной функции от y_2.

По предположению производные от $S_0, S_1, \ldots, S_{p-2}, S_{p-1}$ являются периодическими функциями y_1; следовательно, K_p и ΔS_{p-1} будут периодическими функциями от y_1.

Обозначим через $[U]$, как мы это делали в предыдущем параграфе, среднее значение U, которая является периодической функцией от y_1.

Функция S_p должна иметь вид (4); отсюда мы заключаем, что

$$\left[\frac{dS_p}{dy_1}\right]$$

должна быть равна постоянной λ_p/n_1, не зависящей от y_2, так что из уравнения (5) получаем

$$2[\Delta S_{p-1}] + [K_p] = \lambda_p, \tag{6}$$

и это уравнение полностью определит S_{p-1} (если предположить, что нам задана, произвольно или в соответствии с некоторым законом, постоянная λ_p).

Мы находим прежде всего уравнение

$$H_1 = 0, \quad \text{или} \quad \frac{dS_1}{dy_1} = 0,$$

которое показывает, что S_1 — произвольная функция от y_2.

Отсюда получаем

$$2\Delta S_p = -M \frac{dS_1}{dy_2}\frac{dS_p}{dy_1} - N \frac{dS_1}{dy_2}\frac{dS_p}{dy_2}$$

(для краткости положим

$$-M = \frac{d^2F_0}{dx_1^0 dx_2^0}, \quad -N = \frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2}$$

как мы уже делали в предыдущем параграфе).

Уравнение, которое мы затем находим, приравнивая нулю среднее значение H_2, имеет следующий вид:

$$[\Delta S_1] + [K_2] = \lambda_2.$$

Иначе,

$$\Delta S_1 = -\frac{N}{2}\left(\frac{dS_1}{dy_2}\right)^2 = [\Delta S_1].$$

С другой стороны,

$$K_2 = F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2),$$

где λ_2 — постоянная, которая, как это легко видеть, в точности та же, что и постоянная — C_1 в предыдущем параграфе.

Итак, получаем

$$\frac{dS_1}{dy_2} = \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}.$$

Таким образом, S_1 полностью определена с точностью до постоянной; но мы можем не обращать внимания на эту постоянную, она в действительности не играет никакой роли, так как функции S входят лишь под знаком производных.

Затем уравнение (6) принимает вид

$$\left[N \frac{dS_1}{dy_2}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = -\lambda_p - M\left[\frac{dS_1}{dy_2}\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] + [K_p]. \tag{7}$$

В правой части все известно: K_p зависит лишь от $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{p-2}$; dS_{p-1}/dy_1 известна, так как мы предположили, что S_{p-1} определена с точностью до произвольной функции от y_2.

Далее, dS_1/dy_2 не зависит от y_1; следовательно, левая часть может быть записана в виде

$$N \frac{dS_1}{dy_1}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right],$$

так что уравнение (7) даст $[dS_{p-1}/dy_2]$ как функцию от y_2. Следовательно, $[S_{p-1}]$ станет известна с точностью до постоянной и эта постоянная, не играющая никакой роли, может быть оставлена без внимания.

С одной стороны, мы знаем S_{p-1} с точностью до произвольной функции от y_2; с другой стороны, мы знаем $[S_{p-1}]$ как функцию от y_2; следовательно, S_{p-1} полностью определена.

Постоянная C_1 играет основную роль. Предположим сначала, что она меньше величины, обозначенной нами $-\varphi_4$ в предыдущих параграфах, и, следовательно, сумма $[F_1]+C_1$ всегда положительна и dS_1/dy_2 всегда вещественна и можно сказать, что она всегда положительна, потому что я волен выбрать знак $+$ перед радикалом.

Я скажу, что в этом случае можно произвольно выбрать постоянные λ и что dS_p/dy_1 и dS_p/dy_2 — периодические функции не только от y_1, но и от y_2 (S_p тогда имеет вид

$$S_p=\lambda_p y_1+\mu_p y_2+S''_p,$$

где λ_p и μ_p — постоянные, в то время как S''_p — периодическая функция с периодом 2π как по y_1, так и по y_2).

Действительно, предположим, что это верно при

$$\frac{dS_1}{dy_1},\ \frac{dS_1}{dy_2},\ \frac{dS_2}{dy_1},\ \frac{dS_2}{dy_2},\ \ldots,\ \frac{dS_{p-2}}{dy_1},\ \frac{dS_{p-2}}{dy_2},\ \frac{dS_{p-1}}{dy_1}.$$

Я утверждаю, что это будет верно и при dS_{p-1}/dy_2 и dS_p/dy_1.

В самом деле, мы имеем по предположению, что

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_1}=\sum A_{m_1,\,m_2}\cos(m_1y_1+m_2y_2+\alpha),$$

где A и α — постоянные, m_1 и m_2 — целые.

По определению отсюда получим

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right]=\sum_{m_2=0}^{m_2=\infty}A_{0,\,m_2}\cos(m_2y_2+\alpha).$$

Но должно выполняться соотношение

$$2\,[\Delta S_{p-2}]+[K_{p-1}]=\lambda_{p-1}$$

и, следовательно,

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right]=\frac{\lambda_{p-1}}{n_1},$$

где λ_{p-1} — постоянная; отсюда заключаем, что

$$A_{0,\,m_2}=0 \text{ при } m_2\neq 0,\quad A_{0,\,0}=\frac{\lambda_{p-1}}{n_1}.$$

Таким образом, получаем

$$S_{p-1}=\frac{\lambda_{p-1}}{n_1}y_1+\sum A_{m_1m_2}\frac{\sin(m_1y_1+m_2y_2+\alpha)}{m_1}+[S_{p-1}],$$

где m_1 и m_2 принимают под знаком суммы все целые значения, такие, что $m_1\neq 0$.

Таким образом, чтобы S_{p-1} имела желаемую форму, достаточно, чтобы

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$$

была периодической функцией по y_2. Однако $[dS_{p-1}/dy_2]$ определена уравнением

$$N\frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]=-\lambda_p-M\frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right]+[K_p],$$

где K_p зависит лишь от $S_1, S_2, \ldots, S_{p-2}$ и будет периодической по y_2.

Кроме того, $[dS_{p-1}/dy_1]$ есть постоянная λ_{p-1}/n_1; далее, dS_1/dy_2 — периодическая функция по y_2, которая *никогда не обращается в нуль*.

Отсюда следует, что $[dS_{p-1}/dy_2]$ можно разложить в ряд по синусам и косинусам кратных y_2.

Затем получаем

$$n_1\frac{dS_p}{dy_1}=2(\Delta S_{p-1})+K_p,$$

откуда видим, что dS_p/dy_1 — периодическая функция по y_1 и y_2.

Таким образом, выбирая за C_1 величину, большую $-\varphi_4$, и выбирая затем другие постоянные $\lambda_3, \lambda_4\ldots$ произвольно, находим для dS/dy_1 и dS/dy_2 ряды по степеням синусов и косинусов кратных y_1 и y_2.

Хотя эти ряды и расходятся, они могут оказаться полезными в некоторых случаях.

Перейдем теперь к случаю, когда

$$C_1=-\varphi_4,$$

который, как мы видели в § 17, соответствует рядам, асимптотически представляющим асимптотические поверхности.

Выражение

$$[F_1]+C_1$$

никогда не бывает отрицательным, но оно обращается в нуль при некотором значении y_2, названном нами η_3 в предыдущем параграфе.

Я предположу здесь, что это значение равно нулю; я могу это сделать, так как это связано только с определенным выбором начала на оси y_2.

Запишем затем $[F_1]+C_1$ в виде тригонометрического ряда:

$$[F_1]+C_1=\sum A_m \sin my_2+\sum B_m \cos my_2.$$

При $y_2=0$ эта функция обращается в нуль вместе со своей производной; так как функция все время положительна, то нуль является ее минимумом. Отсюда вытекает, что выражение

$$\frac{[F_1]+C_1}{\sin^2 \frac{y_2}{2}}$$

разложимо в ряд по синусам и косинусам кратных y_2; это — периодическая функция y_2, никогда не обращающаяся в нуль или бесконечность.

Отсюда следует, что можно записать

$$\frac{\sin \frac{y_2}{2}}{\sqrt{[F_1]+C_1}}=\sum A_m \cos my_2+\sum B_m \sin my_2$$

и, следовательно,

$$\frac{dS_1}{dy_2}=\frac{\sqrt{\frac{2}{N}}\sin\frac{y_2}{2}}{\Sigma A_m \cos my_2+\Sigma B_m \sin my_2}.$$

Мы сможем записать уравнение (7) в следующем виде:

$$\frac{\sqrt{2N}\sin\frac{y_2}{2}}{\Sigma A_m \cos my_2+\Sigma B_m \sin my_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]=-\lambda_p+\Phi_p(y_2), \tag{7'}$$

где Φ_p — известная функция от y_2.

В этих условиях я собираюсь доказать, что

$$\frac{dS_p}{dy_1} \text{ и } \frac{dS_p}{dy_2}$$

являются периодическими функциями y_1 и y_2 с периодом 2π по y_1 и 4π по y_2.

Действительно, предположим, что это доказано при

$$\frac{dS_1}{dy_1},\ \frac{dS_1}{dy_2},\ \frac{dS_2}{dy_1},\ \frac{dS_2}{dy_2},\ \ldots,\ \frac{dS_{p-2}}{dy_1},\ \frac{dS_{p-2}}{dy_2},\ \frac{dS_{p-1}}{dy_1}.$$

Функция dS_{p-1}/dy_1 — периодическая функция y_1 и y_2; с другой стороны, ее среднее значение

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right]=\frac{1}{n_1}\lambda_{p-1}$$

есть независимая от y_2 постоянная. Следовательно, мы можем написать

$$S_{p-1} = \frac{1}{n_1} \lambda_{p-1} y_1 + \theta_{p-1}(y_1, y_2) + \zeta_{p-1}(y_2),$$

где $\theta_{p-1}(y_1, y_2)$ — периодическая функция от y_1 и y_2, а $\xi_{p-1}(y_2)$ — произвольная функция лишь y_2. Затем получаем

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} = \frac{d\theta_{p-1}}{dy_2} + \frac{d\zeta_{p-1}}{dy_2},$$

откуда

$$\frac{d[S_{p-1}]}{dy_2} = \frac{d[\theta_{p-1}]}{dy_2} + \frac{d\zeta_{p-1}}{dy_2}$$

и

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \frac{d[S_{p-1}]}{dy_2} = \frac{d\theta_{p-1}}{dy_2} - \frac{d[\theta_{p-1}]}{dy_2},$$

а отсюда видно, что $dS_{p-1}/dy_2 - d[S_{p-1}]/dy_2$ — периодическая функция от y_1 и от y_2.

Уравнение (7′) показывает, что это справедливо и для $[dS_{p-1}/dy_2]$ и, следовательно, для dS_{p-1}/dy_2 (какова бы ни была постоянная λ_p); из уравнения (5) видно, что это справедливо и для dS_p/dy_1.

Следовательно, это же верно и для функций

$$\frac{dS_p}{dy_1} \text{ и } \frac{dS_p}{dy_2}$$

при любом индексе p.

Однако важно заметить, что если эти функции периодические, этого недостаточно для того, чтобы их можно было разложить в ряд по синусам и косинусам кратных y_1 и $y_2/2$.

Действительно, эти функции не всегда конечны, это зависит от выбора постоянных λ_p; в этом легко убедиться, поскольку уравнение (7′), откуда мы получаем величины

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right],$$

имеет в левой части множитель $\sin\frac{y_2}{2}$. Следовательно, выражение $[dS_{p-1}/dy_2]$ будет содержать $\sin\frac{y_2}{2}$ в знаменателе.

Производные функции S_p могут, следовательно, стать бесконечными, но только при

$$\sin\frac{y_2}{2} = 0 \text{ или } y_2 = 2k\pi.$$

Если значение y_2 отличается от $2k\pi$, эти производные не становятся бесконечными ни при каком значении y_1; следовательно, они могут быть разложены по sin и cos кратных y_1.

Таким образом, мы можем, например, записать

$$\frac{dS_{p-1}}{dy} = \frac{1}{n_1}\lambda_{p-1} + \sum A_m \cos my_1 + \sum B_m \sin my_1,$$

где A_m и B_m — периодические функции y_2, которые могут становиться бесконечными.

Предположим теперь, что постоянные λ_p с *нечетными индексами* все равны нулю; я утверждаю, что

$$\frac{dS_p}{dy_1} \text{ и } \frac{dS_p}{dy_2}$$

не изменяются при замене y_2 на $y_2 + 2\pi$ во всех случаях, когда p четно, и, наоборот, эти две функции изменят знак, не изменяя абсолютной величины, при замене y_2 на $y_2 + 2\pi$ всякий раз, когда индекс p нечетен.

Я предполагаю, что теорема верна для

$$\frac{dS_1}{dy_1},\ \frac{dS_1}{dy_2},\ \frac{dS_2}{dy_1},\ \frac{dS_2}{dy_2},\ \ldots,\ \frac{dS_{p-2}}{dy_1},\ \frac{dS_{p-2}}{dy_2},\ \frac{dS_{p-1}}{dy_1},$$

и намерен доказать, что тогда она в равной мере верна при

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \text{ и } \frac{dS_p}{dy_1}.$$

Если dS_{p-1}/dy_1 умножить на $(-1)^{p-1}$ при замене y_2 на $y_2 + 2\pi$, то же самое произойдет и с

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right].$$

Действительно, мы нашли, что

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_1} = \frac{1}{n_1}\lambda_{p-1} + \sum A_m \cos my_1 + \sum B_m \sin my_1,$$

где A_m и B_m — периодические функции y_2.

Если dS_{p-1}/dy_1 умножить на $(-1)^{p-1}$ при увеличении y_2 на 2π, то и A_m, и B_m, и производные этих функций по y_2 также будут умножены на $(-1)^{p-1}$. Это также будет верно и для разности

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = \sum \frac{dA_m}{dy_2}\frac{\sin my_1}{m} - \sum \frac{dB_m}{dy_2}\frac{\cos my_1}{m}.$$

Нам надо теперь показать, что это верно для

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right].$$

Для этого необходимо исследовать, каким образом K_p зависит от функций S_0, S_1, ..., S_{p-1}. Я намереваюсь установить, что порядок всех членов K_p относительно производных от функций с нечетными индексами

$$S_1,\ S_3,\ S_5,\ \ldots$$

имеет ту же четность, что и p.

В самом деле, полагая в выражении

$$F\left(\frac{dS}{dy_1},\ \frac{dS}{dy_2},\ y_1,\ y_2\right)$$

$$S = S_0 + S_1\sqrt{\mu} + S_2\mu + \ldots,$$

мы находим

$$F = H_0 + H_1\sqrt{\mu} + H_2\mu + \ldots.$$

Если я заменю $\sqrt{\mu}$ на $-\sqrt{\mu}$ и в то же время заменю S_1, S_3, S_5, ... на $-S_1$, $-S_3$, $-S_5$, ..., не изменяя функций с четными индексами, то выражение F не должно измениться.

Следовательно, H_p должно превратиться в $(-1)^p H_p$.

Это доказывает, что порядок всех членов H_p относительно производных S_1, S_3, S_5... должен иметь ту же четность, что и p. Следовательно, как и сказано выше, это должно быть также верно относительно членов K_p, поскольку K_p получается путем удаления из H_p членов, зависящих от S_{p-1} или от S_p.

Установив это, заменим y_2 на $y_2 + 2\pi$; производные S_q не изменятся, если q четно и не превосходит $p-2$; они изменят знак, если q нечетно и не превосходит $p-2$. Следовательно, K_p перейдет в $(-1)^p K_p$.

Вернемся теперь к уравнению (7)

$$N\frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = -\lambda_p - M\frac{dS_2}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] + [K_p]. \qquad (7'')$$

При замене y_2 на $y_2 + 2\pi$

$$[K_p] \text{ заменяется на } (-1)^p [K_p],$$

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] \text{ заменяется на } (-1)^p\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right]$$

и

$$\frac{dS_1}{dy_2} \text{ заменяется на } -\frac{dS_1}{dy_2}.$$

Мы можем даже сказать, что

$$\lambda_p \text{ заменяется на } (-1)^p \lambda_p.$$

Действительно, это верно для четных p, потому что λ_p — не зависящая от y_2 постоянная; это верно и для нечетных p, так как мы предположили, что все λ_p с нечетными индексами равны нулю.

Отсюда следует, что

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] \text{ заменяется на } (-1)^{p-1}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right],$$

и, следовательно,

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \text{ заменяется на } (-1)^{p-1}\frac{dS_{p-1}}{dy_2},$$

что и требовалось доказать.

Я утверждаю теперь, что dS_p/dy_1 заменится на $(-1)^{-p}\,dS_p/dy_1$.

В самом деле, запишем уравнение (5)

$$n_1\frac{dS_p}{dy_1} = 2\Delta S_{p-1} + K_p;$$

величины K_p и ΔS_{p-1} и, следовательно, правая часть уравнения (5) будут умножены на $(-1)^p$ при увеличении y_2 на 2π. Следовательно, то же самое должно произойти с левой частью и с dS_p/dy_1, что и требовалось доказать.

Теперь я докажу, что можно выбрать постоянные λ_p так, что производные функции S_p не станут бесконечными при $y_2 = 2k\pi$.

Предположим, что мы выбрали постоянные $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{p-1}$ так, что

$$\frac{dS_1}{dy_1},\ \frac{dS_1}{dy_2},\ \ldots,\ \frac{dS_{p-2}}{dy_1},\ \frac{dS_{p-2}}{dy_2},\ \frac{dS_{p-1}}{dy_1}$$

остаются конечными, а постоянные λ_q с нечетными индексами равны нулю; я попытаюсь выбрать λ_p так, чтобы dS_{p-1}/dy_2 и dS_p/dy_1 также не обращались в бесконечность. Заодно мы увидим, что λ_p должно равняться нулю, если p нечетно.

Прежде всего ясно, что если производная dS_{p-1}/dy_1 остается конечной, то и выражения

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$$

и

$$\Phi_p(y_2) = [K_p] - M\frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right]$$

останутся конечными.

Вернемся теперь к уравнению (7″). Коэффициент при неизвестной величине $[dS_{p-1}/dy_2]$ обращается в нуль при $y_2 = 2k\pi$; для того чтобы

эта неизвестная величина оставалась конечной, надо, чтобы правая часть также обращалась в нуль и выполнялось равенство

$$\Phi_p(2k\pi) = \lambda_p.$$

Поскольку Φ_p не изменяется, когда y_2 увеличивается на 4π, достаточно будет взять $k = 0$ и $k = 1$ и записать

$$\Phi_p(0) = \Phi_p(2\pi) = \lambda_p. \tag{8}$$

Если p четно, никаких трудностей не возникает, и мы имеем

$$\Phi_p(y_2) = \Phi_p(y_2 + 2\pi)$$

и, следовательно,

$$\Phi_p(0) = \Phi_p(2\pi),$$

так что достаточно положить

$$\lambda_p = \Phi_p(0).$$

Если, напротив, p нечетно, то

$$\Phi_p(y_2) = -\Phi_p(y_2 + 2\pi)$$

и

$$\Phi_p(0) = -\Phi_p(2\pi),$$

так что уравнения (8) могут удовлетворяться лишь в случае

$$\Phi_p(0) = \Phi_p(2\pi) = \lambda_p = 0.$$

Нам, следовательно, надо доказать, что при нечетном p $\Phi_p(0)$ равно нулю.

Пусть, в самом деле,

$$\Phi_p(0) = \alpha,$$

и, следовательно,

$$\Phi_p(2\pi) = -\alpha.$$

Я утверждаю, что α равно нулю.

Мы будем опираться на одну почти очевидную лемму.

Вот формулировка этой леммы.

Пусть φ_1 и φ_2 — две периодические функции с периодом 2π по y_1 и y_2. Известно, что если φ — периодическая функция, например, от y_1, то среднее значение $d\varphi/dy_1$ равно нулю. Следовательно, мы имеем

$$\iint \frac{d\varphi_1}{dy_2} dy_1 dy_2 = \iint \frac{d\varphi_2}{dy_1} dy_1 dy_2 = 0$$

или

$$\iint\left(\frac{d\varphi_1}{dy_2}-\frac{d\varphi_2}{dy_1}\right)dy_1dy_2=0,$$

где интегралы берутся по всем значениям y_1 и y_2 от 0 до 2π.

Для того чтобы лемма выполнялась, необходимо, чтобы функции φ_1 и φ_2 были непрерывны. Но их производные могут не быть непрерывными. Эти производные должны быть только конечными.

Установив это, мы закончим определение функции S_{p-1} уже не посредством уравнения (7″), а посредством следующего уравнения:

$$\frac{\sqrt{2N}\sin\frac{y_2}{2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]}{\Sigma A_m\cos my_2+\Sigma B_m\sin my_2}=-\alpha\cos\frac{y_2}{2}+\Phi_p(y_2). \tag{9}$$

Оно отличается от уравнения (7″) лишь тем, что в нем λ_p заменено на $\alpha\cos\frac{y_2}{2}$.

Это уравнение показывает, прежде всего, что $[dS_{p-1}/dy_2]$ — периодическая функция y_2 с периодом 2π (я напомню, что, по предположению, p нечетно). Далее, эта функция не становится бесконечной при $y_2=2k\pi$, так как правая часть уравнения (9) обращается в нуль при $y_2=0$ и при $y_2=2\pi$.

Затем, положим

$$\zeta_1=\frac{dS_0}{dy_1}+\mu^{\frac{1}{2}}\frac{dS_1}{dy_1}+\mu\frac{dS_2}{dy_1}+\ldots+\mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_1}+\mu^{\frac{p}{2}}\eta,$$

$$\zeta_2=\frac{dS_0}{dy_2}+\mu^{\frac{1}{2}}\frac{dS_1}{dy_2}+\mu\frac{dS_2}{dy_2}+\ldots+\mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2};$$

величина η будет функцией от y_1, y_2 и μ, определяемой уравнением

$$F(\zeta_1,\ \zeta_2,\ y_1,\ y_2)=C. \tag{10}$$

Легко видеть, что ζ_2 полностью определена, поскольку нам теперь полностью известны S_0, S_1, ..., S_{p-1}. Следовательно, из уравнения (10) можно получить η в следующем виде:

$$\eta=\eta_0+\mu^{\frac{1}{2}}\eta_1+\mu\eta_2+\ldots,$$

где η_i — периодические функции y_1 и y_2 с периодом 2π по y_1 и 4π по y_2.

Далее, получаем

$$\frac{d\zeta_1}{dy_2}-\frac{d\zeta_2}{dy_1}=\mu^{\frac{p}{2}}\frac{d\eta}{dy_2}.$$

Нам нужно только η_0; однако мы сразу же видим, что η_0 задается следующим уравнением:

$$n_1\eta_0 = 2\Delta S_{p-1} + K_p, \tag{11}$$

которое отличается от уравнения (5) лишь тем, что неизвестная в нем обозначена η_0.

Это уравнение показывает, что η_0 — периодическая функция y_1; надо найти среднее значение этой функции.

Если мы обратимся к уравнению (9), то увидим, что оно выражает тот факт, что среднее значение правой части в (11) есть $\alpha \cos\frac{y_2}{2}$. Следовательно, имеем

$$[\eta_0] = \frac{\alpha}{n}\cos\frac{y_2}{2}.$$

Величина ζ_2 принимает два различных значения, переставляющихся друг с другом при замене $\sqrt{\mu}$ на $-\sqrt{\mu}$ или же при замене y_2 на $y_2 + 2\pi$.

Я обозначу через φ_3 наибольшее из двух значений ζ_2 и через ψ_2 — наименьшее.

Точно так же ζ_1 принимает два значения; я обозначу через φ_1 то, которое соответствует φ_2, и через ψ_1 то, которое соответствует ψ_2.

Наконец, η принимает два значения; я обозначу через η' то, которое соответствует φ_2, и через η'' то, которое соответствует ψ_2; η_i тоже принимает два значения, которые я аналогично обозначу η_i' и η_i''.

Функция φ_2 периодическая с периодом 2π по y_2; действительно, когда мы увеличиваем y_2 на 2π, два значения ζ_2 сменяют друг друга; следовательно, φ_2, которое всегда равно наибольшему из этих двух значений, не изменяется.

По этой же причине φ_1, ψ_1, ψ_2, η', η'', η_i', η_i'' будут периодическими функциями с периодом 2π по y_2.

Из предыдущих определений следует, что φ_1, φ_2, ψ_1 и ψ_2 — непрерывные функции, хотя производные этих функций так же, как η' и η'', могут быть разрывными.

Следовательно, мы находимся в условиях, когда наша лемма применима, и мы можем записать

$$\mu^{\frac{p}{2}}\iint \frac{d\eta'}{dy_2}\,dy_1dy_2 = \iint\left(\frac{d\varphi_1}{dy_2} - \frac{d\varphi_2}{dy_1}\right)dy_1dy_2 = 0,$$

$$\mu^{\frac{p}{2}}\iint \frac{d\eta''}{dy_2}\,dy_1dy_2 = \iint\left(\frac{d\psi_1}{dy_2} - \frac{d\psi_2}{dy_2}\right)dy_1dy_2 = 0,$$

или же

$$\iint \frac{d(\eta' - \eta'')}{dy_2}\,dy_1dy_2 = 0,$$

или, наконец,

$$\iint \frac{d(\eta_0'-\eta_0'')}{dy_2}\,dy_1dy_2+\iint\left[\frac{d(\eta'-\eta_0')\,d(\eta''-\eta_0'')}{dy_2dy_2}\right]dy_1dy_2=0.$$

Это соотношение должно выполняться при любых μ.

Но когда μ стремится к 0, $\eta'-\eta_0'$ и $\eta''-\eta_0''$ стремятся к 0.

Итак, мы получим

$$\lim\iint \frac{d(\eta_0'-\eta_0'')}{dy_2}\,dy_1dy_2=0 \quad (\text{при } \mu=0). \tag{12}$$

Преобразуем левую часть равенства (12). Прежде всего я замечу, что поскольку p нечетно, η_0 есть функция, которая должна заменяться на $-\eta_0$, когда y_2 заменяется на $y_2+2\pi$. Чтобы убедиться в этом, достаточно обратиться к уравнению (11). Следовательно, мы имеем

$$\eta_0'=-\eta_0''=\pm\eta_0,$$

откуда

$$\iint \frac{d(\eta_0'-\eta_0'')}{dy_2}\,dy_1dy_2=2\iint\frac{d\eta_0'}{dy_2}\,dy_1dy_2=2\iint\frac{d(\pm\eta_0)}{dy_2}\,dy_1dy_2.$$

Остается посмотреть, для каких значений y мы должны положить $\eta_0'=+\eta_0$, а для каких $\eta_0'=-\eta_0$.

Если мы имеем

$$\frac{dS_1}{dy_2}+\mu\frac{dS_3}{dy_2}+\mu^2\frac{dS_5}{dy_2}+\ldots+\mu^{\frac{p-3}{2}}\frac{dS_{p-2}}{dy_2}>0, \tag{13}$$

мы должны в силу наших соглашений взять

$$\varphi_2=\frac{dS_0}{dy_2}+\sqrt{\mu}\,\frac{dS_1}{dy_2}+\mu\frac{dS_2}{dy_2}+\mu\sqrt{\mu}\,\frac{dS_3}{dy_2}+\ldots+\mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$$

и

$$\psi_2=\frac{dS_0}{dy_2}-\sqrt{\mu}\,\frac{dS_1}{dy_2}+\mu\frac{dS_2}{dy_2}-\mu\sqrt{\mu}\,\frac{dS_3}{dy_2}+\ldots+\mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}.$$

Если, напротив, левая часть неравенства (13) отрицательна, мы должны взять

$$\varphi_2=\frac{dS_0}{dy_2}-\sqrt{\mu}\,\frac{dS_1}{dy_2}+\ldots+\mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$$

и

$$\psi_2=\frac{dS_0}{dy_2}+\sqrt{\mu}\,\frac{dS_1}{dy_2}+\ldots+\mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}.$$

Следовательно, все зависит от знака левой части неравенства (13). Приравнивая эту левую часть нулю, получим уравнение

$$\frac{dS_1}{dy_2}+\mu\frac{dS_3}{dy_2}+\ldots=0. \tag{14}$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение, определяющее y_2 как функцию y_1 и μ.

Можно решить это уравнение и записать

$$y_2=\theta(y_1,\ \mu).$$

Заметим лишь, что θ — периодическая функция с периодом 2π по y_1 и эта функция θ тождественно обращается в нуль, если положить $\mu=0$.

Следовательно, если y_2 изменяется от θ до $\theta+2\pi$, мы имеем

$$\eta_0'=+\eta_0,$$

а когда y_2 изменяется от $\theta+2\pi$ до $\theta+4\pi$, имеем

$$\eta_0'=-\eta_0.$$

Наши интегралы должны быть распространены на все значения y_2, заключенные между 0 и 2π. Но поскольку η_0' — функция с периодом 2π, мы имеем

$$\int_0^{2\pi}dy_1\int_0^{2\pi}dy_2\frac{d\eta_0'}{dy_2}=\int_0^{2\pi}dy_1\int_\theta^{\theta+2\pi}dy_2\frac{d\eta_0'}{dy_2}$$

или

$$\iint\frac{d\eta_0'}{dy_2}dy_1dy_2=\int_0^{2\pi}dy_1\int_\theta^{\theta+2\pi}dy_2\frac{d\eta_0}{dy_2}.$$

Когда μ устремится к 0, левая часть должна будет стремиться к 0, и θ будет стремиться к 0, следовательно, будем иметь

$$\lim\iint\frac{d\eta_0'}{dy_2}dy_1dy_2=\int_0^{2\pi}dy_1\int_0^{2\pi}dy_2\frac{d\eta_0}{dy_2}=0,$$

откуда

$$0=\iint\frac{d\eta_0}{dy_2}dy_1dy_2=2\pi\int_0^{2\pi}\frac{d\,[\eta_0]}{dy_2}dy_2=-\pi\frac{a}{n_1}\int_0^{2\pi}\sin\frac{y_2}{2}dy_2=-\frac{4\pi a}{n_1}.$$

Итак имеем

$$a=0,$$

что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что если мы обратим в нуль постоянные λ_p с нечетными индексами и если придадим подходящие значения постоянным λ_p с четными индексами, то функции dS_p/dy_1 и dS_p/dy_2 останутся конечными.

Следовательно, их можно разложить в ряд по синусам и косинусам кратных y_1 и $y_2/2$; если p четно, то в разложение войдут лишь четные кратные $y_2/2$; если же, наоборот, p нечетно, то лишь нечетные кратные $y_2/2$ войдут в разложение.

Тогда в качестве приближенных уравнений асимптотической поверхности мы будем иметь

$$x_1 = \sum_{p=0}^{p=n} \mu^{\frac{p}{2}} \frac{dS_p}{dy_1}, \quad x_2 = \sum_{p=0}^{p=n} \mu^{\frac{p}{2}} \frac{dS_p}{dy_2}. \tag{15}$$

Эти ряды, как мы видели, расходятся, но если остановиться, как мы это делали в уравнении (15), на n-м члене, допущенная ошибка при очень малых μ может быть очень малой, как я это уже доказывал выше.

Мы видели, что величина, обозначенная выше α, равна нулю. Этот основной факт можно доказать иначе.

Положим

$$T = S_1 + \mu S_3 + \mu^2 S_5 + \ldots + \mu^{\frac{p-2}{2}} S_{p-2},$$
$$\xi = \eta_0 + \mu\eta_2 + \mu^2\eta_4 + \ldots .$$

Прежде всего, я утверждаю, что T — периодическая функция от y_1 и y_2.

Действительно, производные dT/dy_1 и dT/dy_2 — периодические функции, следовательно, имеем

$$T = \beta y_1 + \gamma y_2 + T',$$

где β и γ — постоянные, а T' — периодическая функция от y_1 и y_2.

Отсюда заключаем, что

$$\frac{dT}{dy_1} = \beta + \frac{dT'}{dy_1}, \quad \frac{dT}{dy_2} = \gamma + \frac{dT'}{dy_2},$$

где dT'/dy_1 и dT'/dy_2 — тригонометрические ряды, постоянные члены которых равны нулю.

Но поскольку функции S_1, S_3, ..., S_{p-2} имеют нечетные индексы, их производные меняют знак при замене y_2 на $y_2 + 2\pi$. Следовательно, dT/dy_1 и dT/dy_2 меняют знак при увеличении y_2 на 2π. Следовательно, постоянные члены β и γ равны нулю. Итак, $T = T'$ — периодическая функция, не изменяющаяся, когда y_1 увеличивается на 2π, и меняющая знак, когда y_2 увеличивается на 2π.

Таким образом, мы знаем, что ζ_1 и ζ_2 связаны уравнением

$$F(\zeta_1, \zeta_2, y_1, y_2) = C.$$

Отсюда следует, что если два значения ζ_2 совпадают, то и два значения ζ_1 также совпадают.

Запишем, что два значения ζ_2 совпадают; получим

$$\frac{dT}{dy_2} = 0. \tag{16}$$

Это уравнение, впрочем, идентично уравнению (14). Запишем теперь, что два значения ζ_1 совпадают; получим

$$\frac{dT}{dy_1} + \mu^{\frac{p-1}{2}} \xi = 0. \tag{17}$$

Уравнения (16) и (17) должны быть эквивалентны. Кроме того, они должны быть эквивалентны следующему уравнению:

$$y_2 = \theta(y_1, \mu),$$

где θ имеет тот же смысл, что и выше. Предположим, что мы разложили θ в ряд по возрастающим степеням μ; получим

$$y_2 = \mu\theta_1 + \mu^2\theta_2 + \mu^3\theta_3 + \ldots, \tag{18}$$

где θ_1, θ_2, θ_3 — периодические функции y_1.

Предположим, что y_2 связан с y_1 уравнением (18); когда y_1 будет увеличиваться на 2π, y_2 не изменится, и T, которая является периодической функцией, также не изменится; следовательно, получим

$$\int\limits_{y_1=0}^{y_1=2\pi} dT = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{dT}{dy_1} dy_1 + \frac{dT}{dy_2} dy_2\right) = 0,$$

или, заменяя dT/dy_1 и dT/dy_2 их значениями, полученными из уравнений (16) и (17),

$$-\mu^{\frac{p-1}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \xi dy_1 = 0.$$

Если в разложении

$$\xi = \eta_0 + \mu\eta_2 + \mu^2\eta_4 + \ldots$$

заменить y_2 его значением (18), получим

$$\xi = \xi_0 + \mu\xi_1 + \mu^2\xi_2 + \ldots,$$

где ξ_0, ξ_1, ξ_2 и т. д. — периодические функции y_1.

При любом μ должно выполняться

$$\int_0^{2\pi} dy_1 (\xi_0 + \mu\xi_1 + \mu^2\xi_2 + \ldots) = 0$$

и, следовательно,

$$\int_0^{2\pi} \xi_0 dy_1 = 2\pi [\xi_0] = 0.$$

Ясно, что для получения ξ_0 достаточно положить $y_2 = 0$ в η_0; но мы имеем

$$[\eta_0] = \frac{a}{n_1} \cos \frac{y_2}{2}.$$

Итак, получаем

$$\frac{2\pi a}{n_1} = 0$$

или

$$a = 0.$$

§ 19. Третье приближение

Мы попытаемся теперь точно построить наши асимптотические поверхности или, скорее, их пересечение с поверхностью $y_1 = 0$, которая, как мы это видели выше, является поверхностью без контакта.

При нашем способе геометрического представления рассматриваемое периодическое решение представляется некоторой замкнутой траекторной кривой. Эта замкнутая кривая пересекает поверхность $y_1 = 0$ в точке, которую я обозначил на рисунке O' (рис. 7).

Через эту замкнутую кривую проходят две асимптотические поверхности; эти две поверхности пересекают поверхность $y_1 = 0$ по двум кривым, обозначенным на рисунке сплошной линией: $AO'B'$ и $A'O'B$.

Я изобразил пунктирной линией кривую $y_1 = y_2 = 0$.

Вернемся к обозначениям § 16 и рассмотрим ряды s_1 и s_2, входящие в уравнение (4) этого параграфа; пусть, как и в § 16, s_1^p и s_2^p — суммы первых p членов рядов s_1 и s_2. Мы видели, что уравнения

$$x_1 = s_1^p (y_1, y_2), \qquad x_2 = s_2^p (y_1, y_2)$$

представляют поверхности, которые очень мало отличаются от асимптотических. Эти поверхности пересекут поверхность $y_1 = 0$ по кривым, уравнениями которых будут

$$y_1 = 0, \qquad x_1 = s_1^p (0, y_2), \qquad x_2 = s_2^p (0, y_2)$$

и которые представлены на рисунке пунктирно-точечной линией.

В предыдущем параграфе мы научились строить ряды s_1 и s_2; мы видели, что $s_1^p(y_1, y_2)$ и $s_2^p(y_1, y_2)$ — периодические функции с периодом 2π по y_1 и с периодом 4π по y_2.

Отсюда следует, что кривая, изображенная пунктирно-точечной линией, должна быть, как указывает рисунок, замкнутой линией с двойной точкой O.

Первый возникающий здесь вопрос следующий: являются ли замкнутыми кривые, изображенные сплошной линией, т. е. пересечения асимптотических поверхностей с $y_1=0$. Ясно, что это было бы так, если бы ряды s_1 и s_2 были сходящимися. Поскольку кривые, изображенные пунктиром, отличались бы сколь угодно мало от кривых, изображенных сплошной линией, расстояние от некоторой точки на кривой, изображенной сплошной линией, до пунктирной кривой стремилось бы к нулю при бесконечном возрастании p.

Я покажу на простом примере, что это не так. Пусть

$$-F = p + q^2 - 2\mu \sin^2 \frac{y}{2} - \mu\varepsilon \cos x\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ представляет собой периодическую функцию от y с периодом 2π, и где μ и ε — две постоянные, предполагаемые очень маленькими. Я составлю уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dF}{dp} = 1, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{dF}{dq} = 2q,$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dF}{dx} = -\mu\varepsilon \sin x\varphi(y),$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dF}{dy} = \mu \sin y + \mu\varepsilon \cos x\varphi'(y).$$

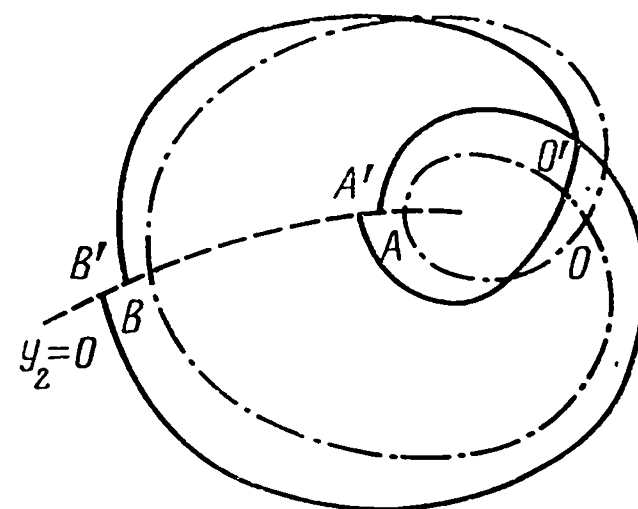


Рис. 7

Мы видим, что p и q будут играть ту же роль, что принадлежала до сих пор x_1 и x_2, а x и y будут играть роль y_1 и y_2; я изменил обозначения лишь для того, чтобы освободиться от индексов.

Предположим сначала, что $\varepsilon = 0$. Наши уравнения допускают тогда периодическое решение, которое записывается в виде

$$x = t, \qquad p = 0, \qquad q = 0, \ y = 0.$$

Характеристические показатели (оставив в стороне два из них, равных нулю, как это всегда имеет место для уравнений динамики) равны $\pm\sqrt{2\mu}$.

Тогда существуют две асимптотические поверхности с уравнениями

$$p = \frac{dS_0}{dx}, \qquad q = \frac{dS_0}{dy}, \qquad S_0 = \mp 2\sqrt{2\mu} \cos \frac{y}{2},$$

откуда

$$p=0, \qquad q=\pm\sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2}.$$

Поскольку характеристические показатели не равны нулю, а равны $\pm\sqrt{2\mu}$ при $\varepsilon=0$, при малых значениях ε будет существовать периодическое решение; этому периодическому решению будут соответствовать две асимптотические поверхности, уравнение которых можно представить в виде

$$p=\frac{dS}{dx}, \qquad q=\frac{dS}{dy},$$

где S — функция от x и y, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{dS}{dx}+\left(\frac{dS}{dy}\right)^2=2\mu\sin^2\frac{y}{2}+\mu\varepsilon\cos x\varphi(y).$$

Так как характеристические показатели не обращаются в нуль при $\varepsilon=0$, то из сказанного в конце § 13 вытекает, что p и q и, следовательно, S разложимы в ряду по возрастающим степеням.

Итак, положим

$$S=S_0+\varepsilon S_1+\varepsilon^2 S_2+\ldots.$$

Выше мы нашли, что

$$S_0=-2\sqrt{2\mu}\cos\frac{y}{2}.$$

Что касается S_1, то оно должно удовлетворять уравнению

$$\frac{dS_1}{dx}+\sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2}\frac{dS_1}{dy}=\mu\cos x\varphi(y).$$

Если обозначить через Σ функцию, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d\Sigma}{dx}+\sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2}\frac{d\Sigma}{dy}=\mu e^{ix}\varphi(y) \quad (i=\sqrt{-1}),$$

то S_1 будет вещественной частью Σ. Но можно удовлетворить последнему уравнению, положив

$$\Sigma=e^{ix}\psi(y);$$

для этого достаточно, чтобы удовлетворялось уравнение

$$i\psi+\sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2}\frac{d\psi}{dy}=\mu\varphi(y).$$

Полученное таким образом уравнение относительно ψ, которое надо интегрировать, линейно. Его общий интеграл записывается так: если $\varphi(y)=0$, то

$$\psi = C\left(\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right)^{\alpha}, \qquad \alpha = -i\sqrt{\frac{2}{\mu}},$$

а если $\varphi(y)$ — произвольно, то

$$\psi = \left(\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right)^{\alpha}\int\sqrt{\frac{\mu}{2}}\,\varphi(y)\left(\sin\frac{y}{2}\right)^{-1}\left(\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right)^{-\alpha}dy.$$

Поскольку ψ должно быть разложимо по целым степеням для малых значений y, легко видеть, какое значение следует придать постоянной интегрирования. Если при $y=0$ $\varphi(y)$ обращается в нуль, интеграл тоже должен обращаться в нуль, так что надо его взять в пределах от 0 до y.

Что теперь надо для того, чтобы кривые $BO'B'$ и $AO'A'$ были замкнутыми? Надо, чтобы функция S оставалась конечной вместе со своими производными при всех значениях y и была бы периодической с периодом 4π по y (что, как мы помним, оправдывалось для функций s_1^p и s_2^p, о которых мы говорили немного раньше). Поскольку это должно иметь место для всех значений ε, это должно иметь место для значений S_1, и поскольку S_1 равно $\cos x$, умноженному на мнимую часть ψ, это должно иметь место и для значений ψ.

Следовательно, для значений y, близких к 2π, ψ должно разлагаться в ряд по целым степеням $y-2\pi$. Но дело обстоит не так для $\left(\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right)^{\alpha}$. Следовательно, интеграл

$$J = \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{2}}\,\varphi(y)\left(\sin\frac{y}{2}\right)^{-1}\left(\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right)^{-\alpha}dy$$

должен равняться нулю. Вычислим этот интеграл, предположив, что $\varphi(y)=\sin(y)$. Положим $\operatorname{tg}\frac{y}{4}=t$, получим

$$J = 4\sqrt{2\mu}\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{-\alpha}(1-t^2)\,dt}{(1+t^2)^2}.$$

Проинтегрируем по частям, замечая, что $(1-t^2)/(1+t^2)^2$ есть производная от $t/(1+t^2)$; получим

$$J = 4\alpha\sqrt{2\mu}\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{-\alpha}dt}{1+t^2}.$$

Положим $t^2 = u$, получим

$$J = 2\alpha\sqrt{2\mu}\int\limits_0^\infty \frac{u^{-\frac{\alpha+1}{2}}du}{1+u} = \frac{2\pi\alpha\sqrt{2\mu}}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}} = \frac{-8\pi i}{e^{\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}}} + e^{\frac{-\pi}{\sqrt{2\mu}}}}.$$

Следовательно, J не равен нулю; значит кривые $BO'B'$, $AO'A'$ не замкнутые; таким образом, ряды s_1 и s_2 не сходятся, равно как и ряды, определенные в § 14 и 18, на что я уже указывал в этих параграфах.

Расстояние между точками B и B', таким образом, не равно нулю; но оно обладает следующим свойством. Не только BB' стремится к нулю при $\mu \to 0$, но и отношение $BB'/\mu^{\frac{p}{2}}$ также стремится к нулю при любом p.

Действительно, для пунктирной кривой имеем уравнения

$$y_1 = 0, \quad x_1 = s_1^p(0, y_2), \quad x_2 = s_2^p(0, y_2)$$

и для кривой, изображенной сплошной чертой, уравнения

$$y_1 = 0, \qquad x_1 = f_1(0, y_2), \qquad x_2 = f_2(0, y_2).$$

В силу того, что мы видели выше, ряды s_1 и s_2 асимптотически представляют функции f_1 и f_2, другими словами, имеем

$$\lim \frac{f_1 - s_1^p}{\mu^{\frac{p}{2}}} = \lim \frac{f_2 - s_2^p}{\mu^{\frac{p}{2}}} = 0 \qquad (\text{при } \mu = 0).$$

Следовательно, отношение расстояния от точки B до пунктирной кривой к $\mu^{p/2}$ будет стремиться к нулю, так же как и отношение расстояния от точки B' до этой кривой к $\mu^{p/2}$. Итак, имеем

$$\lim \frac{BB'}{\mu^{\frac{p}{2}}} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Другими словами, если рассматривать μ как величину бесконечно малую первого порядка, расстояние BB', не становясь нулем, есть бесконечно малая величина бесконечного порядка. Точно так же функция $e^{-1/\mu}$ есть бесконечно малая бесконечного порядка, но не равная нулю.

В частном примере, который мы рассмотрели выше, расстояние BB' того же порядка малости, что и интеграл J, т. е. что и функция $e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}}}$.

Второй вопрос, который следует изучить, таков: пересекаются ли продолжения кривых $O'B$ и $O'B'$? Если это действительно так, то траектория,

которая пройдет через точку пересечения, будет принадлежать одновременно двум полам асимптотической поверхности. Это будет *дважды асимптотическая* траектория. Пусть C — замкнутая траектория, проходящая через точку O' и представляющая периодическое решение. Дважды асимптотическая траектория очень мало отличается от C, если t отрицательно и очень велико, она от нее асимптотически удаляется, сначала отходя намного, а затем снова асимптотически приближается таким образом, что мало отличается от C, когда t положительно и очень велико.

Я намерен установить, что существует бесконечное число дважды асимптотических траекторий.

Я начну с замечания, что кривая $O'B$, как бы далеко ее ни продолжали, никогда не сможет самопересечься, т. е. эта кривая $O'B$ при продолжении не имеет двойной точки. Действительно, в силу определения этой кривой, точки, предшествующие различным точкам $O'B$, сами лежат на кривой $O'B$, так что кривая, предшествующая кривой $O'B$, есть часть этой кривой. Точно так же вторая, третья и т. д. предшествующие кривой $O'B$ являются все более мелкими частями этой кривой, ограниченными точкой O' с одной стороны и точкой D, все более приближающейся к O', с другой.

Если бы кривая $O'B$ имела двойную точку, то и все ее предшествующие тоже имели бы двойные точки и, следовательно, любая дуга $O'D$, являющаяся частью $O'B$, как бы мала она ни была, имела бы двойную точку.

Однако положения, изложенные в § 13, позволяют нам построить часть $O'B$, соседнюю с O', и констатировать, что эта часть кривой не имеет двойной точки. Следовательно, это верно и для всей кривой, сколько бы мы ее ни продолжали.

В силу определения двух пол асимптотической поверхности и кривых $BO'A'$, $B'O'A$, одна из этих кривых (например, кривая $BO'A'$) такова, что n-я предшествующая какой-либо точки этой кривой будет сколь угодно близка к O', когда n увеличивается, а для другой кривой $B'O'A$ n-я последующая будет сколь угодно близка к O'. То, что мы только что сказали, применимо, следовательно, и к кривой, если только заменить повсюду слово «предшествующая» на «последующая». Следовательно, кривая $O'B'$, как бы далеко мы ее ни продолжали, не самопересечется и ясно, что это верно и для кривых $O'A$ и $O'A'$.

Я говорю теперь, что кривые $O'B$ и $O'B'$ имеют конечную кривизну; я хочу сказать, что она не возрастает бесконечно при $\mu \to 0$.

Действительно, мы видели, что не только ряды s_1 и s_2 представляют асимптотические функции f_1 и f_2, но и ряды d^2s_1/dy_2^2 и d^2s_2/dy_2^2 асимптотически представляют d^2f_1/dy_2^2 и d^2f_2/dy_2^2.

Отсюда заключаем, что если рассматривать μ как величину бесконечно малую, то кривизна кривой, изображенной сплошной линией, в точке B будет бесконечно мало отличаться от кривизны пунктирной кривой в наиболее близкой точке; однако кривизна этой последней конечна, следовательно, такова же и кривизна кривой, изображенной сплошной линией.

Пусть теперь B_1 — последующая для точки B, а B'_1 — последующая для точки B'. Расстояние BB_1 имеет тот же порядок величины, что и $\sqrt{\mu}$, таков же порядок расстояния $B'B'_1$; следовательно, дуги BB_1 и $B'B'_1$ очень малы, если μ очень мало и их кривизна конечна; с другой стороны, расстояния BB' и $B_1B'_1$, так же как и отношения BB'/BB_1, $BB'/B'B'_1$, стремятся к нулю при $\mu \to 0$; наконец, существует положительный интегральный инвариант.

Итак, мы находимся в условиях теоремы III § 8. Из этого мы заключаем, что дуги BB_1 и $B'B'_1$ пересекаются, т. е. что кривая $O'B'$ пересекает продолженную кривую $O'B$ и, следовательно, существует по меньшей мере одна дважды асимптотическая траектория.

Я говорю теперь, что их существует по меньшей мере две. Действительно, чертеж был построен так, чтобы точки B и B' были на кривой

$$y_1 = y_2 = 0.$$

Но начало y_2 оставалось произвольным; я могу предположить, что его выбирали так, чтобы в точке пересечения двух кривых $O'B$ и $O'B'$ выполнялось условие $y_2 = 0$. В этом случае точки B и B' совпадают. Следовательно, то же должно происходить и с их последующими B_1 и B'_1. Дуги BB_1 и $B'B'_1$ тогда имеют одни и те же концы, но этого не достаточно для того, чтобы удовлетворялась теорема III, которую я только что применял (действительно, чтобы удовлетворить условиям этой теоремы, надо, чтобы площадь, ограниченная этими дугами, не была выпуклой), надо еще, чтобы они пересекались в другой точке N.

Через эту точку пройдет дважды асимптотическая траектория, не совпадающая с той, которая проходит через B. Следовательно, имеются по меньшей мере две дважды асимптотические траектории.

Я предполагаю все время, что точки B и B' совпадают. Пусть BMN — часть кривой $O'B$, заключенная между точками B и N; пусть также BPN — часть кривой $O'B'$, заключенная между точкой $B = B'$ и точкой N. Эти две дуги BMN и BPN будут ограничивать некоторую площадь, которую я обозначу α.

Мы видели, что в частном случае задачи трех тел, который нас интересует, можно применить теорему I из § 8. Следовательно, будут существовать траектории, которые бесконечное число раз пересекут площадь α.

Следовательно, среди последующих площади α найдется бесконечное число имеющих общие части с α.

Если рассматривать замкнутую кривую $BMNPB$, ограничивающую площадь α, и последующие этой кривой, найдется бесконечное число этих последующих, которые пересекут кривую $BMNPB$. Как это может произойти?

Дуга BMN не может пересечь ни одну из своих последующих, поскольку дуга BMN и ее последующие принадлежат кривой $O'B$, а кривая $O'B$ не может самопересечься.

По той же причине дуга BPN не может пересечь ни одну из своих последующих.

Поэтому необходимо, чтобы дуга BMN пересекала одну из последующих BPN или дуга BPN пересекала одну из последующих BMN (при наших предположениях имеет место как раз второй случай). Как в том, так и в другом случае кривая $O'B$ или ее продолжение пересечет кривую $O'B'$ или ее продолжение.

Следовательно, эти две кривые пересекутся в бесконечном числе точек и бесконечное число этих точек пересечения окажется на дугах BMN или BPN. Через эти точки пересечения пройдет бесконечное число дважды асимптотических траекторий.

Точно так же можно было бы показать, что асимптотическая поверхность, которая пересекает поверхность $y_1=0$ по кривой $O'A$, содержит бесконечное число дважды асимптотических траекторий.

Глава III

РАЗЛИЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

§ 20. Периодические решения второго рода

В предыдущей главе и, в частности, в § 17 и 18, мы построили ряды, предполагая, что мы придаем C_4 значение то большее, то равное $-\varphi_4$.

Предположим теперь, что мы придали C_1 значение $<-\varphi_4$. Тогда

$$x_2^1 = \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}$$

не всегда вещественно. Предположим, например, что для выбранного значения $C_1 x_2^1$ остается вещественным, когда y_2 изменяется от η_5 до η_6. Я буду рассматривать значение η_7 величины y_2, заключенное между η_5 и η_6:

$$\eta_5 < \eta_7 < \eta_6$$

и постараюсь определить x_i^k для значений y_2, заключенных между η_5 и η_7.

Прежде всего я замечу, что x_2^1 принимает два значения, равных, но имеющих противоположные знаки, по причине двойного знака радикала; выберем сначала, например, для этого радикала знак плюс.

Предположим, что мы последовательно вычислили

$$x_1^1,\ x_1^2,\ \ldots,\ x_1^{k-2},$$

$$x_2^1,\ x_2^2,\ \ldots,\ x_2^{k-2}.$$

Уравнение (7) § 18 нам дает

$$x_1^2,\quad [x_2^{k-1}] = \Theta(y_2) + C_{k-1},$$

где $\Theta(y_2)$ — полностью известная функция от y_2, а C_{k-1} — постоянная.

Мы определим эту постоянную условием

$$\Theta(\eta_5) + C_{k-1} = 0.$$

Тогда, хотя x_2^1 обращается в нуль при $y_2=\eta_5$, функция

$$[x_2^{k-1}]=\frac{\Theta(y_2)-\Theta(\eta_5)}{x_2^1}$$

остается конечной при $y_2=\eta_5$.

Таким образом мы полностью определим функции x_i^k при $\eta_5<y_2<\eta_7$ и обозначим через $x_{0,i}^k$ функции y_2, определенные таким образом.

Предположим, что мы снова проводим вычисления, выбрав перед радикалом знак минус. Для функции x_i^k найдем новые значения, которые я обозначу $x_{1,i}^k$ и которые будут к тому же аналитическим продолжением первых.

Представим себе затем, что мы заменяем C_1 новой постоянной C_1', очень близкой к ней.

Тогда радикал

$$\sqrt{\frac{2}{N}([F_1]+C_1')}$$

будет вещественным, когда y_2 будет заключен между η_7 и некоторой величиной η_8, очень близкой к η_6.

Теперь будем изложенным здесь способом вычислять функции x_i^k для значений y_2, заключенных между η_7 и η_8, вначале полагая

$$x_2^1=+\sqrt{\frac{2}{N}([F_1]+C_1')}$$

(мы обозначим через $x_{2,i}^k$ вычисленные таким образом функции), а затем полагая

$$x_2^1=-\sqrt{\frac{2}{N}([F_1]+C_1')}$$

(назовем $x_{3,i}^k$ функции, вычисленные таким образом).

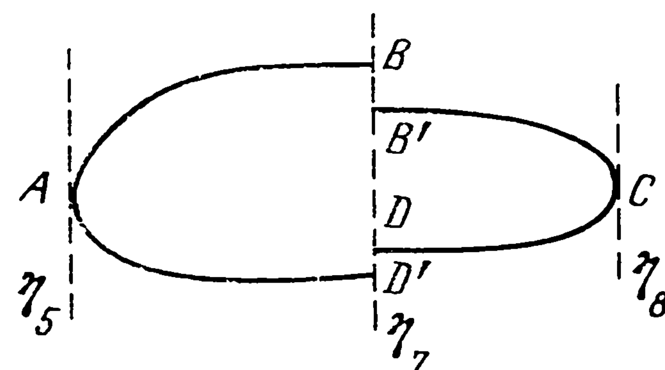


Рис. 8

Затем построим четыре ветви кривой:

1. $y_1=0,\quad x_1=\varphi_{0,1}(y_2),\quad x_2=\varphi_{0,2}(y_2)$, которую продолжим от $y_2=\eta_5$ до $y_2=\eta_7$.

2. $y_1=0,\quad x_1=\varphi_{1,1}(y_2),\quad x_2=\varphi_{1,2}(y_2)$, которую продолжим также от $y_2=\eta_5$ до $y_2=\eta_7$.

3. $y_2=0,\quad x_1=\varphi_{2,1}(y_2),\quad x_2=\varphi_{2,2}(y_2)$, которую продолжим от $y_2=\eta_7$ до $y_2=\eta_8$.

4. $y_1=0,\quad x_1=\varphi_{3,1}(y_2),\quad x_2=\varphi_{3,2}(y_2)$, которую продолжим от $y_2=\eta_7$ до $y_2=\eta_8$.

В этих формулах мы положили

$$\varphi_{p,q}(y_2)=x_{p,q}^0+x_{p,q}^1\sqrt{\mu}+\ldots+x_{p\ q}^k\mu^{k/2}.$$

Первая и вторая из этих кривых сопрягаются друг с другом и будут касаться кривой $y_2 = \eta_5$ в одной и той же точке.

Третья и четвертая кривые также сопрягаются друг с другом и будут касаться в одной и той же точке кривой $y_2 = \eta_5$.

Это и видно из рис. 8, где три пунктирные дуги изображают три кривые

$$y_2 = \eta_5, \ \eta_7, \ \eta_8,$$

где дуга AB изображает первую из наших четырех ветвей кривой, дуга AD' — вторую, дуга $B'C$ — третью и дуга DC — четвертую.

Мы будем рассматривать C_1 как данную, но C_1' оставалась до сих пор произвольной.

Определим C_1' условием, что первая и третья кривые сопрягаются друг с другом и точки B и B' совпадают, а это аналитически выражается условиями

$$\varphi_{0,1}(\eta_7) = \varphi_{2,1}(\eta_7), \quad \varphi_{0,2}(\eta_7) = \varphi_{2,2}(\eta_7). \tag{1}$$

Эти два уравнения, впрочем, не являются различными и сводятся к одному.

Опираясь на теорему III § 8, мы могли бы доказать, что если C_1' определено уравнениями (1), уравнения

$$\varphi_{1,1}(\eta_7) = \varphi_{3,1}(\eta_7), \quad \varphi_{1,2}(\eta_7) = \varphi_{3,2}(\eta_7) \tag{1'}$$

будут также удовлетворяться с точностью до величины порядка $\mu^{\frac{k+1}{2}}$; иными словами, вторая и четвертая кривые сопрягаются с точностью до величин этого порядка, или же расстояние DD' — величина бесконечно малая того же порядка, что и $\mu^{\frac{k+1}{2}}$.

Но я должен здесь сделать то же замечание, что и выше: ряды, к которым мы пришли таким образом, не сходятся, хотя они и могут оказать нам некоторую услугу, если обращаться с ними осторожно.

Следовательно, существуют области, где, по крайней мере некоторое время, y_2 (если предполагать, что $n_2 = 0$) или $n_2 y_1 - n_1 y_2$ (в общем случае) сохраняют конечные значения. Именно этот факт выражают обычно астрономы, говоря, что имеет место либрация. Возникает вопрос, не испещрены ли эти области либрации периодическими решениями.

В наличии периодических решений можно убедиться с помощью следующих рассуждений.

Запишем уравнения

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \mu x_1^2, \\ x_2 &= x_2^0 + \sqrt{\mu} \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)} + \mu u_2^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Эти уравнения с точностью до величин порядка μ являются уравнениями поверхностей, которые мы построили (см. рис. 8); следовательно, они приближенно удовлетворяют уравнениям (3) § 17. Что касается u_2^2, то это функция y_1 и y_2, отличающаяся от x_2^2 лишь такой функцией от y_2, что

$$\frac{du_2^2}{dy_1}=\frac{dx_2^2}{dy_1}.$$

Эта функция u_2^2 должна всегда оставаться конечной.

Я собираюсь так видоизменить функцию F, которая входит в наши дифференциальные уравнения, чтобы эти уравнения (2) *в точности* удовлетворяли уравнениям (3) § 17.

Таким образом, я ищу функцию F^* такую, что уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}&=\frac{dF^*}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt}&=\frac{dF^*}{dy_2}, \\ \frac{dy_1}{dt}&=-\frac{dF^*}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt}&=-\frac{dF^*}{dx_2} \end{aligned} \tag{3}$$

допускают поверхности траекторий, представляемые как раз этими уравнениями (2).

Вот как мы определим эту функцию F^*.

Заметим сначала, что x_1^0 и x_2^0 определены системой двух уравнений

$$F_0(x_1^0,\ x_2^0)=C, \qquad \frac{dF_0}{dx_2^0}=0.$$

Из этих уравнений можно получить x_1^0 и x_2^0 как функции от C. Отныне мы будем, таким образом, считать x_1^0 и x_2^0 известными функциями C.

С другой стороны, $[F_1]$ — функция от y_2, x_1^0 и x_2^0, что позволяет нам ее рассматривать как известную функцию от y_2 и от C.

Следовательно, уравнения (2) дадут нам x_1 и x_2 в функции от y_1, y_2, C и C_1.

Заметим, что если x_1 и x_2 определены этими уравнениями, то

$$x_1dy_1+x_2dy_2=dS$$

есть точный дифференциал, так что

$$\frac{dx_1^2}{dy_2}=\frac{du_2^2}{dy_1}.$$

Разрешим теперь уравнения (2) относительно C и C_1; получим

$$C=F^*(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2),$$

$$C_1=\Phi^*(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2).$$

Функция F^*, таким образом, определена и, используя обозначение Якоби, имеем

$$[F^*, \Phi^*] = 0;$$

это означает, что

$$\Phi^* = \text{const}$$

есть интеграл уравнений (3).

Наиболее общее решение этих уравнений (3) записывается теперь в виде

$$\frac{dS}{dy_1} = x_1, \quad \frac{dS}{dy_2} = x_2, \quad \frac{dS}{dC} = C' + t, \quad \frac{dS}{dC_1} = C_1', \qquad (\alpha)$$

где C' и C_1' — две новые постоянные интегрирования.

Попытаемся эффективно построить F^* или по меньшей мере отдать себе отчет в порядке величины разности

$$F - F^*.$$

Но x_1^2 определено следующим условием:

$$F(x_1^0 + \mu x_1^2, \quad x_2^0 + \sqrt{\mu}\, x_2^1) - C$$

и должно быть величиной того же порядка, что $\mu\sqrt{\mu}$ (ср. § 17).

Следовательно, поскольку dF_0/dx_2^0 равно нулю, функция

$$F(x_1^0 + \mu x_1^2, \quad x_2^0 + \sqrt{\mu}\, x_2^1 + \mu u_2^2) - C$$

будет также того же порядка, что и $\mu\sqrt{\mu}$, какова бы ни была функция u_2^2.

С другой стороны, имеем тождество

$$F^*(x_1^0 + \mu x_1^2, \quad x_2^0 + \sqrt{\mu}\, x_2^1 + \mu u_2^2) = 0.$$

Следовательно, разность

$$F - F_0,$$

рассматриваемая как функция μ, C, C_1, y_1 и y_2, есть величина порядка $\mu\sqrt{\mu}$.

Положим теперь

$$\xi_2\sqrt{\mu} = x_2 - x_2^0.$$

Из двух уравнений (1) легко получаем C и C_1 как функции от x_1, ξ_2, y_1, y_2 и μ, а тогда нетрудно усмотреть, что C и C_1 могут быть разложены по положительным степеням $\sqrt{\mu}$, причем коэффициенты будут конечными функциями от x_1, ξ_2, y_1 и y_2.

Мы только что видели, что $F - F^*$ есть функция от μ, y_1, y_2, C и C_1 и что ее разложение по степеням μ начинается с члена $\mu\sqrt{\mu}$; если заме-

нить в этом разложении C и C_1 их значениями как функциями от μ, x_1, ξ_2, y_1 и y_2, мы увидим, что эта разность $F-F^*$ есть функция, разложенная по степеням μ, причем коэффициенты зависят от x_1, ξ_2, y_1 и y_2 и разложение начинается с члена $\mu\sqrt{\mu}$.

Вследствие этого функция

$$\frac{F-F^*}{\mu\sqrt{\mu}}=F'(\mu,\ x_1,\ \xi_2,\ y_1,\ y_2)$$

не становится бесконечной при $\mu=0$.

С помощью замены переменных, которую мы только что произвели, уравнения (3) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}&=\frac{dF^*}{dy_1}, & \frac{dy_1}{dt}&=-\frac{dF^*}{dx_1},\\ \frac{d\xi_2}{dt}&=\frac{dF^*}{\sqrt{\mu}\,dy_2}, & \frac{dy_2}{dt}&=-\frac{dF^*}{\sqrt{\mu}\,d\xi_2}. \end{aligned} \tag{3'}$$

Точно так же заданные уравнения

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i},\qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i}$$

должны свестись к

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}&=\frac{dF}{dy_1}, & \frac{dy_1}{dt}&=-\frac{dF}{dx_1},\\ \frac{d\xi_2}{dt}&=\frac{dF}{\sqrt{\mu}\,dy_2}, & \frac{dy_2}{dt}&=-\frac{dF}{\sqrt{\mu}\,d\xi_2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Кроме того, мы построим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}&=\frac{d}{dy_1}(F^*+\varepsilon F'), & \frac{dy_1}{dt}&=-\frac{d}{dx_1}(F^*+\varepsilon F'),\\ \frac{d\xi_2}{dt}&=\frac{d}{\sqrt{\mu}\,dy_2}(F^*+\varepsilon F'), & \frac{dy_2}{dt}&=-\frac{d}{\sqrt{\mu}\,d\xi_2}(F^*+\varepsilon F'), \end{aligned} \tag{5}$$

которые сводятся к уравнениям (3) при $\varepsilon=0$ и к уравнениям (4) при $\varepsilon=\mu\sqrt{\mu}$.

В силу того, что мы видели выше, уравнения (3) и, следовательно, уравнения (3'), могут быть точно проинтегрированы; общее решение этих уравнений дается уравнениями (α).

Если мы исследуем это общее решение и попытаемся построить его, применяя тот же способ геометрического представления, что и в предыдущем параграфе, то увидим, что существует бесконечное число замкнутых траекторных поверхностей.

Эти поверхности, уравнение которых имеет вид

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_2^0+\sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1]+C_1)}+\mu u_2^2}{x_1^0+\mu x_1^2}, \tag{6}$$

мало отличаются от поверхностей, которые мы построили в § 17 и которые имели уравнение

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_2^0+\sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1]+C_1)}}{x_1^0}. \tag{7}$$

Они имеют ту же общую форму, что и поверхности, определяемые уравнением (7). Таким образом, если мы сделаем те же предположения, что и в § 17 по поводу максимумов и минимумов $[F_1]$, две из наших поверхностей (6) будут замкнутыми поверхностями с двойной кривой; это будут те поверхности, которые соответствуют значениям $-\varphi_2$ и $-\varphi_4$ постоянной C_1. Другие состоят из одной или двух замкнутых пол.

Замкнутая поверхность с двойной кривой будет для наших уравнений (3′) асимптотической поверхностью, и она разделит пространство на три области, как мы ранее видели.

Среди этих областей я выделяю область R_2, которая заключена между двумя полами и является областью либрации, и намерен доказать, что в этой области можно провести бесконечно много замкнутых траекторий, соответствующих периодическим решениям.

Действительно, вернемся к уравнениям (α), которые нам дают общее решение уравнений (3) и (3′). Исходя из вида уравнений (2), мы можем написать, что

$$S=ay_1+by_2+\Theta(y_1,\ y_2)+\sqrt{\frac{2\mu}{N}}\int\sqrt{([F_1]+C_1)}\,dy_2,$$

где a и b — функции только от C и C_1, а $\Theta(y_1, y_2)$ — вещественная функция, периодическая по y_1 и y_2.

Отсюда получаем

$$C_1'=\frac{dS}{dC_1}=\frac{da}{dC_1}y_1+\frac{db}{dC_1}y_2+\frac{d\Theta}{dC_1}+\sqrt{\frac{\mu}{2N}}\int\frac{dy_2}{\sqrt{([F_1]+C_1)}}.$$

Мы дадим C_1 определенное значение, которое должно быть меньше чем $-\varphi_4$, поскольку мы предположили, что находимся в области R_2.

Замкнутая поверхность, которая соответствует этому значению C_1, имеет ту же связность, что и тор, и мы можем совершить обход этой поверхности двумя различными способами:

1) рассматривая y_2 как постоянную;

2) рассматривая y_1 как постоянную.

Если мы будем совершать обход поверхности, рассматривая y_2 как постоянную, y_1 увеличится на 2π и dS/dC_1 увеличится на

$$2\pi \frac{da}{dC_1}.$$

Если мы будем совершать обход поверхности, рассматривая y_1 как постоянную, y_2 вернется к прежнему значению, но интеграл

$$\int \frac{dy_2}{\sqrt{([F_1]+C_1)}}$$

увеличится на некоторый период v, определяемый следующим образом.

Предположим, что значения y_2, для которых радикал $\sqrt{([F_1]+C_1)}$ веществен, заключены между η_5 и η_6, тогда получим

$$v = 2\int\limits_{\eta_5}^{\eta_6} \frac{dy_2}{\sqrt{([F_1]+C_1}}.$$

При увеличении нашего интеграла на v величина dS/dC_1 увеличится на

$$v\sqrt{\frac{\mu}{2N}}.$$

Следовательно, для того чтобы решение, соответствующее этому значению C_1, было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы две величины

$$2\pi \frac{da}{dC_1} \quad \text{и} \quad v\sqrt{\frac{\mu}{2N}}$$

были соизмеримы между собой.

Очевидно, это условие выполняется для бесконечного числа значений C_1'; наша область R_2, следовательно, содержит бесконечное число замкнутых траекторий, представляющих периодические решения.

Так, если K — некоторое рациональное число, то уравнение

$$2\pi \frac{da}{dC_1} = Kv\sqrt{\frac{\mu}{2N}} \tag{8}$$

(содержащее C_1, поскольку da/dC_1 и v — функции от C_1) нам дает значение C, соответствующее периодическому решению.

Для исследования этого уравнения, мне надо установить, что собой представляет da/dC_1.

Для этого нам достаточно вспомнить, что

$$a = x_1^0 + \mu\,[x_1^2]$$

и что

$$F_0(x_1^0 + \mu x_1^2,\ x_2^0 + \sqrt{\mu}\, x_2^1) + \mu F_1(x_1^0,\ x_2^0,\ y_1,\ y_2)$$

должно сводиться к C с точностью до величины порядка $\mu\sqrt{\mu}$. Отсюда заключаем, что

$$-n_1 x_1^2 - \frac{N}{2}(x_2^1)^2 + F_1(x_1^0,\ x_2^0,\ y_1,\ y_2) = 0,$$

откуда

$$-n_1[x_1^2] - C_1 - [F_1] + [F_1] = 0$$

и

$$\frac{da}{dC_1} = -\frac{\mu}{n_1}.$$

Следовательно, da/dC_1 — постоянная, не зависящая от C_1, так что уравнение (8) может быть записано в виде

$$\frac{v}{\sqrt{\mu}} = \text{const}. \tag{8'}$$

Для исследования этого нового уравнения надо проследить, как изменяется v, когда C_1 изменяется от $-\varphi_4$ до $-\varphi_1$.

При $C_1 = -\varphi_4$ v бесконечно; если C_1 изменяется от $-\varphi_4$ до $-\varphi_2$, v убывает до некоторого минимума, а затем возрастает снова до бесконечности.

При $C_1 < -\varphi_2$ v может допускать два значения, соответствующие двум полам поверхности, которые можно рассматривать по отдельности (ср. рис. 7).

Первая пола поверхности остается вещественной, когда C_1 заключено между $-\varphi_2$ и $-\varphi_3$; соответствующее значение убывает от бесконечности до некоторого минимума при убывании C_1 от $-\varphi_2$ до $-\varphi_3$.

Вторая пола поверхности остается вещественной, когда C_1 заключено между $-\varphi_2$ и $-\varphi_1$; соответствующее значение v убывает от бесконечности до некоторого минимума, когда C_1 убывает от $-\varphi_2$ до $-\varphi_1$.

Таким образом, v допускает по меньшей мере три минимума и всегда остается больше некоторого положительного предела.

Итак, если мы рассматриваем уравнение (8′) как определяющее C_1 в виде функции от μ, C_1 будет непрерывной функцией μ, но мы можем взять μ достаточно малым, чтобы это уравнение не имело ни одного корня.

Таким образом, несомненно существует бесконечное число периодических решений; но когда мы уменьшаем μ, все эти решения исчезают одно за другим.

Отсюда следует, что уравнения (5) имеют при $\varepsilon = 0$ бесконечное число периодических решений; принципы главы III (первой части) нам позволяют утверждать, что и для достаточно малых ε имеется бесконечное число

периодических решений. Поскольку μ очень мало, представляется весьма вероятным, что найдется бесконечное число периодических решений и для $\varepsilon=\mu\sqrt{\mu}$, т. е. для уравнений (4), которые получены из предложенных уравнений очень простой заменой переменных.

Вследствие этого, если мы вернемся к этим исходным уравнениям, то увидим, что в *области либрации* R_2 *имеется бесконечное число замкнутых траекторий, представляющих периодические решения.* Впрочем, мы сейчас это установим строго совсем иным способом.

Если непрерывным образом уменьшать μ и следить за одной из замкнутых траекторий, то мы увидим, что она также непрерывным образом будет деформироваться и затем исчезнет при некотором значении μ. Так, при $\mu=0$ все периодические решения из области R_2 исчезнут одно за другим. Периодические решения, изученные в главе III (первая часть), вели себя иначе, и они сохранялись при $\mu=0$.

Можно доказать, что в окрестности замкнутой траектории, представляющей периодическое решение, как устойчивое, так и неустойчивое, проходит бесконечное число других замкнутых траекторий. Этого недостаточно, строго говоря, для того, чтобы заключить, что через всякую область пространства, как бы мала она ни была, проходит бесконечно много замкнутых траекторий*, но этого достаточно, чтобы придать такому предположению высокую степень правдоподобия.

Как я уже сказал, данный выше набросок недостаточен, чтобы строго установить существование периодических решений второго рода. Вот как мы это докажем.

Снова возьмем наши дифференциальные уравнения

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i}$$

и рассмотрим периодическое решение первого рода с периодом T. Когда t увеличится на T, y_1 и y_2 увеличатся на n_1T и n_2T; я предположу, как и выше,

$$n_1T=2\pi, \quad n_2=0.$$

Тогда из уравнения

$$F=C$$

мы можем получить x_2 как функцию x_1, y_1 и y_2; заменяя x_2 полученным таким образом значением, найдем

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dy_1}{dt}=-\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt}=-\frac{dF}{dx_2},$$

---

* Действительно, из недавних работ Кантора мы узнали, что (используя его терминологию) множество может быть совершенным, не будучи непрерывным.

причем правые части этих уравнений можно рассматривать как известные функции x_1, y_1 и y_2. Наконец, освобождаясь от dt, получаем

$$\frac{dx_1}{dy_1}=X, \quad \frac{dy_2}{dy_1}=Y, \tag{9}$$

где X и Y — известные периодические функции от x_1, y_1 и y_2, периодические по y_1 с периодом 2π.

Пусть

$$x_1=\varphi_1(y_1), \quad y_2=\varphi_2(y_1)$$

— рассматриваемое периодическое решение, которое будет иметь период 2π по y_1; я предполагаю, что это периодическое решение будет тем, которое мы определили выше и которое было приближенно представлено на рисунке из § 17 замкнутой изолированной кривой поверхности $C_1=-\varphi_3$. Следовательно, это будет *устойчивое* периодическое решение, оно будет иметь два характеристических показателя α и $-\alpha$, равных друг другу по абсолютной величине, но с противоположными знаками; квадрат их будет вещественным отрицательным числом.

Пусть теперь

$$x_1=\varphi_1(y_1)+\xi_1, \quad y_2=\varphi_2(y_1)+\xi_2$$

— другое решение, мало отличающееся от первого. Пусть в соответствии с обозначениями главы III (первая часть) β_1 и β_2 — начальные значения ξ_1 и ξ_2 при $y_1=0$ и $\beta_1+\psi_1$, $\beta_2+\psi_2$ — значения ξ_1 и ξ_2 при $y_1=2k\pi$ (k — целое). Решение будет периодическим с периодом $2k\pi$, если

$$\psi_1=\psi_2=0. \tag{10}$$

Известно, что ψ_1 и ψ_2 могут быть разложены по степеням β_1 и β_2 и, кроме того, эти функции будут зависеть от μ.

Если на мгновение рассматривать β_1, β_2 и μ как координаты точки в пространстве, уравнения (10) будут представлять некоторую пространственную кривую и каждой точке этой пространственной кривой будет соответствовать периодическое решение. Ясно, что ψ_1 и ψ_2 обращаются в нуль вместе с β_1 и β_2; действительно, если положить $\xi_1=0$, $\xi_2=0$, то получим, в силу определения величин ξ_1 и ξ_2, периодическое решение с периодом 2π, которое можно также считать периодическим решением с периодом $2K\pi$.

Кривая (10), следовательно, целиком включает в себя ось μ. Я намерен показать, что если при $\mu=\mu_0$ k_α является кратным $2i\pi$, то существует другая ветвь кривой (10), которая пройдет через точку

$$\mu=\mu_0, \quad \beta_1=0, \quad \beta_2=0,$$

и, следовательно, при близких к μ значениях μ_0 существуют периодические решения, отличные от $\xi_1=\xi_2=0$.

Положим $\mu-\mu_0=\lambda$ и попытаемся разложить ψ_1 и ψ_2 по степеням β_1, β_2 и λ.

Вычислим сначала члены первой ступени по β_1 и β_2.

Прежде всего, я утверждаю, что при $\lambda=0$, т. е. при $\mu=\mu_0$, все эти члены равны нулю.

Действительно, предположим, что величины ξ настолько малы, что можно пренебречь их квадратами. Мы видели в первой части, что в этом случае ξ удовлетворяют системе двух линейных дифференциальных уравнений, которые мы назвали уравнениями в вариациях уравнений (9). Мы также видели, что эти линейные уравнения имеют два замечательных решения; что первое из этих решений умножается на $e^{2\alpha\pi}$ при увеличении y_1 на 2π, а второе умножается при этом на $e^{-2\alpha\pi}$.

При $\lambda=0$ $k\alpha$ является кратным $2i\pi$, так что $e^{2\alpha\pi}$ и $e^{-2\alpha\pi}$ являются корнями k-й степени из единицы. Следовательно, наши оба решения возвращаются к исходному значению, когда y_1 увеличивается на $2k\pi$. Поскольку уравнение линейно, общее решение является линейной комбинацией этих двух замечательных решений и оно также не изменяется, когда y_1 увеличивается на $2k\pi$.

Поскольку ψ_1 и ψ_2 как раз и являются приращениями величин ξ_1 и ξ_2 при переходе y_1 от значения 0 к значению $2k\pi$, ψ_1 и ψ_2 должны равняться нулю; но это верно лишь в случае, когда ξ_1 и ξ_2 (или β_1 и β_2) достаточно малы, чтобы можно было пренебречь их квадратами; следовательно, только члены ψ_1 и ψ_2 первой степени по β_1 и β_2 будут равны нулю, что и требовалось доказать.

Пусть

$$a\beta_1+b\beta_2 \text{ — члены первой степени в } \psi_1,$$

$$c\beta_1+e\beta_2 \text{ — члены первой степени в } \psi_2.$$

Мы только что видели, что при $\lambda=0$

$$a=b=c=e=0.$$

Пусть еще при $\lambda=0$

$$\frac{da}{d\lambda}=a', \quad \frac{db}{d\lambda}=b', \quad \frac{dc}{d\lambda}=c', \quad \frac{de}{d\lambda}=e'.$$

Я говорю, что

$$a'+e'=0.$$

Действительно, уравнение относительно S

$$(a-S)(e-S)-bc=0$$

имеет корни (ср. § 12):

$$S=1-e^{2\alpha k\pi}, \quad S=1-e^{-2\alpha k\pi};$$

при $\lambda = 0$ эти два корня равны нулю; если λ достаточно мало, чтобы можно было пренебречь его квадратом, то эти корни равны

$$\pm 2k\pi \frac{da}{d\lambda} \lambda.$$

Уравнение относительно S

$$(a' - S)(e' - S) - b'c' = 0$$

будет, следовательно, иметь корни

$$S = \pm 2k\pi \frac{da}{d\lambda}$$

и, поскольку эти два корня равны и противоположного знака, то

$$a' + e' = 0.$$

Кроме того, a', e', b' и c' не будут, вообще говоря, равны нулю одновременно. Действительно, это может иметь место, только если $da/d\lambda = da/d\mu$ равно нулю. Однако величина μ_0 выбрана таким образом, что α (которая является функцией μ) соизмерима с $2i\pi$. Но производная $d\alpha/d\mu$ может обращаться в нуль при всех значениях, соизмеримых с $\alpha/2i\pi$, лишь если она равна нулю тождественно; тогда α была бы постоянной (которая, впрочем, должна равняться нулю, поскольку $\alpha = 0$ при $\mu = 0$), что в общем случае не имеет места.

Мы видели, что при $\lambda = 0$ члены ψ_1 и ψ_2 первой степени обращаются в нуль тождественно. Предположим, что то же верно и для членов второй степени, третьей степени и т. д., вплоть до $(m-1)$-й степени, но что члены m-й степени в разложении ψ_1 и ψ_2 не равны тождественно нулю при $\lambda = 0$. Пусть θ_1 — множество членов m-й степени ψ_1 при $\lambda = 0$; пусть θ_2 — множество членов m-й степени ψ_2 при $\lambda = 0$. Таким образом, θ_1 и θ_2 — два однородных полинома m-й степени по β_1 и β_2 и по крайней мере один из этих полиномов не обращается в нуль тождественно.

Положим

$$\psi_1 = a'\lambda\beta_1 + b'\lambda\beta_2 + \theta_1 + \omega_1,$$

$$\psi_2 = c'\lambda\beta_1 + a'\lambda\beta_2 + \theta_2 + \omega_2.$$

Тогда ω_1 и ω_2 представляют собой совокупность членов или по меньшей мере $(m+1)$-й степени по β, или же по меньшей мере второй степени по β и по меньшей мере первой степени по λ, или же по меньшей мере первой степени по β и по меньшей мере второй степени по λ.

Я собираюсь доказать, что из уравнений (10) можно получить β_1 и β_2 в виде рядов по степеням $\lambda^{\frac{1}{m-1}}$, все члены которых не равны нулю.

Но прежде всего надо доказать, что тождественно выполняется равенство

$$\frac{d\theta_1}{d\beta_1}+\frac{d\theta_2}{d\beta_2}=0.$$

Действительно, существует положительный интегральный инвариант. Отсюда мы заключаем, что существует интеграл

$$\iint \Phi(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2,$$

имеющий одно и то же значение для любой области, принадлежащей части поверхности без контакта, и для всех ее последующих.

Кроме того, функция Φ положительна. Следовательно, $\Phi(0, 0)$ не равна нулю; умножая функцию Φ на подходящий множитель, мы можем всегда предполагать, что

$$\Phi(0, 0)=1.$$

Но точка

$$\xi_1=\beta_1+\psi_1, \qquad \xi_2=\beta_2+\psi_2, \qquad y_1=2k\pi$$

является k-й последующей точки

$$\xi_1=\beta_1, \qquad \xi_2=\beta_2, \qquad y_1=0.$$

Следовательно, для любой области будем иметь

$$\iint \Phi(\beta_1+\psi_1, \beta_2+\psi_2)(d\beta_1+d\psi_1)(d\beta_2+d\psi_2)=\iint \Phi(\beta_1, \beta_2)\, d\beta_1 d\beta_2,$$

откуда вытекает тождество

$$\Phi(\beta_1+\psi_1, \beta_2+\psi_2)\left[\frac{d(\beta_1+\psi_1)}{d\beta_1}\frac{d(\beta_2+\psi_2)}{d\beta_2}-\right.$$

$$\left.-\frac{d(\beta_1+\psi_1)}{d\beta_2}\frac{d(\beta_2+\psi_2)}{d\beta_1}\right]=\Phi(\beta_1, \beta_2). \tag{11}$$

Мы предположим, что $\lambda=0$; получим

$$\psi_1=\theta_1+\omega_1, \qquad \psi_2=\theta_2+\omega_2.$$

Величины θ содержат лишь члены m-й степени, а величины ω — члены $(m+1)$-й или высших степеней.

Отсюда следует, что разность

$$\Phi(\beta_1+\psi_1, \beta_2+\psi_2)-\Phi(\beta_1, \beta_2)$$

содержит лишь члены по меньшей мере m-й степени относительно β_1 и β_2 и члены более высоких степеней; а если уместно пренебречь членами m-й степени и выше, то мы можем записать, что

$$\Phi(\beta_1+\psi_1, \beta_2+\psi_2)=\Phi(\beta_1, \beta_2).$$

По-прежнему пренебрегая членами m-й степени, получим также

$$\frac{d(\beta_1+\psi_1)}{d\beta_1}=1+\frac{d\theta_1}{d\beta_1}, \quad \frac{d(\beta_2+\psi_2)}{d\beta_2}=1+\frac{d\theta_2}{d\beta_2},$$

$$\frac{d(\beta_1+\psi_1)}{d\beta_2}=\frac{d\theta_1}{d\beta_2}, \quad \frac{d(\beta_2+\psi_2)}{d\beta_1}=\frac{d\theta_2}{d\beta_1}$$

и

$$\frac{d(\beta_1+\psi_1)}{d\beta_1}\frac{d(\beta_2+\psi_2)}{d\beta_2}-\frac{d(\beta_1+\psi_1)}{d\beta_2}\frac{d(\beta_2+\psi_2)}{d\beta_1}=1+\frac{d\theta_1}{d\beta_1}+\frac{d\theta_2}{d\beta_2}.$$

Таким образом, приравнивая друг к другу в тождестве (11) все члены степеней, меньших m, приходим к соотношению

$$\Phi(\beta_1, \beta_2)\left(\frac{d\theta_1}{d\beta_1}+\frac{d\theta_2}{d\beta_2}\right)=0.$$

В левой части этого соотношения мы должны сохранить лишь члены самое большее $(m-1)$-й степени, так что остается

$$\frac{d\theta_1}{d\beta_1}+\frac{d\theta_2}{d\beta_2}=0,$$

что и требовалось доказать.

Положим теперь

$$\lambda=\pm\eta^{m-1}, \quad \beta_1=\gamma_1\eta, \quad \beta_2=\gamma_2\eta;$$

мы видим, что θ_1 и θ_2 делятся на η^m, а ω_1 и ω_2 делятся на η^{m+1}, так что можно положить

$$\theta_1=\eta^m\theta_1', \quad \theta_2=\eta^m\theta_2', \quad \omega_1=\eta^{m+1}\omega_1', \quad \omega_2=\eta^{m+1}\omega_2',$$

откуда

$$\psi_1=\pm\eta^m(a'\gamma_1+b'\gamma_2)+\eta^m\theta_1'+\eta^{m+1}\omega_1',$$

$$\psi_2=\pm\eta^m(c'\gamma_1+a'\gamma_2)+\eta^m\theta_2'+\eta^{m+1}\omega_2'$$

и, следовательно, наши уравнения (10) мы можем заменить следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}&\pm(a'\gamma_1+b'\gamma_2)+\theta_1'+\eta\omega_1'=0,\\&\pm(c'\gamma_1+a'\gamma_2)+\theta_2'+\eta\omega_2'=0.\end{aligned}\qquad(12)$$

Я говорю, что из этих уравнений можно получить γ_1 и γ_2 в виде рядов по степеням η; при этом эти ряды не равны тождественно нулю.

В силу теоремы IV § 2, для этого достаточно лишь установить, что:

1) уравнения (12) при $\eta=0$ имеют по меньшей мере одну систему вещественных решений

$$\gamma_1=\gamma_1^0, \quad \gamma_2=\gamma_2^0;$$

2) если положить

$$\eta=0, \qquad \gamma_1=\gamma_1^0, \qquad \gamma_2=\gamma_2^0,$$

то функциональный определитель левых частей уравнений (12) по γ_1 и γ_2 не равен нулю.

Это равносильно тому, что для уравнений (12), упрощенных с помощью допущения, что $\eta=0$, решение

$$\gamma_1=\gamma_1^0, \qquad \gamma_2=\gamma_2^0$$

должно быть простым.

Но в силу теорем V и VI § 2 и их следствий, можно разложить γ_1 и γ_2 по степеням η, даже если это решение было бы кратным, лишь бы порядок кратности был нечетным.

Следовательно, нам надо рассмотреть уравнения

$$\begin{gathered} \pm(a'\gamma_1+b'\gamma_2)+\theta_1'=0, \\ \pm(c'\gamma_1-a'\gamma_2)+\theta_2'=0, \end{gathered} \tag{13}$$

и мы должны попытаться доказать, что эти уравнения имеют по меньшей мере одно вещественное решение нечетного порядка.

Мы можем получить из этих уравнений следующее:

$$(a'\gamma_1+b'\gamma_2)\,\theta_2'-(c'\gamma_1-a'\gamma_2)\,\theta_1'=0, \tag{14}$$

являющееся однородным; отсюда, следовательно, можно получить отношение γ_1/γ_2.

Ясно, что θ_1' и θ_2' образованы из γ_1 и γ_2 так же, как θ_1 и θ_2 из β_1 и β_2; следовательно,

$$\frac{d\theta_1'}{d\gamma_1}+\frac{d\theta_2'}{d\gamma_2}=0.$$

Это доказывает, что существует однородный полином f степени $m+1$ по γ_1 и γ_2, такой, что

$$\theta_1'=\frac{df}{d\gamma_2}, \qquad \theta_2'=-\frac{df}{d\gamma_1}.$$

Точно так же, если мы положим

$$f_1=\frac{1}{2}\,(b'\gamma_2^2+2a'\gamma_1\gamma_2-c'\gamma_1^2),$$

то получим

$$a'\gamma_1+b'\gamma_2=\frac{df_1}{d\gamma_2}, \qquad c'\gamma_1-a'\gamma_2=-\frac{df}{d\gamma_1},$$

так что уравнение (14) можно записать в виде

$$\frac{df_1}{d\gamma_2}\frac{df}{d\gamma_1}-\frac{df}{d\gamma_1}\frac{df}{d\gamma_2}=0.$$

Рассмотрим выражение

$$H = \frac{f^2}{f_1^{m+1}}.$$

Оно однородно нулевой степени относительно γ_1 и γ_2; следовательно, оно зависит лишь от отношения γ_1/γ_2. Я говорю, что знаменатель f_1 никогда не может обратиться в нуль.

Действительно, уравнение

$$(a' - S)(e' - S) - b'c' = 0$$

должно иметь два мнимых корня, откуда

$$a'e' - b'c' = -a'^2 - b'c' < 0$$

и, далее,

$$a'^2 + b'c' > 0,$$

а это доказывает, что квадратичная форма f_1 — определенная. Следовательно, выражение H никогда не может стать бесконечным. Следовательно, оно имеет по меньшей мере один максимум. Для этого максимума должно выполняться соотношение

$$\frac{df_1}{d\gamma_2}\frac{df}{d\gamma_1} - \frac{df_1}{d\gamma_1}\frac{df}{d\gamma_2} = 0.$$

Таким образом, уравнение (14) имеет по меньшей мере один вещественный корень. Вообще говоря, он будет простым. Во всяком случае он всегда будет нечетного порядка, так как максимум может соответствовать лишь корню нечетного порядка.

Из уравнения (14) мы получили отношение γ_1/γ_2, следовательно, можем положить

$$\gamma_1 = \delta_1 u, \qquad \gamma_2 = \delta_2 u,$$

где δ_1 и δ_2 — известные величины.

Нам остается теперь определить u. Для этого в первом из уравнений (13) я заменяю γ_1 и γ_2 на $\delta_1 u$ и $\delta_2 u$, получаю

$$\theta_1' = u^m \theta_1'', \qquad \theta_2' = u^m \theta_2'',$$

где θ_1'' построено из δ_1 и δ_2 так же, как θ_1' из γ_1 и γ_2; отсюда

$$\pm(a'\delta_1 + b'\delta_2) + \theta_1'' u^{m-1} = 0. \tag{15}$$

Это уравнение должно определить u. Если m четно, оно будет иметь вещественный корень; если m нечетно (что, впрочем, происходит в общем случае), оно будет иметь два вещественных корня или ни одного вещественного корня, причем два вещественных корня у него будут тогда,

когда величины θ_1'' и $\pm(a'\delta_1 + b'\delta_2)$ противоположных знаков, а благодаря наличию двух знаков $\pm$ этого можно всегда добиться.

Следовательно, уравнение (15) всегда допускает по крайней мере один вещественный корень. Более того, этот корень — простой. Исключение встретилось бы лишь тогда, когда $a'\delta_1 + b'\delta_2 = 0$ либо $\theta_1'' = 0$.

Но в этом случае мы заменили бы уравнение (15) следующим:

$$\pm(c'\delta_1 - a'\delta^2) + \theta_2''u^{m-1} = 0.$$

Следовательно, затруднения могут встретиться лишь тогда, когда одновременно

$$a'\delta_1 + b'\delta_2 = c'\delta_1 - a'\delta_2 = 0$$

или же когда

$$\theta_1'' = \theta_2'' = 0.$$

Первое обстоятельство не может иметь места по причине неравенства

$$a'^2 + b'c' > 0.$$

Второе обстоятельство, напротив, могло бы представиться. Может случиться, что уравнение (14) имеет такой корень, что $\theta_1' = \theta_2' = 0$. Но я говорю, что в этом случае уравнение (14) будет иметь по меньшей мере еще один корень, для которого это обстоятельство не представится.

Действительно, мы имеем тождественное равенство

$$mf = \gamma_2\theta_1' - \gamma_1\theta_2'.$$

Если же

$$\theta_1' = \theta_2' = 0,$$

то $f = 0$ и, поскольку f_1 никогда не равно нулю, то

$$H = 0.$$

Действительно, может случиться, что 0 является максимумом или минимумом выражения H. Но это выражение не равно тождественно нулю, поскольку θ_1' и θ_2' оба не равны тождественно нулю; кроме того, это выражение всегда остается конечным; следовательно, оно становится или положительным, или отрицательным. Если оно становится положительным, оно будет иметь положительный максимум, отличный от нуля; если оно становится отрицательным, оно будет иметь отрицательный минимум, отличный от нуля.

Таким образом, уравнение (14) имеет всегда по меньшей мере один вещественный корень нечетного порядка, такой, что θ_1'' и θ_2'' не обращаются в нуль одновременно.

Следовательно, уравнения (13) имеют по меньшей мере одно вещественное решение нечетного порядка.

Следовательно, можно найти ряды, тождественно не равные нулю, которые можно разложить по дробным положительным степеням $\mu-\mu_0$ и которые удовлетворяют уравнениям (10), когда их подставляют вместо β_1 и β_2.

Следовательно, существует система периодических решений с периодом $2k\pi$, которая при $\mu=\mu_0$ совпадает с решением

$$x_1=\varphi_1(y_1), \quad x_2=\varphi_2(y_1).$$

Это — периодические решения второго рода.

§ 21. Расходимость рядов Линдштедта

Я хочу закончить изложение общих результатов данной работы тем, что привлеку внимание к отрицательным заключениям, которые из них вытекают. Эти заключения интересны не только потому, что они лучше оттеняют удивительность полученных результатов, но и потому, что они могут, как раз в силу своего негативного характера, быть распространенными непосредственно на общие случаи, в то время как позитивные заключения требуют для своего обобщения специальных доказательств.

Сначала я намерен доказать, что ряды, предложенные Линдштедтом, не являются сходящимися; но раньше я хочу напомнить, в чем состоит метод Линдштедта. Я изложу его в обозначениях, отличных от тех, которые использовал этот ученый-астроном, так как я для большей ясности хочу сохранить те обозначения, которые использованы выше.

Представим уравнения динамики в том же виде, что и во второй части настоящего мемуара, и запишем:

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{dF}{dy_1}, \quad \frac{dx_2}{dt}=\frac{dF}{dy_2}, \quad \frac{dy_1}{dt}=-\frac{dF}{dx_1}, \quad \frac{dy_2}{dt}=-\frac{dF}{dx_2},$$

где F — заданная функция четырех переменных x_1, x_2, y_1 и y_2 и при этом

$$F=F_0+\mu F_1,$$

где F_0 — функция x_1 и x_2, не зависящая от y_1 и y_2; μ — очень малый коэффициент, так что μF_1 будет *возмущающей функцией*.

Действительно, именно в этой форме предстают задачи динамики и, в частности, задачи небесной механики.

Если бы μ было нулем, то x_1 и x_2 были постоянными. Если μ не равно нулю, но очень мало, и если обозначить через ξ_1 и ξ_2 начальные значения x_1 и x_2, разности $x_1-\xi_1$ и $x_2-\xi_2$ будут иметь тот же порядок величины, что и μ.

Следовательно, если мы обозначим через n_1 и n_2 значения $-dF_0/dx_1$ и $-dF_0/dx_2$ при $x_1=\xi_1$ и $x_2=\xi_2$, то разности

$$-\frac{dF_0}{dx_1}-n_1 \text{ и } -\frac{dF_0}{dx_2}-n_2$$

будут того же порядка величины, что и μ, что позволит нам положить

$$-\frac{dF_0}{dx_1}-n_1=\mu\varphi_1(x_1,\ x_2),$$

$$-\frac{dF_0}{dx_2}-n_2=\mu\varphi_2(x_1,\ x_2),$$

где φ_1 и φ_2 — не слишком большие функции от x_1 и x_2.

Уравнения движения запишутся тогда в виде

$$\frac{dx_1}{dt}=\mu\frac{dF_1}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt}=\mu\frac{dF_1}{dy_2},$$

$$\frac{dy_1}{dt}=n_1+\mu\left(\varphi_1-\frac{dF_1}{dx_1}\right), \qquad \frac{dy_2}{dt}=n_2+\mu\left(\varphi_2-\frac{dF_1}{dx_2}\right).$$

Предположим теперь, что вместо того, чтобы рассматривать x_1, x_2, y_1, y_2 *непосредственно* как функции t, мы рассматриваем их как функции двух переменных

$$w_1 \text{ и } w_2$$

и что мы полагаем

$$w_1=\lambda_1 t+\varpi_1, \qquad w_2=\lambda_2 t+\varpi_2,$$

где ϖ_1 и ϖ_2 будут произвольными постоянными интегрирования; λ_1 и λ_2 — будут постоянными, которые впоследствии мы полностью определим в процессе вычислений.

Уравнения движения примут вид:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\frac{dx_1}{dw_1}+\lambda_2\frac{dx_1}{dw_2}-\mu\frac{dF_1}{dy_1}=0,\\
&\lambda_1\frac{dx_2}{dw_1}+\lambda_2\frac{dx_2}{dw_2}-\mu\frac{dF_1}{dy_2}=0,\\
&\lambda_1\frac{dy_1}{dw_1}+\lambda_2\frac{dy_1}{dw_2}-n_1-\mu\left(\varphi_1-\frac{dF_1}{dx_1}\right)=0,\\
&\lambda_1\frac{dy_2}{dw_1}+\lambda_2\frac{dy_2}{dw_2}-n_2-\mu\left(\varphi_2-\frac{dF_1}{dx_2}\right)=0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Положим теперь

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \mu x_1^1 + \mu^2 x_1^2 + \mu^3 x_1^3 + \ldots, \\ x_2 &= x_2^0 + \mu x_2^1 + \mu^2 x_2^2 + \mu^3 x_2^3 + \ldots, \\ y_1 - w_1 &= \mu y_1^1 + \mu^2 y_1^2 + \ldots, \\ y_2 - w_2 &= \mu y_2^1 + \mu^2 y_2^2 + \ldots, \\ \lambda_1 &= \lambda_1^0 + \mu\lambda_1^1 + \mu^2\lambda_1^2 + \ldots, \\ \lambda_2 &= \lambda_2^0 + \mu\lambda_2^1 + \mu^2\lambda_2^2 + \ldots. \end{aligned} \qquad (2)$$

Я предполагаю, что коэффициенты λ_i^k — постоянные, а коэффициенты y_i^k и x_i^k — тригонометрические ряды по синусам и косинусам кратных w_1 и w_2.

Я предположу, кроме того, как я делал раньше до сих пор, что F_1 — тригонометрический ряд, зависящий от синусов и косинусов кратных y_1 и y_2, и что коэффициенты этого ряда — голоморфные функции x_1 и x_2.

В этих условиях, если в левые части уравнений (1) я подставлю вместо λ_1, λ_2, y_1, y_2, x_1 и x_2 их значения (2), я получу четыре функции, разложенные по возрастающим степеням μ, и ясно, что коэффициенты при различных степенях μ будут рядами по тригонометрическим функциям от кратных w_1 и w_2.

Я обозначу через

$$\Phi_1, \ \Phi_2, \ \Phi_1' \ \text{и} \ \Phi_2'$$

эти четыре функции.

В этих условиях теорема Линдштедта состоит в следующем.

При сколь угодно большом q можно так определить $2q + 2$ постоянных

$$\begin{aligned} &\lambda_1^0, \ \lambda_1^1, \ \ldots, \ \lambda_1^q, \\ &\lambda_2^0, \ \lambda_2^1, \ \ldots, \ \lambda_2^q \end{aligned}$$

и $4q$ тригонометрических рядов

$$\begin{aligned} &x_1^0, \ \ldots, \ x_1^q, \\ &x_2^0, \ \ldots, \ x_2^q, \\ &y_1^1, \ \ldots, \ y_1^q, \\ &y_2^1, \ \ldots, \ y_2^q, \end{aligned}$$

что в функциях

$$\Phi_1, \ \Phi_2, \ \Phi_1' \ \text{и} \ \Phi_2'$$

обращаются в нуль члены, не зависящие от μ, и коэффициенты q первых степеней μ; другими словами, таким образом можно удовлетворить уравнениям движения с точностью до величин порядка μ^{q+1}.

Мы находим сначала, что

$$\lambda_1^0 = n_1, \ \ \lambda_2^0 = n_2, \ \ x_1^0 = \xi_1 + \omega_1, \ \ x_2^0 = \xi_2 + \omega_2,$$

где ω_1 и ω_2 — постоянные интегрирования, и будем предполагать, что они порядка μ.

Предположим, что мы предварительно определили

$$\lambda_1^0,\ \lambda_1^1,\ \ldots,\ \lambda_1^{q-1},$$
$$x_i^0,\ x_i^1,\ \ldots,\ x_i^{q-1},$$
$$y_i^1,\ \ldots,\ y_i^{q-1},$$

и собираемся определить

$$\lambda_1^q,\ \lambda_2^q,\ x_1^q,\ x_2^q,\ y_1^q,\ y_2^q.$$

Для этого запишем, что коэффициенты при μ^q в Φ_1, Φ_2 и Φ_1', Φ_2' равны нулю.

Получаем

$$\begin{aligned} n_1\frac{dx_1^q}{dw_1}+n_2\frac{dx_1^q}{dw_2}&=X_1,\\ n_1\frac{dx_2^q}{dw_1}+n_2\frac{dx_2^q}{dw_2}&=X_2,\\ n_1\frac{dy_1^q}{dw_1}+n_2\frac{dy_1^q}{dw_2}+\lambda_1^q&=Y_1,\\ n_1\frac{dy_2^q}{dw_1}+n_2\frac{dy_2^q}{dw_2}+\lambda_2^q&=Y_2,\end{aligned} \tag{3}$$

где X_1, X_2, Y_1 и Y_2 — известные функции. X_1, X_2, Y_1 и Y_2 — тригонометрические ряды по w_1 и w_2.

Для того чтобы интегрирование уравнений (3) было возможно, необходимо, чтобы:

1) отношение n_1/n_2 было иррационально, что всегда можно предположить;

2) в тригонометрических рядах X_1 и X_2 постоянные члены были равны нулю. Это действительно так, но доказательство этого важного факта очень тонко и здесь не будет приведено; я ограничусь лишь тем, что скажу, что оно должно основываться на использовании интегральных инвариантов;

3) в тригонометрических рядах Y_1 и Y_2 постоянные члены сводились к λ_1^q и λ_2^q; поскольку λ_1^q и λ_2^q — два неизвестных, мы определим эти неизвестные этим условием.

Тогда становится возможным интегрирование уравнений (3). При их интегрировании будут введены четыре произвольные постоянные. Таким образом, с каждым приближением мы имеем еще четыре постоянные интегрирования; мы им придадим некоторые значения и не сохраним никаких других произвольных постоянных, кроме ω_1, ω_2, ϖ_1 и ϖ_2.

Таким образом, ряды Линдштедта являются тригонометрическими рядами по w_1 и w_2; они разложены по степеням μ, а также по степеням двух постоянных ω_1 и ω_2.

По теореме Линдштедта эти ряды формально удовлетворяют уравнениям движения. Если же они были бы равномерно сходящимися, они дали бы нам общий интеграл этих уравнений.

Я утверждаю, что это невозможно.

Действительно, предположим, что это так и что наши ряды равномерно сходятся при всех значениях времени и при достаточно малых значениях μ, ω_1 и ω_2.

Ясно, что λ_1 и λ_2 — тоже ряды по степеням μ, ω_1 и ω_2. Для некоторых значений ω_1 и ω_2 отношение λ_2/λ_1 рационально. Тогда частные решения, отвечающие этим значениям постоянных интегрирования, будут периодическими решениями.

Выше мы видели, что всякое периодическое решение имеет некоторое число *характеристических показателей*. Посмотрим, как можно вычислить эти показатели, когда мы располагаем общим интегралом заданных уравнений.

Пусть

$$x_1 = \psi_1(t, \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2), \quad x_2 = \psi_2(t, \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2),$$

$$y_1 = \psi_1'(t, \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2), \quad y_2 = \psi_2'(t, \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2)$$

— этот общий интеграл.

Предположим, что если мы придаем ω_1, ω_2, ϖ_1 и ϖ_2 определенные значения ω_1^0, ω_2^0, ϖ_1^0, ϖ_2^0, то функции ψ_1, ψ_2, ψ_1', ψ_2' становятся периодическими по t. Чтобы получить характеристические показатели полученного таким образом периодического решения, мы образуем шестнадцать частных производных:

$$\frac{dx_1}{d\omega_1}, \quad \frac{dx_2}{d\omega_1}, \quad \frac{dy_1}{d\omega_1}, \quad \frac{dy_2}{d\omega_1},$$

$$\frac{dx_1}{d\varpi_1}, \quad \frac{dx_2}{d\varpi_1}, \quad \frac{dy_1}{d\varpi_1}, \quad \frac{dy_2}{d\varpi_1},$$

$$\frac{dx_1}{d\omega_2}, \quad \frac{dx_2}{d\omega_2}, \quad \frac{dy_1}{d\omega_2}, \quad \frac{dy_2}{d\omega_2},$$

$$\frac{dx_1}{d\varpi_2}, \quad \frac{dx_2}{d\varpi_2}, \quad \frac{dy_1}{d\varpi_2}, \quad \frac{dy_2}{d\varpi_2}$$

и затем положим в них

$$\omega_1 = \omega_1^0, \quad \omega_2 = \omega_2^0, \quad \varpi_1 = \varpi_1^0, \quad \varpi_2 = \varpi_2^0.$$

Тогда $dx_1/d\omega_1$, например, примет следующий вид:

$$\frac{dx_1}{d\omega_1}=e^{\alpha_1 t}\theta_1(t)+e^{\alpha_2 t}\theta_2(t)+e^{\alpha_3 t}\theta_3(t)+e^{\alpha_4 t}\theta_4(t),$$

где α — постоянные, а θ — периодические функции.

Тогда α будут искомыми характеристическими показателями.

Применим это правило к нашему случаю. Имеем

$$x_1=\varphi_1(\omega_1, \omega_2, w_1, w_2),$$

где φ_1 — периодическая функция по w_1 и w_2.

Тогда получаем

$$\frac{dx_1}{d\varpi_1}=\frac{d\varphi_1}{dw_1}, \qquad \frac{dx_1}{d\omega_1}=\frac{d\varphi_1}{d\omega_1}+\left(\frac{d\lambda_1}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_1}+\frac{d\lambda_2}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{d\omega_2}\right)t.$$

Три функции

$$\frac{d\varphi_1}{dw_1}, \ \frac{d\varphi_1}{d\omega_1} \ \text{и} \ \frac{d\lambda_1}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_1}+\frac{d\lambda_2}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_2}$$

являются периодическими по w_1 и w_2 и, следовательно, по t.

Найдем для $dx_1/d\varpi_2$ и $dx_1/d\omega_2$ аналогичные выражения. Это доказывает, что характеристические показатели равны нулю.

Следовательно, *если бы ряды Линдштедта были сходящимися, все характеристические показатели равнялись бы нулю.*

В каком случае дело обстоит таким образом?

Выше мы ознакомились со способом вычисления характеристических показателей (§ 10 и 12).

В § 12 мы видели, что характеристические показатели, соответствующие уравнениям

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF_0}{dy_i}+\mu\frac{dF_1}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF_0}{dx_i}-\mu\frac{dF_1}{dx_i},$$

могут быть разложены по степеням $\sqrt{\mu}$; мы научились образовывать уравнение, которое дает коэффициент α_1 при $\sqrt{\mu}$.

Напомним, как строится это уравнение.

В § 12 мы положили

$$C_{ik}^0=-\frac{d^2F_0}{dx_i dx_k}, \qquad B_{ik}^2=\frac{d^2F_1}{dy_i dy_k}.$$

В этих вторых производных мы предполагаем, что x_1 и x_2 заменены на x_1^0 и x_2^0, а y_1 и y_2 заменены на $n_1t+\varpi_1$, $n_2t+\varpi_2$*. Следовательно, C_{ik}^0 —

* Не стоит напоминать здесь, что эти значения x_1^0, x_2^0, n_1, n_2 соответствуют исследуемому периодическому решению, но это и не те значения, которые мы использовали выше при изложении метода Линдштедта. Отношение n_1/n_2, следовательно, рационально.

постоянная, а B_{ik}^2 — периодическая функция t. Я обозначаю b_{ik} постоянный член этой периодической функции.

Положим затем

$$e_{11}=b_{11}C_{11}^0+b_{12}C_{21}^0, \quad e_{21}=b_{21}C_{11}^0+b_{22}C_{21}^0,$$
$$e_{12}=b_{11}C_{12}^0+b_{12}C_{22}^0, \quad e_{22}=b_{21}C_{12}^0+b_{22}C_{22}^0.$$

Уравнение, которое нам дает α_1, будет тогда иметь вид

$$\begin{vmatrix} e_{11}-\alpha_1^2 & e_{12} \\ e_{21} & e_{22}-\alpha_1^2 \end{vmatrix}=0.$$

Для того чтобы все корни этого уравнения равнялись нулю, необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$e_{11}+e_{22}=0$$

и

$$b_{11}C_{11}^0+2b_{12}C_{12}^0+b_{22}C_{22}^0=0.$$

Однако, как я показал в цитированном параграфе, мы имеем

$$n_1b_{11}+n_2b_{12}=n_1b_{21}+n_2b_{22}=0. \tag{4}$$

Следовательно, для того чтобы тождество (4) имело место, необходимо, чтобы

$$b_{11}=0 \tag{5}$$

или же чтобы

$$n_2^2C_{11}^0-2n_1n_2C_{12}^0+n_1^2C_{22}^0=0. \tag{6}$$

Займемся сначала соотношением (5). Если мы положим в возмущающей функции F_1

$$x_1=x_1^0, \quad x_2=x_2^0, \quad y_1=n_1t+\varpi_1, \quad y_2=n_2t+\varpi_2,$$

то F_1 станет периодической функцией t. Предположим, что эта функция разложена в тригонометрический ряд и пусть ψ общий член этого разложения; ψ будет периодической функцией ϖ_1 и ϖ_2, и мы получим

$$b_{ik}=\frac{d^2\psi}{d\varpi_i d\varpi_k}.$$

Следовательно, должно иметь место равенство

$$\frac{d^2\psi}{d\varpi_1^2}=0. \tag{7}$$

Мы всегда сможем предполагать, что начальный момент времени выбран так, что ϖ_2 равно нулю и ψ — периодическая функция только ϖ_1.

Кроме того, соотношение (7) должно (если ряды Линдштедта сходятся) удовлетворяться тождественно. И в самом деле, если предположить, что ряды сходятся, нашлось бы бесконечное множество периодических решений, соответствующих каждому рациональному значению отношения n_1/n_2.

Если соотношение (7) является тождеством и если ψ — периодическая функция, то эта функция должна свестись к постоянной.

Посмотрим, что это означает.

Поскольку возмущающая функция F_1 периодическая по y_1 и по y_2, то она может быть записана в виде

$$F_1 = \sum A_{m_1 m_2} \cos(m_1 y_1 + m_2 y_2) + \sum B_{m_1 m_2} \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2),$$

где m_1 и m_2 — целые, а $A_{m_1 m_2}$ и $B_{m_1 m_2}$ — данные функции от x_1 и x_2.

Получим, что

$$\psi = \mathrm{S} A^0_{m_1 m_2} \cos(m_1 \varpi_1 + m_2 \varpi_2) + \mathrm{S} B^0_{m_1 m_2} \sin(m_1 \varpi_1 + m_2 \varpi_2),$$

где суммирование под знаком S распространяется на все такие члены, что

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 = 0,$$

а $A^0_{m_1 m_2}$ и $B^0_{m_1 m_2}$ представляют собой функции, в которые превратились $A_{m_1 m_2}$ и $B_{m_1 m_2}$ при замене x_1 и x_2 на x_1^0 и x_2^0.

Поскольку у ψ должны исчезнуть периодические члены, мы получим

$$A^0_{m_1 m_2} = B^0_{m_1 m_2} = 0.$$

Таким образом, коэффициенты $A_{m_1 m_2}$ и $B_{m_1 m_2}$ разложения возмущающей функции должны обращаться в нуль, когда мы придаем x_1 и x_2 такие значения, что

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 = 0.$$

Или же мы должны придавать отношению n_1/n_2 рациональные значения, не вводя в возмущающую функцию F_1 вековых членов.

Ясно, что в частном случае задачи трех тел, которую мы изучили, дело обстоит иначе и что нельзя придать отношению средних движений рационального значения, не вводя в возмущающую функцию вековых членов.

Перейдем теперь к условию (6), которое можно записать в виде

$$\left(\frac{dF_0}{dx_2}\right)^2 \frac{d^2F_0}{dx_1^2} - 2\frac{dF_0}{dx_1}\frac{dF_0}{dx_2}\frac{d^2F}{dx_1 dx_2} + \left(\frac{dF_0}{dx_1}\right)^2 \frac{d^2F_0}{dx_2^2} = 0.$$

Оно выражает, что кривая

$$F_0(x_1, x_2) = \mathrm{const}$$

имеет точку перегиба в точке $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$.

Поскольку это условие должно выполняться для всех значений x_1^0 и x_2^0, соответствующих рациональному отношению n_1/n_2, кривая $F_0(x_1, x_2) = \text{const}$ должна свестись к системе прямых.

Этот частный случай мы оставим в стороне, поскольку очевидно, что в задаче трех тел ничего подобного не происходит.

Таким образом, *в частном случае задачи трех тел, которую мы изучили, и, следовательно, в общем случае ряды Линдштедта не сходятся равномерно при всех значениях произвольных постоянных интегрирования, которые они содержат.*

§ 22. Несуществование однозначных интегралов

Вернемся к уравнениям динамики с двумя степенями свободы

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

Эти уравнения допускают интеграл

$$F = \text{const}.$$

Этот интеграл F является аналитической функцией x_1, x_2, y_1, y_2 и μ, периодической с периодом 2π по y_1 и y_2.

Я собираюсь доказать, что не существует других интегралов с теми же свойствами.

Действительно, пусть

$$\Phi = \text{const}$$

— другой аналитический и однозначный интеграл по x, y и μ и периодический по y.

Пусть

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad y_1 = \varphi_3(t), \quad y_2 = \varphi_4(t)$$

— периодическое решение (с периодом T) наших дифференциальных уравнений.

Пусть

$$x_1 = \varphi_1(t) + \xi_1, \quad x_2 = \varphi_2(t) + \xi_2, \quad y_1 = \varphi_3(t) + \xi_3, \quad y_2 = \varphi_4(t) + \xi_4.$$

Пусть β_i — значение ξ_i при $t = 0$; пусть $\beta_i + \psi_i$ — значение ξ_i при $t = T$; мы знаем, что величины ψ можно разложить по возрастающим степеням величин β.

Рассмотрим уравнение относительно S:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1}-S & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \frac{d\psi_1}{d\beta_3} & \frac{d\psi_1}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2}-S & \frac{d\psi_2}{d\beta_3} & \frac{d\psi_2}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_3}{d\beta_1} & \frac{d\psi_3}{d\beta_2} & \frac{d\psi_3}{d\beta_3}-S & \frac{d\psi_3}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_4}{d\beta_1} & \frac{d\psi_4}{d\beta_2} & \frac{d\psi_4}{d\beta_3} & \frac{d\psi_4}{d\beta_4}-S \end{vmatrix} = 0.$$

Корни этого уравнения равны

$$e^{\alpha T}-1,$$

где α — характеристические показатели; следовательно, два из этих корней равны нулю, и в частном случае задачи трех тел, который мы рассматриваем, два других корня должны быть отличными от нуля.

Я замечу сначала, что мы имеем

$$\begin{gathered} \frac{dF}{dx_1}\frac{d\psi_1}{d\beta_i}+\frac{dF}{dx_2}\frac{d\psi_2}{d\beta_i}+\frac{dF}{dy_1}\frac{d\psi_3}{d\beta_i}+\frac{dF}{dy_2}\frac{d\psi_4}{d\beta_i}=0, \\ \frac{d\Phi}{dx_1}\frac{d\psi_1}{d\beta_i}+\frac{d\Phi}{dx_2}\frac{d\psi_2}{d\beta_i}+\frac{d\Phi}{dy_1}\frac{d\psi_3}{d\beta_i}+\frac{d\Phi}{dy_2}\frac{d\psi_4}{d\beta_i}=0. \end{gathered} \tag{1}$$

В производных F и Φ величины x_1, x_2, y_1 и y_2 должны быть заменены на $\varphi_1(T)$, $\varphi_2(T)$, $\varphi_3(T)$, $\varphi_4(T)$.

Отсюда можно заключить, что

$$\frac{\frac{dF}{dx_1}}{\frac{d\Phi}{dx_1}}=\frac{\frac{dF}{dx_2}}{\frac{d\Phi}{dx_2}}=\frac{\frac{dF}{dy_1}}{\frac{d\Phi}{dy_1}}=\frac{\frac{dF}{dy_2}}{\frac{d\Phi}{dy_2}}, \tag{2}$$

или же, что функциональный определитель функций ψ относительно β равен нулю вместе со всеми своими минорами первого порядка.

С другой стороны, если обозначить $\varphi_i'(t)$ производную $\varphi_i(t)$, то получим

$$\begin{gathered} \frac{d\psi_i}{d\beta_1}\varphi_1'(0)+\frac{d\psi_i}{d\beta_2}\varphi_2'(0)+\frac{d\psi_i}{d\beta_3}\varphi_3'(0)+\frac{d\psi_i}{d\beta_4}\varphi_4'(0)=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4), \\ \frac{dF}{dx_1}\varphi_1'(0)+\frac{dF}{dx_2}\varphi_2'(0)+\frac{dF}{dy_1}\varphi_3'(0)+\frac{dF}{dy_2}\varphi_4'(0)=0, \end{gathered} \tag{3}$$

$$\frac{d\Phi}{dx_1}\varphi_1'(0)+\frac{d\Phi}{dx_2}\varphi_2'(0)+\frac{d\Phi}{dy_1}\varphi_3'(0)+\frac{d\Phi}{dy_2}\varphi_4'(0)=0. \tag{4}$$

Из этих уравнений можно с помощью очень простого вычисления, детали которого будут указаны ниже, прийти к выводу, что, если уравнения (2) не удовлетворены, то либо

$$\varphi_1'(0)=\varphi_2'(0)=\varphi_3'(0)=\varphi_4'(0)=0, \tag{5}$$

либо уравнение относительно S будет иметь три нулевых корня (даже четыре корня должны равняться нулю, потому что характеристические показатели попарно равны, но с противоположными знаками).

Однако мы знаем, что уравнение относительно S имеет лишь два нулевых корня; с другой стороны, уравнения (5) могут быть удовлетворены лишь при некоторых периодических решениях очень частного вида (я имею в виду те, которые изучены в «Небесной механике» Лапласа, книга X, гл. VI), в соответствии с которыми третье тело описывает, как и первые два, окружность.

Уравнения (2), следовательно, должны удовлетворяться, и они должны удовлетворяться при

$$x_1=\varphi_1(T), \quad x_2=\varphi_2(T), \quad y_1=\varphi_3(T), \quad y_2=\varphi_4(T).$$

Но поскольку начальный момент времени остается произвольным, они должны удовлетворяться и для любого t при

$$x_1=\varphi_1(t), \quad x_2=\varphi_2(t), \quad y_1=\varphi_3(t), \quad y_2=\varphi_4(t).$$

Другими словами, они будут удовлетворяться во всех точках всех периодических решений.

Я утверждаю теперь, что эти уравнения удовлетворяются тождественно. Положим, например,

$$f=\frac{d\Phi}{dx_2}\frac{dF}{dx_1}-\frac{d\Phi}{dx_1}\frac{dF}{dx_2}.$$

Ясно, что f все еще будет аналитической и однозначной функцией, и мы будем иметь, что $f=0$ во всех точках всех периодических решений. Я хочу установить, что f равно тождественно нулю; для этого я покажу, что при $\mu=0$ тождественно выполняются равенства

$$0=f=\frac{df}{d\mu}=\frac{d^2f}{d\mu^2}=\ldots.$$

Действительно, рассмотрим любое периодическое решение первого рода; пусть

$$x_1=\varphi_1(t,\ \mu), \quad x_2=\varphi_2(t,\ \mu), \quad y_1=\varphi_3(t,\ \mu), \quad y_2=\varphi_4(t,\ \mu)$$

— это решение; функции φ будут разложимы по степеням μ, и когда μ будет стремиться к 0, они будут стремиться соответственно к

$$x_1^0,\ x_2^0,\ n_1t+\varpi_1,\ n_2t+\varpi_2$$

(x_1^0 и x_2^0 — такие постоянные, что n_1/n_2 — рационально и ϖ_1 и ϖ_2 — величины, определенные в § 11). Так как μ не равно нулю, имеем

$$f[\varphi_1(t,\ \mu),\ \varphi_2(t,\ \mu),\ \varphi_3(t,\ \mu),\ \varphi_4(t,\ \mu)]=0.$$

Но поскольку функция f аналитическая и, следовательно, непрерывная, мы будем еще при $\mu=0$ иметь (хотя при $\mu=0$ характеристические показатели обращаются в нуль):

$$f(x_1^0,\ x_2^0,\ n_1t+\varpi_1,\ n_2t+\varpi_2)=0.$$

Но если мы рассматриваем произвольную систему значений x_1 и x_2, всегда можно найти систему x_1^0 и x_2^0, которая будет от нее отличаться как угодно мало и которая будет соответствовать рациональному значению n_1/n_2. Пусть тогда

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

где λ_1 и λ_2 — два взаимно простых целых числа. Мы выберем t так, что

$$n_1t+\varpi_1=y_1+2k\pi \quad (k \text{ — целое}).$$

Тогда получаем

$$n_2t+\varpi_2=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(y_1+2k\pi-\varpi_1)+\varpi_2.$$

Если мы положим

$$n_2t+\varpi_2=y_2^0+2k'\pi \qquad (k' \text{ — целое}),$$

то должно выполняться соотношение

$$f(x_1^0,\ x_2^0,\ \ y_1^0,\ y_2^0)=0.$$

Если дано некоторое значение y_2, то можно выбрать целые k и k' так, что разность $y_2-y_2^0$ будет по абсолютной величине меньше чем $2\pi/\lambda_1$. Но мы всегда можем выбрать x_1^0 и x_2^0 так, чтобы эта система значений сколь угодно мало отличалась от x_1 и x_2, и отношение n_1/n_2, будучи рациональным, таким, чтобы целое число λ_1 становилось как угодно большим. Следовательно, если дана некоторая система значений x_1, x_2, y_1 и y_2, то можно найти систему значений, как угодно мало отличающуюся от первой, для которой f будет равна нулю. Поскольку функция f аналитическая, она должна, следовательно, тождественно равняться нулю при $\mu=0$.

В этих условиях, поскольку

$$f[\varphi(t,\ \mu)]=0$$

при любых t и μ, мы получаем во всех точках периодического решения

$$\frac{df}{d\mu}+\frac{df}{dx_1}\frac{d\varphi_1}{d\mu}+\frac{df}{dx_2}\frac{d\varphi_2}{d\mu}+\frac{df}{dy_1}\frac{d\varphi_3}{d\mu}+\frac{df}{dy_2}\frac{d\varphi_4}{d\mu}=0.$$

Это соотношение будет, в частности, верно при

$$\mu=0,\ x_1=x_1^0,\ x_2=x_2^0,\quad y_1=n_1t+\varpi_1,\ y_2=n_2t+\varpi_2.$$

Но, когда $\mu=0$, f тождественно равна нулю, следовательно, и ее производные по x и y равны нулю. Итак,

$$\frac{df}{d\mu}=0$$

при $\mu=0$, $x_i=x_i^0$, $y_i=n_it+\varpi_i$; как и выше, из этого заключаем, что $df/d\mu$ тождественно равна нулю при $\mu=0$.

Таким же способом можно доказать, что $d^2f/d\mu^2$ и другие производные от f по μ равны нулю при $\mu=0$.

Следовательно, функция f — тождественный нуль, и уравнения (2) являются тождествами.

Но если это так, то это означает, что Φ — функция от F, и два интеграла Φ и F не являются различными.

Таким образом, наши уравнения не имеют других аналитических однозначных интегралов, кроме $F=\text{const}$.

Когда я говорю, что эти уравнения не имеют однозначного интеграла, я не хочу сказать, что они не имеют интеграла, который остается аналитическим и однозначным для всех значений величин x, y и μ.

Я хочу сказать, что, кроме интеграла F, эти уравнения не допускают интеграла, который остается аналитическим, однозначным (и периодическим по y_1 и y_2) для всех значений y_1 и y_2 и для достаточно малых μ, когда x_1 и x_2 пробегают некоторую область, как бы мала она ни была.

Как мы знаем, Брунс доказал, что, кроме известных интегралов, задача трех тел не допускает алгебраических интегралов. Таким образом, этот результат подтвержден совсем иным способом.

Я заявил выше, что из уравнений (1), (3) и (4) с необходимостью вытекает одно из трех следствий: или же уравнения (2) удовлетворены, или удовлетворяются уравнения (5), или же уравнения относительно S имеют по меньшей мере три нулевых корня.

Действительно, образуем следующую матрицу с четырьмя строками и пятью столбцами:

$$\left\| \frac{d\psi_i}{d\beta_1}\ \frac{d\psi_i}{d\beta_2}\ \frac{d\psi_i}{d\beta_3}\ \frac{d\psi_i}{d\beta_4}\ \varphi_i'(0) \right\| \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{6}$$

Если уравнения (1) и (4) удовлетворены и уравнения (2) не удовлетворены, мы должны заключить, что все определители, полученные с помощью изъятия из этой матрицы двух столбцов и одной строки, равны нулю.

Если теперь подвергнуть x_1, x_2, y_1 и y_2 линейной замене переменных, то ψ и β подвергнутся этому же линейному преобразованию и матрица (6) сможет быть упрощена.

Можно всегда предположить, что эта линейная замена переменных выбрана так, что

$$\frac{d\psi_i}{d\beta_k}=0 \quad \text{при} \quad i<k.$$

Тогда все произведения по три четырех величин

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1}, \quad \frac{d\psi_2}{d\beta_2}, \quad \frac{d\psi_3}{d\beta_3}, \quad \frac{d\psi_4}{d\beta_4}$$

равны нулю, откуда следует, что по крайней мере две из них равны нулю. Можно всегда предположить, что линейная замена переменных выбрана так, что $d\psi_3/d\beta_3$ и $d\psi_2/d\beta_2$ равны нулю.

Если, кроме того, одна из двух величин $d\psi_1/d\beta_1$ и $d\psi_2/d\beta_2$ также равна нулю, то уравнение относительно S будет иметь три нулевых корня.

Если же, напротив, ни одна из этих двух величин не равна нулю, уравнения (3) позволяют заключить, что

$$\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = 0.$$

Удаляя из матрицы (6) 3-й и 4-й столбы и 3-ю строку или же 3-й и 4-й столбцы и 4-ю строку, получаем

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1}\frac{d\psi_2}{d\beta_2}\varphi_3'(0) = \frac{d\psi_1}{d\beta_1}\frac{d\psi_2}{d\beta_2}\varphi_4'(0) = 0,$$

что может иметь место, лишь если

$$\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = \varphi_3'(0) = \varphi_4'(0) = 0,$$

т. е. если уравнения (5) удовлетворены, или же если

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\psi_2}{d\beta_2} = 0,$$

т. е. если уравнение относительно S имеет три нулевых корня, что и требовалось доказать.

Глава IV

ПОПЫТКИ ОБОБЩЕНИЯ

§ 23. Задача n тел

Можно ли надеяться, что предыдущие результаты возможно распространить на случай, когда уравнения динамики имеют больше двух степеней свободы, а следовательно, на общий случай задачи n тел?

Это возможно, но при этом нельзя будет обойтись без некоторого усилия.

Начиная эту работу, я полагал, что, найдя решение задачи для изучаемого мной частного случая, я смогу немедленно обобщить результат, не встретив никаких трудностей, кроме тех, которые являются следствием большего числа переменных и невозможности геометрической интерпретации. Однако я ошибался.

Я поэтому считаю своим долгом остановиться здесь на характере трудностей, препятствующих этому обобщению.

Если имеется p степеней свободы, то положение системы можно представить положением точки в пространстве $2p-1$ измерений. Многие из выводов первой части остаются верными и только несколько видоизменяются. Следовательно, существует бесконечное множество периодических решений, представленных замкнутыми траекториями и разделяющихся на устойчивые и неустойчивые, или на более многочисленные категории, в зависимости от природы их характеристических показателей. Существует также бесконечное множество асимптотических решений.

Я пытался также распространить на общий случай вычисления § 17, оставив в стороне вопрос сходимости. Действительно, ряды, полученные таким образом, могут быть полезными в некоторых случаях астрономам, даже если они расходятся, и, быть может, приведут геометров к окончательному решению.

Предположим, что имеется три степени свободы, и рассмотрим уравнения (1) § 11, вводя те же предположения, что и в этом параграфе.

Будем искать затем такие три функции от y_1, y_2, y_3

$$x_1 = \Phi_1(y_1, y_2, y_3),$$
$$x_2 = \Phi_2(y_1, y_2, y_3),$$
$$x_3 = \Phi_3(y_1, y_2, y_3),$$

которые удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx_1}{dy_1}\frac{dF}{dx_1}+\frac{dx_1}{dy_2}\frac{dF}{dx_2}+\frac{dx_1}{dy_3}\frac{dF}{dx_3}+\frac{dF}{dy_1}=0,$$
$$\frac{dx_2}{dy_1}\frac{dF}{dx_1}+\frac{dx_2}{dy_2}\frac{dF}{dx_2}+\frac{dx_2}{dy_3}\frac{dF}{dx_3}+\frac{dF}{dy_2}=0,$$
$$\frac{dx_3}{dy_1}\frac{dF}{dx_1}+\frac{dx_3}{dy_2}\frac{dF}{dx_2}+\frac{dx_3}{dy_3}\frac{dF}{dy_3}+\frac{dF}{dy_3}=0,$$

или, что то же самое, уравнениям

$$F=C, \quad \frac{dx_1}{dy_2}=\frac{dx_2}{dy_1}, \quad \frac{dx_3}{dy_2}=\frac{dx_2}{dy_3}, \quad \frac{dx_1}{dy_3}=\frac{dx_3}{dy_1}.$$

Мы предположим, что функции x_1, x_2, x_3 можно разложить по степеням μ или $\sqrt{\mu}$ и что при $\mu=0$ они сводятся к постоянным x_1^0, x_2^0, x_3^0.

Затем, как и выше, положим

$$\frac{dF_0}{dx_1^0}=-n_1, \qquad \frac{dF_0}{dx_2^0}=-n_2, \qquad \frac{dF_0}{dx_3^0}=-n_3.$$

Если между n_1, n_2, n_3 нет никаких линейных соотношений с целыми коэффициентами, то можно разложить x_1, x_2 и x_3 по степеням μ; каждый член периодичен по y_1, y_2 и y_3 одновременно. Но появляются малые знаменатели.

Если между n_1, n_2 и n_3 имеется одно-единственное линейное соотношение с целыми коэффициентами,

$$m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=0,$$

то вычисления могут производиться точно так же, как в § 18. Три функции x_1, x_2 и x_3 могут быть разложены по степеням $\sqrt{\mu}$ и они по меньшей мере двояко-периодические, — я хочу этим сказать, что они не изменяются, когда y_1, y_2 и y_3 возрастают на кратное 2π, так что $m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3$ не меняется, и опять-таки имеются малые знаменатели.

Остается третий случай, самый интересный, когда между n_1, n_2 и n_3 имеются два линейных соотношения с целыми коэффициентами:

$$m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=0,$$
$$m_1'n_1+m_2'n_2+m_3'n_3=0.$$

Тогда можно разложить x_1, x_2 и x_3 по степеням $\sqrt{\mu}$, так что функции будут периодическими. Этим я хочу сказать, что они не будут изменяться, когда y_1, y_2 и y_3 возрастают на кратное 2π, так что $m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3$ и $m_1'y_1+m_2'y_2+m_3'y_3$ не изменяются. Здесь уже нет малых знаменателей, но вычисление функций связано с некоторыми трудностями.

В первом приближении определение этих функций зависит от интегрирования системы дифференциальных уравнений, имеющих канонический вид уравнений динамики, *но только с двумя степенями свободы*. Почти во всех приложениях эти уравнения будут зависеть от очень малого параметра, можно будет применить выводы главы I и II (первой части).

В следующих приближениях остается только выполнить квадратуры.

Но это еще не все; в задаче n тел встречаются особые трудности, которых нет в общем случае. Без сомнения, эти трудности не являются столь же принципиальными, как те, о существовании которых я упоминал выше, их можно преодолеть, если заняться ими более внимательно.

Но я должен сказать об этом несколько слов.

В задаче n тел F_0 не зависит от всех линейных переменных x_i; следовательно, не только гессиан для F_0 по переменным x_i равен нулю, но и гессиан произвольной функции от F_0 тоже равен нулю. Это происходит из-за того, что при $\mu=0$, т. е. в случае кеплерова движения, перигелии зафиксированы.

Этой трудности не существовало в случае, который мы рассматривали (первый пример § 15), потому что мы взяли в качестве переменной не долготу перигелия g, а $g-t$. Не встретилась бы эта трудность и в том случае, когда закон притяжения был отличен от ньютоновского.

Вот какие странные следствия отсюда проистекают.

Мы видели, что имеются два вида периодических решений: решения первого рода, о которых мы говорили в III главе (первой части) и которые продолжали существовать, как бы мало ни было μ, и второго рода, о которых говорили в § 20 и которые исчезали одно за другим по мере уменьшения μ.

В случае задачи трех тел, если положить $\mu=0$, орбиты двух малых тел сводятся к двум кеплеровым эллипсам. Что происходит с периодическими решениями первого рода, если полагаем $\mu=0$? Иначе говоря, каковы периодические решения уравнений кеплерова движения? Одни из них соответствуют случаю, когда два средних движения соизмеримы. Но имеются и другие, которые труднее заметить и на которых я хочу остановиться.

Если $\mu=0$, то это означает, что массы двух планет бесконечно малы и планеты не могут заметным образом влиять друг на друга, *если только не находятся на бесконечно малом расстоянии друг от друга*. Но если эти планеты проходят бесконечно близко друг от друга, их орбиты внезапно изменяются, как если бы планеты столкнулись. Можно так подобрать начальные условия, что эти удары будут происходить периодически и мы таким образом получим разрывные решения, которые являются истинными периодическими решениями задачи кеплерова движения и *которые мы не можем оставлять без внимания*.

Таковы причины, по которым я отказался, по крайней мере в данный момент, от распространения полученных результатов на общий случай. Я не только испытываю недостаток времени, но считаю, что подобная попытка была бы преждевременной.

Действительно, я пока не могу достаточно глубоко изучить даже тот частный случай, которым ограничился. Только после многих исследований и больших усилий геометры смогут полностью изучить эту область, где я смог провести только разведку, и они найдут в ней твердую почву, с которой смогут устремиться к новым завоеваниям.

ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ*

Закон Ньютона — самый простой из законов физики, но математически он выражается дифференциальным уравнением и нужно проинтегрировать это уравнение, чтобы получить координаты светил. Эта задача — одна из труднейших в математике и мы еще весьма далеки от ее решения, несмотря на настойчивые усилия ученых.

I. Как движутся n материальных точек, взаимно притягивающихся обратно пропорционально квадрату их расстояний и прямо пропорционально их массам? Когда $n=2$, т. е. когда рассматривают Солнце и изолированную планету, пренебрегая возмущениями от других планет, интеграция легка: оба тела описывают эллипсы в соответствии с законами Кеплера.

Трудности начинаются тогда, когда число тел (n) равно трем; задача трех тел до сих пор не поддается никаким усилиям аналитиков.

Так как полная и точная интеграция, очевидно, невозможна, астрономы должны были использовать последовательные приближения. Малость масс планет по сравнению с массой Солнца облегчает использование этого метода. Так пришли к разложениям координат светил в ряды по возрастающим степеням масс.

Такой способ разложения в ряд не лишен неудобств, но я укажу только одно. Допустим, что в выражение одной из координат входит периодическое слагаемое очень большого периода и тем большего, чем меньше возмущающие массы, и разложим это слагаемое в ряд по возрастающим степеням масс. Сколько бы членов ряда мы ни взяли, приближенное выражение периодического слагаемого будет неограниченно возрастать, тогда как истинное значение всегда конечно. Так, разлагая $\sin mt$ по возрастающим степеням m и пренебрегая членами с m^5, мы получаем $mt - \frac{1}{6}m^3t^3$ — многочлен, который растет неограниченно, тогда как $\sin mt$ всегда меньше 1. Следовательно, настоящая природа нашей функции от нас полностью скрыта.

---

* Le problème des trois corps. — Revue générale des sciences pures et appliquées, 1891, 2, 1—5.

Все-таки этот метод до сих пор был вполне достаточен для нужд практики; массы действительно настолько малы, что чаще всего можно пренебречь их квадратами и ограничиться, таким образом, первым приближением.

Но нельзя надеяться, что так будет всегда. Действительно, дело не только в том, чтобы вычислить эфемериды светил на несколько лет вперед для нужд навигации или ради того, чтобы астрономы могли снова найти уже известные малые планеты. Конечная цель более глубокая: необходимо установить, и это очень важно, достаточен ли закон Ньютона, чтобы объяснить все астрономические явления? Единственный путь к достижению такой цели — делать наблюдения как можно точнее и в течение долгих лет или даже веков и затем сравнить их с результатами вычислений. Поэтому бесполезно требовать от вычислений большей точности, чем от наблюдений, но не надо требовать и меньшей. Таким образом, приближение, которое нас удовлетворяет сегодня, станет со временем недостаточным. Действительно, даже если допустить, а это весьма невероятно, что измерительные приборы более не совершенствуются, одно лишь накопление наблюдений в течение столетий даст нам более точные значения коэффициентов различных неравенств.

Итак, можно предвидеть такое время, когда придется полностью оставить старые методы, несмотря на совершенство, до которого их довел Леверрье. Мы не будем застигнуты врасплох — Делоне, Хилл, Гильден, Линдштедт придумали новые способы последовательных приближений, способы во всех отношениях более удовлетворительные, чем старые; в частности, они избавлены от указанного мною выше неудобства.

Полученные при этом разложения можно было бы даже считать полным решением задачи трех тел, если бы была установлена их сходимость. К сожалению, дело обстоит не так.

Не обладая сходимостью, такие разложения не могут давать неограниченного приближения; они дадут больше точных десятичных знаков, чем старые приемы, но не дадут их сколько угодно. Забыв об этом, можно прийти к ошибочным выводам. Впрочем, это было бы быстро замечено, ибо выводы, получаемые при применении методов Делоне, отличны от выводов при применении методов Линдштедта и противоречия уже достаточны для заключения, что по крайней мере одно из разложений не сходится.

II. Нельзя ли все же установить что-либо относительно движения трех тел с той абсолютной строгостью, которая привычна для математиков? Если это возможно, не даст ли это твердую основу, опираясь на которую, можно устремиться к новым завоеваниям? Не удастся ли пробить пролом, через который мы войдем, наконец, в крепость? Нельзя не помышлять об этом и это именно придает известную ценность тем немногим теоремам, которые можно строго доказать, даже если бы они не имели сразу астрономических приложений.

Таковы свойства некоторых замечательных частных решений задачи трех тел.

Движение трех светил зависит от их положения и их начальных скоростей. Если заданы эти начальные условия движения, то определено частное решение задачи. Может случиться, что некоторые из этих частных решений более просты, больше поддаются расчету, чем общее решение; может случиться, что при некоторых положениях трех тел законы их движения обладают замечательными свойствами.

Некоторые из таких частных решений интересны только своей странностью, другие же, как увидим, могут быть использованы астрономами. Лагранж и Лаплас уже штурмовали задачу с этой стороны и открыли таким образом одну важную теорему. Может получиться так, что орбиты всех трех тел будут эллипсами. Положение и начальная скорость нашего спутника могли бы быть такими, чтобы Луна была всегда полной; они могли бы быть и такими, чтобы всегда было новолуние; они могли бы быть также такими, чтобы это светило было постоянно освещено Солнцем на 60° в фазе, промежуточной между новолунием и первой четвертью.

Все это очень простые частные решения, но есть более сложные и все же замечательные решения. Если бы условия движения отличались от существующих, фазы Луны могли бы подчиняться очень странным законам. При одном из возможных решений после новолуния Луна растет, но, не достигнув первой четверти, начинает убывать, пока не наступит новолуние, и т. д.; следовательно, она всегда имеет форму полумесяца.

При другом решении, еще более странном, она трижды проходит первую четверть между новолунием и полнолунием и в этом промежутке она сперва растет, затем убывает, чтобы снова начать расти.

Эти траектории слишком многим отличаются от действительных траекторий светил, чтобы когда-либо стать полезными для астрономии. Они только любопытны. Иное дело траектории, к которым я сейчас перейду.

Прежде всего, существуют периодические решения. Это решения, когда расстояния трех тел — периодические функции времени; через повторяющиеся промежутки три тела находятся в тех же относительных положениях. Эти периодические решения — нескольких сортов. В решениях, которые я назвал решениями первого сорта, наклонения равны нулю и три тела движутся в одной плоскости; эксцентриситеты очень малы и орбиты почти круговые; средние движения не соизмеримы; обе планеты проходят одновременно через перигелий, который вовсе не фиксирован, а вращается со скоростью, сравнимой со скоростью самих планет, так что эти два светила находятся в перигелии при каждом соединении. К этому разряду относится впервые открытое периодическое решение, и нашедший его Хилл принял его в качестве исходного в своей теории Луны.

В решениях второго сорта наклонения по-прежнему равны нулю, но эксцентриситеты имеют конечные значения, средние движения близки к соизмеримым, аномалистические периоды (так называют промежуток

времени между двумя последовательными прохождениями светила через перигелий) точно соизмеримы. В определенные моменты обе планеты проходят через перигелий одновременно. В решениях третьего сорта наклонения конечны, орбиты почти круговые, движение перигелиев очень медленное и одинаково с движением узлов, аномалистические периоды соизмеримы и планеты в определенные моменты проходят через перигелий одновременно. Я не касаюсь здесь многочисленных примеров более сложных периодических решений, перечислять которые было бы слишком долгим делом.

Затем имеются асимптотические решения. Чтобы как следует разъяснить, что под этим надо понимать, позволю себе обратиться к простому примеру. Представим себе сперва, что Земля и Солнце изолированы от других тел и, следовательно, движутся согласно законам Кеплера. Предположим также для простоты, что они описывают круговые орбиты. Снабдим теперь Землю двумя спутниками, L_1 и L_2, бесконечно малой массы, так что они не возмутят кругового движения Земли и Солнца и не будут возмущать движение друг друга — каждый из них движется так, как если бы он был единственным. Выберем начальное положение L_1 таким образом, чтобы эта луна описывала периодическую орбиту. Тогда можно задать начальное положение L_2 так, чтобы этот спутник описывал то, что мы назовем асимптотической орбитой. Сначала он находится на значительном удалении от L_1, а затем будет с ним сближаться и по истечении бесконечно большого промежутка времени его орбита будет бесконечно мало отличаться от орбиты L_1. Пусть на Земле находится наблюдатель, медленно поворачивающийся так, чтобы всегда смотреть на Солнце. Солнце будет казаться ему неподвижным, а луна L_1, движение которой периодично, покажется ему описывающей замкнутую кривую C. Тогда луна L_2 опишет для него нечто вроде спирали, витки которой, все более сжимаясь, будут неограниченно приближаться к кривой C. Существует бесконечно много подобных асимптотических орбит. Совокупность этих орбит образует непрерывную поверхность S, которая проходит через кривую C и на которой нанесены только что упоминавшиеся витки *.

Но существует другой разряд асимптотических решений. Может случиться, при подходящем выборе начального положения L_2, что эта луна будет удаляться от L_1; ее орбита отличалась весьма мало от орбиты L_1 в весьма отдаленные времена в прошлом. Для нашего наблюдателя спутник L_2 будет по-прежнему описывать спиральную кривую, витки которой неограниченно приближаются к кривой C, но он будет описывать ее в противоположном направлении, постоянно удаляясь от C. Совокупность этих новых асимптотических орбит образует вторую непрерывную поверхность S', также проходящую через C.

---

* Может случиться (при нулевом наклонении орбит), что S сводится к сколь угодно уплощенной поверхности, образованной наложением нескольких плоских листков, аналогично римановым поверхностям.

Наконец, существует бесконечно много двояко-асимптотических решений, и строго установить это стоило мне большого труда. Может случиться, что спутник L_2, сперва весьма близкий к орбите L_1, сначала очень далеко от него отходит, а затем неограниченно с ним сближается. В весьма отдаленный момент в прошлом луна L_2 находилась на поверхности S' и описывала на ней витки, удаляясь от C, затем она отошла от C, но по истечении большого промежутка времени она окажется на поверхности S и снова будет описывать витки, приближаясь к C.

Пусть L_2, L_3, . . ., L_n — луны, описывающие двояко-асимптотические орбиты. В весьма отдаленную эпоху эти $n—1$ лун движутся по спиралям на S', и проходя по этой поверхности, мы встречаем эти $n—1$ орбит в определенном порядке. По истечении весьма большого промежутка времени наши спутники окажутся на S и снова будут описывать спирали, но проходя по S, мы встретим орбиты этих $n—1$ лун в совсем другом порядке. Этот факт, стоит хоть сколько-нибудь над ним поразмыслить, покажется внушительным доказательством сложности задачи трех тел и невозможности решить ее с помощью современных средств анализа.

III. Нет ни одного астрономического примера системы трех или большего числа тел с такими начальными условиями движения, чтобы орбиты были в точности периодическими или асимптотическими. Впрочем, a priori вероятность такого события, очевидно, равна нулю. Отсюда нельзя сделать вывод, что предыдущие соображения интересны только для математиков и бесполезны для астрономов. Действительно, может случиться и иногда случается, что начальные условия движения мало отличаются от условий, соответствующих некоторому периодическому решению. Тогда исследование такого решения представляет двоякий интерес.

Во-первых, чаще всего такое движение светила связано с неравенством, коэффициент которого весьма велик, но мало отличается от значения, соответствующего строго периодической орбите. Вычисление периодического решения дает тогда этот коэффициент быстрее и точнее, чем старые методы. Так получилось в теории Луны Хилла с вычислением большого неравенства, именуемого вариацией.

Во-вторых, периодическую орбиту можно принять в качестве первого приближения как «промежуточную орбиту» по терминологии Гильдена. Тогда второе приближение сводится к сравнительно легким вычислениям, ибо уравнения линейны, а коэффициенты в них периодические функции. Именно так Хилл вычислил движение перигея и он мог бы так же вычислить движение узла и большое неравенство, известное под названием эвекции.

Я мог бы привести много других примеров. Один из спутников Сатурна движется весьма нерегулярно и его перисатурний вращается очень быстро. Тиссеран применил в теории этого спутника периодические решения первого сорта. Тот же метод применим к исследованной Арцером (Harzer) малой планете, чье среднее движение почти в точности вдвое больше среднего движения Юпитера.

Гаусс считал возможным утверждать, что средние движения Юпитера и Паллады относятся в точности как 7 к 18. Если бы это подтвердилось, что, впрочем, пока сомнительно, теория Паллады свелась бы к теории периодического решения второго сорта.

Но самый поразительный пример — это спутники Юпитера. Открытые Лапласом (это основа его славы) отношения их средних движений, доказывают нам, что их орбиты мало отличаются от периодических. А при более тщательном рассмотрении оказывается, что специальный метод, созданный гением этого великого геометра, не отличается от метода, который мы здесь отстаиваем.

IV. Дифференциальные уравнения задачи трех тел допускают несколько давно известных интегралов: центра тяжести, площадей, живой силы. Представлялось весьма вероятным, что других алгебраических интегралов они иметь не могут, но только в последние годы Брунс смог это строго доказать. Но можно пойти дальше: кроме уже известных интегралов, задача трех тел не допускает никакого аналитического однозначного интеграла. Свойства периодических и асимптотических решений, если их внимательно изучить, достаточны для доказательства этого положения. Отсюда можно сделать вывод, что различные предложенные до сих пор разложения расходятся, так как из их сходимости следовало бы существование однозначного интеграла. Скажем ли мы по этой причине, что задача неразрешима? Это было бы бессмысленно. С 1882 г. мы знаем, что квадратура круга невозможна с помощью циркуля и линейки, однако π известно нам с бо́льшим числом десятичных знаков, чем могло бы дать любое графическое построение. Все, что можно сказать, — это то, что задача трех тел не может быть решена с помощью средств, которыми мы теперь располагаем, и что средства, которые надо придумать и использовать для ее решения, определенно будут сильно отличаться от известных и будут значительно сложнее.

V. Один из вопросов, более всего занимавших исследователей, — вопрос об устойчивости солнечной системы. Правду говоря, это вопрос скорее математический, чем физический. Если бы даже нашли общее и строгое доказательство устойчивости, отсюда не следовало бы еще, что солнечная система вечна. Действительно, на нас могут действовать другие силы, кроме ньютоновых, да и светила — не материальные точки. Энергия системы может понемногу рассеиваться в силу многих причин: мы не можем быть вполне уверены в отсутствии сопротивляющейся среды и, с другой стороны, приливы поглощают энергию, которая беспрестанно превращается в тепло из-за вязкости морей, и эта энергия берется только за счет живой силы небесных тел. Кроме того, если все светила, подобно Земле, магниты, их движения вследствие взаимной индукции должны генерировать в них токи и, следовательно, тепло, что опять-таки происходит за счет их живой силы. Но все эти разрушающие факторы действовали бы гораздо медленнее, чем возмущения, и если последние не в состоянии нарушить устойчивость, солнечной системе было бы обеспечено

значительно более долгое существование. Итак, вопрос об устойчивости остается весьма интересным.

Лагранж замечательно просто доказал, что, если пренебречь квадратами масс, большие оси орбит остаются неизменными, вернее, что их изменение сводится к периодическим колебаниям конечной амплитуды около их средних значений. Пуассон дал доказательство и при условии, что квадраты масс учитываются, а пренебрегаем мы их кубами, но, несмотря на проявленную Пуассоном виртуозность аналитика, в его доказательстве видны изъяны старых методов. Действительно, он доказывает, что большие оси периодически колеблются относительно своих средних значений, но согласно его формулам амплитуда этих колебаний может бесконечно возрастать. Это возрастание связано со способом разложения, и если не пренебрегать некоторыми слагаемыми, можно было бы доказать, что амплитуда остается конечной. После Пуассона стремились найти общее доказательство или, по крайней мере, установить неизменность больших осей, учитывая кубы масс.

Матье (Mathieu) одно время полагал, что ему это удалось, но затем Аретю (Spiru-Aretu) показал, что Матье ошибался. Но это было скорее приговором старым методам, чем доказательством неустойчивости нашей системы. Вопрос оставался открытым.

Все эти исследования потребовали больших трудов, которые теперь кажутся нам бесполезными. Действительно, методы Гильдена и методы Линдштедта, какое бы далекое приближение ни брать, дают только периодические члены, так что элементы орбиты могут только колебаться вокруг своих средних значений. Следовательно, вопрос был бы решен, если бы эти разложения сходились. К сожалению, мы знаем, что дело обстоит иначе.

Не будучи теперь в состоянии решить общую задачу, мы можем ограничиться частным случаем. Представим себе, что три массы, первая — очень большая, вторая — достаточно малая, третья — бесконечно малая, и, следовательно, не возмущающая движения первых двух, движутся в одной и той же плоскости. Предположим также, что две большие массы движутся равномерно и по окружностям. Таким было бы движение Солнца—Юпитера и астероида, если пренебречь наклонением орбит и эксцентриситетом Юпитера. Для такого случая Хилл и Болин доказали, что радиус-вектор астероида всегда меньше некоторой конечной границы.

Однако этого недостаточно для устойчивости: надо еще, чтобы астероид бесконечно много раз проходил сколь угодно близко к своему начальному положению.

Очевидно, что все частные решения (при произвольных начальных условиях) не могут быть устойчивыми в указанном выше смысле: достаточным доказательством этого является существование асимптотических решений. Но, с другой стороны, можно строго доказать возможность такого выбора начальных условий, что светило будет бесконечное число раз проходить вблизи своего начального положения. Итак, существует бесконечно много

частных решений, которые неустойчивы в том смысле, в каком мы выше применяли это слово, и бесконечно много других, устойчивых решений. Добавлю, что первые являются исключительными (это позволяет сказать, что в общем случае имеем устойчивость). Вот что я понимаю под этим, ибо само по себе такое слово лишено всякого смысла. Я хочу сказать, что равна нулю вероятность таких начальных условий движения, которые соответствуют неустойчивому решению. Мне возразят, что эту вероятность можно определить бесконечно многими способами. Но утверждение остается верным, каково бы ни было принятое определение, впрочем, при одном условии. Пусть x и y — координаты третьей массы, x' и y' — составляющие ее скорости. Обозначим через $Pdxdydx'dy'$ вероятность того, что x заключено между x_0 и x_0+dx, y — между y_0 и y_0+dy, x' — между x'_0 и x'_0+dx', y' — между y'_0 и y'_0+dy'. Мы можем определить вероятность как нам угодно и, следовательно, произвольно задать P как функцию от x_0, y_0, x'_0 и y'_0. Все же результат, сформулированный выше, остается верным, какова бы ни была эта функция P, *лишь бы она была непрерывной*.

ТОПОЛОГИЯ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПУАНКАРЕ

1. «Analysis situs». Первые восемь параграфов имеют основной целью построение теории многомерного интегрирования. В § 1—3 даются различные определения гладких многообразий, в § 4 и 8 изучается ориентируемость многообразий, в § 5 и 6 вводятся гомологии и, наконец, в § 7 — когомологии как периоды интегралов. Проблемы, которые ставятся содержанием этого параграфа, были разъяснены Э. Картаном (Ann. Soc. polon. math., 1929, 8, 181—225) и решены теоремой де Рама (J. math. pures et appl., 1931, 10). В § 9 определяется индекс пересечения многообразий и делается первая попытка (в духе Римана и Бетти) доказательства теоремы двойственности, основанная на прямом рассмотрении пересечений. Критика Хегора заставила в дальнейшем Пуанкаре встать на комбинаторную точку зрения и дать совершенно новое доказательство. В § 10 и 11 рассматриваются два способа задания трехмерных многообразий: посредством склеиваний на границе многогранника и как фактор-многообразий по действиям дискретных групп. Второй способ приводит в следующем параграфе к определению фундаментальной группы, которая вычисляется для построенных примеров в § 13. Здесь же формулируется теорема о связи фундаментальной группы и одномерных гомологий, которая применяется к вычислению гомологий построенных примеров. В § 14 изучаются гомеоморфизмы тора и находится фундаментальная группа многообразий, полученных из произведения тора на отрезок склеиванием граничных компонент произведения по некоторому гомеоморфизму. В § 15 вычисляются гомологии симметрического квадрата сферы. В трех последних параграфах доказывается формула Эйлера—Пуанкаре.

2. Дополнение к «Analysis situs». В этом мемуаре излагаются основы комбинаторной топологии полиэдров. В § 1 обсуждаются возражения Хегора на доказательство теоремы двойственности, данное в «Analysis situs». В § 2 определяется схема полиэдра, коэффициенты инциденций и устанавливается основное граничное соотношение, выражающее равенство нулю квадрата граничного оператора. В § 3 и 4 рассматриваются комбинаторные числа Бетти, т. е. определяемые формально из матриц инциденций. В § 4 определяется подразделение полиэдра, а в § 6 устанавливается, что числа Бетти, полученные «арифметическим» путем из таблиц, сохраняются при подразделениях. Этот факт применяется посредством построения подходящего подразделения для доказательства совпадения геометрически определенных чисел Бетти с табличными. Это рассуждение можно считать первым наброском доказательства топологической инвариантности гомологий. В § 7 вводятся барицентрическое подразделение и двойственный полиэдр и без обращения к дальнейшим подразделениям показывается, что числа Бетти данного и двойственного подразделения многообразия совпадают. Это подготавливает следующий параграф, где на основе сравнения чисел Бетти,

полученных из матриц инциденций данного и двойственного полиэдра, доказывается совпадение чисел Бетти дополнительных размерностей. Рассуждение ведется на примере трехмерного полиэдра. Окончательное доказательство, учитывающее кручение, и для всех размерностей, дано во втором дополнении. В § 9 более подробно рассматриваются матрицы инциденций, что подготавливает введение кручений во втором дополнении. В § 10 показывается, что равенство чисел Бетти данного и двойственного подразделений многообразий можно доказать арифметическим путем для абстрактно определенных схем. Последний параграф посвящен триангуляции аналитических многообразий. Изложение здесь недостаточно и в дальнейшем многократно пересматривалось.

3. Второе дополнение к «Analysis situs». В первых двух параграфах детально рассматриваются матрицы инциденций и находятся их инварианты относительно элементарных преобразований. На основе этого изучения в следующем параграфе вводятся коэффициенты кручения. После рассмотрения в § 4 примеров, Пуанкаре распространяет в следующем параграфе свою теорему двойственности на коэффициенты кручения. В последнем параграфе даются достаточные условия для отсутствия кручений.

4. О некоторых алгебраических поверхностях (третье дополнение к «Analysis situs»). Здесь вычисляется фундаментальная группа алгебраического многообразия, определенного уравнением $F(x, y)=0$, где $F(x, y)$ — полином, x и y — комплексные переменные.

5. О циклах алгебраических поверхностей (четвертое дополнение к «Analysis situs»). Здесь определяются группы Бетти алгебраической поверхности с использованием группы Пикара и исчезающих циклов. Более подробное изучение можно найти в книге С. Лефшеца «L'Analysis Situs et la Géometrie Algebrique».

6. Пятое дополнение к «Analysis situs». В основном мемуар посвящен построению примера трехмерного многообразия с гомологиями сферы и с неисчезающей фундаментальной группой.

В п. 2 изучаются невырожденные особые точки гладкой функции на многообразии и построение многообразия с использованием такой функции. Современное изложение см. в книге Милнора «Теория Морса» (Сборник переводов «Математика», 1965). Следующие два пункта посвящены подробному изучению двумерных поверхностей. Находится фундаментальная группа поверхности, исследуется квадратичная форма пересечений на поверхности и доказывается, что группа автоморфизмов группы гомологий, порожденная гомеоморфизмами поверхности, совпадает с группой невырожденных целочисленных матриц, сохраняющих инвариантной форму пересечений. Дается алгоритм для распознавания кривых, гомотопных на поверхности кривым без пересечения. В п. 5 изучаются многообразия, гомеоморфные полному кренделю и, в частности, ядро гомоморфизма фундаментальной группы края кренделя, индуцированного вложением. Пример строится в последнем параграфе, где предварительно рассматривается получение многообразия посредством склеивания двух экземпляров полного кренделя по некоторому гомеоморфизму поверхности, т. е. в сущности, диаграмма Хегора. Находится фундаментальная группа и гомологии получающегося при этом многообразия. Дается критерий для того, чтобы эти гомологии совпадали с гомологиями сферы.

ANALYSIS SITUS *

Введение

Геометрия n измерений занимается исследованием действительности; в этом теперь никто не сомневается. Тела в гиперпространстве поддаются точным определениям, подобно телам из обычного пространства, и если мы не можем их изобразить, то можем представить себе и изучать. И если, например, механика более трех измерений должны быть осуждена, как не имеющая смысла, положение гипергеометрии является совершенно иным.

Действительно, геометрия не имеет своей единственной целью непосредственное описание тел, воспринимаемых нашими органами чувств: прежде всего она является аналитическим исследованием некоторой группы и, следовательно, ничто не препятствует изучению иных групп, аналогичных и более общих.

Однако сразу же возникает вопрос: надо ли заменять язык аналитического исследования языком геометрии, который теряет все свои преимущества, как только исчезает возможность пользоваться чувствами? Оказывается, что этот новый язык более точен; кроме того, аналогия с обычной геометрией может создать ассоциации плодотворных идей и подсказать полезные обобщения.

Возможно, эти доводы не достаточны? В самом деле, для того чтобы наука стала законной, надо, чтобы ее полезность была неоспоримой. Ведь столько различных предметов возбуждают наше внимание, что лишь самые важные имеют на него право.

Так, можно найти разделы гипергеометрии, которыми нет смысла особенно интересоваться: сюда относятся, например, исследования кривизны поверхностей в пространстве n измерений. Совершенно ясно, что полученные результаты не будут отличаться от результатов обычной геометрии, а ведь не предпринимают дальнего путешествия, чтобы увидеть то, что можно найти у себя дома. Существуют, однако, такие проблемы, для которых аналитический язык просто неудобен.

Общеизвестно, насколько полезны геометрические представления в теории мнимых функций и интегралов, взятых в мнимых пределах, и как ощущается их отсутствие при изучении, например, функций от двух комплексных переменных.

---

* Journal de l'École Polytechnique, 1895, 1, 1—121.

Попробуем уяснить себе природу таких представлений: фигуры возмещают, во-первых, несовершенство нашего мышления, призывая к нему на помощь органы чувств, но дело заключается не только в этом. Часто повторяют, что геометрия является искусством хорошо рассуждать над плохо изображенными фигурами, однако последние, чтобы не произошло ошибок, должны удовлетворять определенным условиям: пропорции могут быть грубо изменены, но относительные положения отдельных частей должны быть соблюдены.

Следовательно, употребление фигур прежде всего имеет перед собой цель сообщить нам некоторые соотношения между объектами исследования и как раз этими соотношениями занимается ветвь геометрии, носящая название «Analysis situs», которая описывает взаимные положения точек, линий и поверхностей, безотносительно к их величине.

Соотношения подобной природы существуют также между телами в гиперпространстве; следовательно, существует также Analysis situs более чем трех измерений, как это показали Риман и Бетти.

Эта наука познакомит нас с подобным видом соотношений, хотя такого рода познание уже не может быть интуитивным, так как наши органы чувств отказываются нам здесь служить. Но в определенных случаях она сможет оказать нам некоторые услуги, которые мы обычно требуем от геометрических фигур.

Я ограничусь тремя примерами.

Классификация алгебраических кривых по родам основывается по Риману на классификации замкнутых действительных поверхностей, проведенной с точки зрения Analysis situs. Немедленная индукция показывает, что классификация алгебраических поверхностей и теория их бирациональных преобразований тесно связаны с классификацией замкнутых действительных поверхностей, проведенной с точки зрения Analysis situs, в пространстве пяти измерений. Это было уже указано Пикаром в одном из мемуаров, премированном Академией наук.

С другой стороны, в ряде мемуаров, опубликованных в «Journal de Liouville» и озаглавленных «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями», я применил обычный трехразмерный Analysis situs к изучению дифференциальных уравнений. Подобные же исследования были выполнены Вальтером Дикком. Легко можно видеть, что обобщенный Analysis situs дал бы возможность аналогично исследовать уравнения высших порядков и, в частности, уравнения небесной механики.

Жорданом было предложено аналитическое определение групп конечного порядка, содержащихся в линейной группе с n переменными. Несколько раньше Клейн решил ту же самую проблему для линейной группы с двумя переменными, использовав геометрический метод редкой элегантности. Нельзя ли было бы распространить метод Клейна на группу с n переменными или на *любую непрерывную группу*? До сих пор я не мог решить этого, но много размышлял над самим вопросом и мне кажется, что решение должно зависеть от одной из проблем Analysis situs и что в этом

определенную роль должна сыграть знаменитая теорема Эйлера о многогранниках.

Поэтому я не думаю, что составляя предлагаемый мемуар, произвожу бесполезную работу; жаль только, что он оказывается слишком длинным. Но когда я захотел ограничить себя в этом отношении, то начал терять ясность. Поэтому я предпочел, чтобы меня сочли немного болтливым.

Содержание

§ 1. Первое определение многообразий.
§ 2. Гомеоморфизм.
§ 3. Второе определение многообразий.
§ 4. Противоположные многообразия.
§ 5. Гомологии.
§ 6. Числа Бетти.
§ 7. Применение интегралов.
§ 8. Односторонние и двусторонние многообразия.
§ 9. Пересечение двух многообразий.
§ 10. Геометрическое представление.
§ 11. Представление с помощью дискретной группы.
§ 12. Фундаментальная группа.
§ 13. Фундаментальные эквивалентности.
§ 14. Условия гомеоморфизма.
§ 15. Другие способы образования многообразий.
§ 16. Теорема Эйлера.
§ 17. Случай нечетного n.
§ 18. Второе доказательство.

§ 1. Первое определение многообразий

Пусть заданы n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые можно рассматривать как координаты точки в пространстве n измерений. Условимся впредь до нового соглашения считать эти n переменных всегда действительными.

Назовем любую систему n переменных *точкой*.

Рассмотрим следующую систему, состоящую из p равенств и q неравенств:

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ &F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ &\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0, \\ &\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_q(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Я предполагаю, что функции F и φ являются однозначными и непрерывными и что они имеют непрерывные производные. Более того, я предполагаю, что если построить таблицу

$$\begin{array}{cccc} \frac{dF_1}{dx_1}, & \frac{dF_1}{dx_2}, & \ldots, & \frac{dF_1}{dx_n}, \\ \frac{dF_2}{dx_1}, & \frac{dF_2}{dx_2}, & \ldots, & \frac{dF_2}{dx_n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dF_p}{dx_1}, & \frac{dF_p}{dx_2}, & \ldots, & \frac{dF_p}{dx_n} \end{array}$$

и образовать детерминанты, составляя их из любых p столбцов этой таблицы, то эти детерминанты никогда все одновременно не могут быть равными нулю.

Я утверждаю, что система точек, удовлетворяющих условиям (1), если таковая существует, что я буду предполагать, образует *многообразие размерности* $n-p$ (если, в частности, $p=0$, так что остаются лишь неравенства, то я получаю многообразие размерности n, которое является просто частью n-мерного пространства; я буду называть это многообразие *областью*).

Здесь могут иметь место два случая. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ будут две точки, удовлетворяющие условиям (1). Либо можно непрерывным образом изменять $x_1, x_2, \ldots, x_n$ от $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ до $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ так, чтобы соотношения (1) не переставали удовлетворяться, какими бы ни были значения $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, лишь бы эти значения удовлетворяли условиям (1); либо же это не всегда возможно.

В первом случае мы скажем, что многообразие, определенное условиями (1), является *связным.*

В последующем я буду рассматривать лишь связные многообразия, а что касается тех, которые не являются связными, я ограничусь замечанием, что их всегда можно разложить на конечное или бесконечное число связных многообразий.

Пусть, например, дано многообразие

$$x_2^2+x_1^4-4x_1^2+1=0.$$

Здесь $n=2$, а точка x_1, x_2 есть точка плоскости; наше многообразие будет не чем иным, как кривой четвертой степени, но поскольку эта кривая состоит из двух замкнутых ветвей, многообразие не является связным.

Однако мы можем разложить его на два других, а именно:

$$x_2^2+x_1^4-4x_1^2+1=0, \ x_1 > 0,$$

и

$$x_2^2+x_1^4-4x_1^2+1=0, \ x_1 < 0$$

и каждое из них, поскольку оно сводится к одной замкнутой ветви кривой, связно.

Я буду называть многообразие *конечным*, если все точки удовлетворяют условию

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < K^2,$$

где K заданная постоянная величина.

Рассмотрим теперь систему соотношений

$$\begin{aligned} &F_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p), \\ &\varphi_\beta = 0, \\ &\varphi_\gamma > 0 \qquad (\gamma \neq \beta), \end{aligned} \tag{2}$$

которая состоит из $p+1$ равенств и $q-1$ неравенств.

Может случиться, что нет ни одной точки, удовлетворяющей условиям (2), или же что таковые есть и тогда они образуют многообразие, связное или несвязное, которое будет иметь менее чем $n-p$ измерений.

Совокупность точек, удовлетворяющих одной из q систем соотношений

$$\begin{aligned} &F_\alpha = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_\gamma > 0 \qquad (\gamma \neq 1), \\ &F_\alpha = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_\gamma > 0 \qquad (\gamma \neq 2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_\alpha = 0, \quad \varphi_q = 0, \quad \varphi_\gamma > 0 \qquad (\gamma \neq q), \end{aligned} \tag{3}$$

будет называться *полной границей* многообразия, определенного соотношениями (1). Однако иногда мы будем становиться на другую точку зрения, и будем считать действительными граничными многообразиями лишь те, которые имеют $n-p-1$ измерений.

Может случиться, что не существует ни одного многообразия $n-p-1$ измерений, которое бы удовлетворяло одной из q систем (3). Тогда многообразие, определенное условиями (1), будет называться *неограниченным*. В противоположном случае оно будет называться *ограниченным*.

Если одно многообразие одновременно является конечным, связным и неограниченным, оно будет называться *замкнутым*.

Для краткости многообразия $n-1$ измерений мы будем называть *поверхностями*, за исключением случая $n=2$, и назовем во всех случаях *кривыми* многообразия одного измерения [1].

§ 2. Гомеоморфизм

Рассмотрим подстановку, которая переводит $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ и которую я подчиню только следующим условиям. Имеем

$$x_i' = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

В определенной области функции φ_i однозначны, конечны и непрерывны, их производные также непрерывны и их функциональный детерминант не равен нулю.

Если мы будем решать уравнения (4) относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то получим

$$x_k = \varphi'_k(x'_1, x'_2, \ldots, x'_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

и функции φ'_k удовлетворят тем же условиям, что и функции φ_i.

Очевидно, что совокупность подстановок, которые удовлетворят этим условиям, образует группу, и эта группа является одной из наиболее общих, которые можно вообразить. Наука, объектом которой служит изучение этой группы и некоторых других, ей аналогичных, получила название «Analysis situs».

Совершенно ясно, что подстановка этой группы преобразует многообразие m измерений в многообразие m измерений и что преобразованное многообразие будет связным, или конечным, или неограниченным, если заданное многообразие является таковым (и наоборот).

Пусть даны многообразия V и V' одного и того же числа измерений, определенные соответственно условиями

$$\begin{aligned} &F_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, p), \\ &\varphi_\beta > 0 \quad (\beta = 1, 2, \ldots, q), \end{aligned} \tag{1}$$

и

$$\begin{aligned} &F'_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, p'), \\ &\varphi'_\beta > 0 \quad (\beta = 1, 2, \ldots, q'). \end{aligned} \tag{1bis}$$

Предположим, что можно сопоставить некоторой точке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ многообразия V точку $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ многообразия V', таким образом, чтобы имелось

$$x'_k = \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Я рассматриваю область D, определенную неравенствами

$$F_\alpha > -\varepsilon, \quad F_\alpha < \varepsilon, \quad \varphi_\beta > 0.$$

Очевидно, многообразие V целиком содержится в области D. Я допускаю, что *в области D* функции ψ_k конечны, непрерывны и однозначны, что они имеют непрерывные производные и что их функциональный детерминант нигде не обращается в нуль.

Решим теперь уравнения (5). Получим

$$x_k = \psi'_k(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Я рассматриваю область D', определенную неравенствами

$$F'_\alpha > -\varepsilon, \quad F'_\alpha < \varepsilon, \quad \varphi'_\beta > 0$$

и предполагаю, что *в области* D' функции ψ'_α являются конечными, непрерывными и однозначными, что их производные непрерывны и их функциональный детерминант не равен нулю.

Из этого предположения следует, что каждой точке V соответствует точка V' и только одна, и наоборот; каждому многообразию W, содержащемуся в V, соответствует многообразие W' такого же числа измерений, содержащееся в V'; если W связно, конечно или бесконечно, то же будет и с W', и наоборот.

Если выполнены все эти условия, то мы сможем утверждать, что два многообразия V и V' эквивалентны с точки зрения Analysis situs или, коротко говоря, что они *гомеоморфны*, т. е. имеют подобную форму.

Можно было бы сказать также, что две более сложные фигуры, составленные из некоторого числа многообразий, гомеоморфны, если от одной к другой переходят с помощью преобразования вида (5).

Таким образом два многоугольника с одинаковым числом сторон будут гомеоморфны, два подобно расположенных многогранника с равным числом граней и ребер, будут гомеоморфны и т. д.

§ 3. Второе определение многообразий

Многообразия можно определить также совершенно иным способом. Рассмотрим n уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_1(y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ x_2 &= \theta_2(y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \theta_n(y_1, y_2, \ldots, y_m). \end{aligned} \tag{7}$$

Очевидно, эти уравнения (если рассматривать y как независимые переменные) представляют собой многообразие m измерений. Многообразие m измерений мы будем иметь также, если к уравнениям (7) добавить определенное число неравенств вида

$$\psi(y_1, y_2, \ldots, y_m) > 0,$$

которые ограничат поле изменения переменных y.

Я буду предполагать, что функции θ конечны и непрерывны, но я могу также сделать еще одно допущение, без того чтобы существенно ограничить общность (кстати, это я мог бы сделать и с моим первым определением многообразий).

Я могу предположить, что функции θ являются аналитическими. Если действительно эти функции θ конечны и непрерывны, можно найти

такие функции θ', которые будут аналитическими и которые будут отличаться от θ сколь угодно мало.

Я предполагаю, кроме того, что функциональные детерминанты m функций θ относительно y никогда одновременно не становятся равными нулю.

Многообразие, не отличающееся от первого, получится, если в уравнениях (8) заменить y на m любых аналитических функций от m переменных $z_1, z_2, \ldots, z_m$.

Область действия этого нового определения была бы сильно суженной, если бы ее нельзя было расширить с помощью *метода аналитического продолжения*.

Рассмотрим два многообразия V и V', определенные уравнениями, аналогичными (7). Пусть заданы, например, уравнения

$$x_i = \theta_i (y_1, y_2, \ldots, y_m) \qquad (8)$$

для V и уравнения

$$x_i = \theta'_i (y'_1, y'_2, \ldots, y'_m) \qquad (8\text{bis})$$

для V'.

Может случиться, что эти два многообразия имеют общую часть V'', которая также имеет m измерений, иначе говоря все точки V'' должны одновременно принадлежать V и V'.

В этом случае внутри V'' переменные y будут аналитическими функциями от y', и наоборот.

Будем называть оба многообразия V и V' *аналитическим продолжением* одно другого.

Таким образом, можно образовать некоторую цепь многообразий

$$V_1, V_2, \ldots, V_n,$$

так что каждое из них будет аналитическим продолжением предыдущего и у каждых двух последовательных многообразий будет общая часть. Получится то, что я называю *непрерывной цепью*.

Может случиться, что цепь будет замкнутой, т. е. V_n не будет отличаться от V_1.

Можно получить также сеть многообразий, иначе говоря, совокупность таких многообразий, что каждое из них будет продолжением нескольких других. При этом от любого из многообразий можно перейти к любому другому с помощью аналитического продолжения. Это я буду называть *непрерывной сетью*.

Тогда можно будет рассматривать совокупность всех многообразий, принадлежащих одной и той же цепи или одной и той же сети, как образующую единое многообразие.

Тем самым получаем определение, еще более широкое, чем первое.

Действительно, существуют многообразия (и позже мы познакомимся с примерами их), которые можно разложить на определенное число час-

тичных многообразий, образующих непрерывную цепь или сеть, определяемых каждое уравнениями вида (7), (многообразия, которые, следовательно, соответствуют нашему второму определению) и которые все же не могут быть определены соотношениями вида (1) и не подходят под наше первое определение.

Наоборот, все многообразия, удовлетворяющие первому определению, удовлетворяют также и второму.

В самом деле, в соответствии с хорошо известной теоремой, если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ определены n соотношениями вида

$$\begin{aligned} y_1 &= F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 &= F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{α}$$

если в определенной области F являются голоморфными функциями от x, функциональный детерминант которых не равен нулю, то мы можем решить эти уравнения и получить

$$x_i = \theta_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{β}$$

где θ_i функции от y, голоморфные в определенной области.

Пусть задано многообразие V, удовлетворяющее нашему первому определению, т. е. определяемое соотношениями (1)

$$F_\alpha = 0, \qquad \varphi_\beta > 0.$$

Возвратимся к уравнениям (α) и подставим в них вместо $F_1, F_2, \ldots, F_p$ первые члены p равенств (1). Что касается прочих функций

$$F_{p+1}, \quad F_{p+2}, \ldots, F_n,$$

то это $n-p$ любых голоморфных функций от x. Я подчиню их только одному условию.

Пусть $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ любая точка M_0 многообразия V. Я условлюсь при этом, что функциональный детерминант n функций F не будет равен нулю для

$$x_i = x_i^0.$$

Очевидно, это возможно, поскольку я предположил, что функциональные детерминанты p функций

$$F_1, F_2, \ldots, F_p$$

относительно p любых переменных x никогда не становятся равными нулю все одновременно.

Я могу предположить, кроме того, что F_{p+1}, F_{p+2}, ..., F_n становятся равными нулю в точке M_0, иначе говоря, для

$$x_i = x_i^0.$$

Тогда, в соответствии с теоремой, на которую выше была дана ссылка, можно решить уравнения (α); полученные x_i выразятся в виде рядов, расположенных по степеням

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

и сходящихся, если только эти величины удовлетворяют определенным неравенствам.

Итак, пусть даны уравнения

$$x_i = \theta_i$$

и

$$\lambda_k (y_1, y_2, \ldots, y_n) > 0 \tag{3}$$

условия, которым должны удовлетворить y, чтобы ряды были сходящимися.

Положим теперь

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_p = 0;$$

p первых уравнений (α) более не отличаются от p уравнений (1), и функции θ_i более не зависят от $n-p=m$ переменных и принимают форму (8).

Тогда совокупность соотношений

$$x_i = \theta_i, \quad \varphi_\beta > 0, \quad \lambda_k > 0$$

представит многообразие v, которое будет определено по второму способу и которое, не отличаясь от

$$F_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta > 0, \quad \lambda_k > 0,$$

составит часть V.

Точка M_0 — *произвольная* точка V — принадлежит v. Следовательно, вокруг любой точки V можно построить многообразие, аналогичное v.

Простейшим случаем будет тот, когда условия сходимости $\lambda_k > 0$ являются следствием неравенств $\varphi_\beta > 0$.

Тогда v не отличается от V и для определения v можно удовлетвориться равенствами (8) и неравенствами

$$\psi_\beta > 0, \tag{9}$$

которые получаются подстановкой θ вместо x в неравенства

$$\varphi_\beta > 0.$$

Между прочим заметим, что функциональные детерминанты из m функций θ относительно y никогда все одновременно не становятся равными нулю.

Если бы условия $\lambda_\beta > 0$ не были следствием неравенств $\varphi_\beta > 0$, то многообразие V состояло бы из частичных многообразий. Так, можно было бы, например, многообразие V разложить на два частичных многообразия

$$F_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta > 0, \quad \psi > 0$$

и

$$F_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta > 0, \quad \psi < 0,$$

где ψ — некоторая функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Таким образом, мы всегда можем разбить V на частичные многообразия, или же построить в V некоторое число частичных многообразий, накладывающихся друг на друга и достаточно малых так, чтобы для каждого из них можно было найти систему вспомогательных переменных, которая дала бы возможность представить эти частичные многообразия равенствами и неравенствами вида (8) и (9), удовлетворив таким образом всем установленным мною условиям. Любая точка M_0 многообразия V будет принадлежать одному из этих частичных многообразий и совокупность этих многообразий образует непрерывную сеть. Таким образом мы свели первое определение ко второму.

Остается все же сделать еще одно замечание: может случиться, что двум различным системам значений $y_1, y_2, \ldots, y_m$ соответствует одна и та же система значений функций $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ и, следовательно, одна и та же точка многообразия V.

В этом случае было бы удобным присоединить к неравенствам (9) другие неравенства

$$\psi_\gamma > 0, \tag{10}$$

подбирая их таким образом, чтобы из различных систем значений переменных y, которые соответствуют одной и той же точке V, всегда была бы одна и только одна, удовлетворяющая неравенствам (9) и (10).

Пусть, например, задан тор, уравнение которого

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

Положим

$$x_1 = (R + r\cos y_1)\cos y_2,$$

$$x_2 = (R + r\cos y_1)\sin y_2,$$

$$x_3 = r\sin y_1.$$

Мы видим, что одной и той же точке тора соответствует бесконечное число систем значений y, содержащихся в формуле

$$y_1 + 2K_1\pi, \qquad y_2 + 2K_2\pi,$$

где K — целые числа.

Но если мы подчиним y условиям

$$0 < y_1 < 2\pi, \qquad 0 < y_2 < 2\pi,$$

то получим только одну систему значений y, которые соответствуют одной точке тора.

§ 4. Противоположные многообразия

Между обоими определениями, первым и вторым, следует отметить одно различие, важность которого станет ясной несколько позже.

Предположим сперва, что некоторое многообразие V определено по первому способу, т. е. при помощи соотношений

$$F_\alpha = 0, \qquad \varphi_\beta > 0.$$

Необходимо учесть порядок расположения уравнений $F_\alpha=0$; если два из этих уравнений переставлены, то условимся, что система соотношений представляет уже не V, а *многообразие, противоположное* V [2].

Мы можем теперь заменить уравнения

$$F_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ p)$$

следующими:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= A_{1,1}F_1 + A_{1,2}F_2 + \ldots + A_{1,p}F_p = 0,\\
\Phi_2 &= A_{2,1}F_1 + A_{2,2}F_2 + \ldots + A_{2,p}F_p = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Phi_p &= A_{p,1}F_1 + A_{p,2}F_2 + \ldots + A_{p,p}F_p = 0,
\end{aligned}$$

где $A_{i,k}$ являются любыми функциями от x.

Если детерминант Δ из коэффициентов $A_{i,k}$ не обращается в нуль в рассматриваемой области, то уравнения $\Phi_\alpha=0$ будут эквивалентны уравнениям $F_\alpha=0$ и, следовательно, если к ним добавить определенное число неравенств, то они опять представят многообразие V или противоположное многообразие.

Условимся для удобства, что если Δ (имеющий всегда один и тот же знак, так как я предположил, что он не становится равным нулю) положителен, то эти уравнения представляют многообразие V, а если Δ отрицателен, то они представляют противоположное многообразие.

То же самое относится и ко второму определению. Пусть V многообразие, определенное уравнениями

$$x_i = \theta_i(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m).$$

Следует учитывать порядок переменных y и, если две из этих переменных обменялись местами, то условимся говорить, что уравнения представляют уже не V, а противоположное многообразие.

Предположим, что y заменяются m аналитическими функциями от m новых переменных $z_1, z_2, \ldots, z_m$ таким образом, что будет иметь место

$$x_i = \theta'_i(z_1, z_2, \ldots, z_m),$$

при этом эти новые уравнения опять-таки представят V или противоположное многообразие.

Следует предположить, что функциональный детерминант Δ от y относительно z не равен нулю, если только системе значений y соответствует единственная система значений z. Он всегда будет иметь один и тот же знак.

Условимся, что положительному Δ будут соответствовать новые уравнения, представляющие V; в случае отрицательного Δ они представят противоположное многообразие.

Посмотрим теперь, что происходит при переходе от одного определения к другому.

Пусть задано многообразие V, определенное равенствами

$$F_1 = F_2 = \ldots = F_p = 0$$

и некоторыми неравенствами.

Добавим к этим p уравнениям следующие:

$$y_1 = F_{p+1}, \quad y_2 = F_{p+2}, \ldots, y_{n-p} = F_n,$$

где $F_{p+1}, F_{p+2}, \ldots, F_n$ являются $n-p$ любыми функциями от x.

Мы уже видели, что если функциональный детерминант Δ из n функций $F_1, F_2, \ldots, F_n$ не равен нулю, то можно разрешить эти n уравнений относительно x, в результате чего получаются n уравнений

$$x_i = \theta_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n-p}),$$

которые представляют собой многообразие $n-p$ измерений. Но можно поставить вопрос, представят ли они V или противоположное многообразие.

Условимся говорить, что они представят V в том случае, когда Δ положителен, и противоположное многообразие, если Δ имеет отрицательное значение.

Рассмотрим многообразие $n-p$ измерений

$$F_\alpha = 0, \quad \ldots, \varphi_\beta > 0,$$

которое я называю V. Мы видели, что многообразие $n-p-1$ измерений

$$F_\alpha = 0, \quad \varphi_\gamma = 0, \quad \varphi_\beta > 0, \quad (\beta \neq \gamma),$$

которое я называю v, является частью границы V.

Существенным будет расположить уравнения, определяющие v, в следующем порядке:

$$F_1=0, \quad F_2=0, \ \ldots, \quad F_p=0, \quad \varphi_\gamma=0,$$

так как если обменять местами два из этих уравнений, то как мы согласились говорить, они более не представляют ни границы V, ни какой-либо части этой границы, а многообразие, противоположное этой границе.

§ 5. Гомологии

Рассмотрим многообразие V p измерений; пусть, далее, W — многообразие q измерений ($q \leqslant p$), составляющее часть V. Предположим, что полная граница W состоит из λ связных многообразий q—1 измерений

$$v_1, \ v_2, \ \ldots, \ v_\lambda.$$

Выразим это обстоятельство с помощью обозначения

$$v_1+v_2+\ldots+v_\lambda \sim 0.$$

В более общем случае обозначение

$$k_1v_1+k_2v_2 \sim k_3v_3+k_4v_4,$$

где k — целые числа, а v — многообразия q—1 измерений, означает, что существует многообразие W q измерений, которое является частью V и полная граница которого состоит из k_1 многообразий, мало отличающихся от v_1; из k_2 многообразий, мало отличающихся от v_2; из k_3 многообразий, мало отличающихся от многообразия, противоположного v_3; из k_4 многообразий, мало отличающихся от многообразия, противоположного v_4.

Отношения такого вида можно назвать *гомологиями.*

Гомологии можно комбинировать между собой подобно обычным уравнениям. Будем пользоваться также следующими обозначениями. Предположим, что существует гомология

$$k_1v_1+k_2v_2+\ldots+k_pv_p \sim w_1+w_2+\ldots+w_p$$

и что многообразия $w_1, \ w_2, \ \ldots, \ w_q$ составляют часть границы V; иногда мы будем писать

$$k_1v_1+k_2v_2+\ldots+k_pv_p \sim \varepsilon.$$

§ 6. Числа Бетти

Будем говорить, что многообразия

$$v_1, \ v_2, \ \ldots, \ v_\lambda,$$

с одним и тем же числом измерений, являющиеся частью V, *линейно независимы*, если они не связаны никакой гомологией с целыми коэффициентами.

Если существуют P_{m-1} *замкнутых* многообразий m измерений, являющихся частями V и линейно независимых и если их существует только P_m-1, мы будем говорить, что порядок связности V по отношению с многообразиям m измерений равен P_m.

Таким образом определяются, поскольку это касается многообразия V с m измерениями, $m-1$ чисел, которые я обозначу

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_{m-1}$$

и которые являются порядками связности V по отношению к многообразиям

$$1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$$

измерений. В последующем я буду называть их числами Бетти [3].

Уясним эти определения с помощью примера.

Пусть задана область D, являющаяся частью обычного пространства и ограниченная n замкнутыми поверхностями

$$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n,$$

которые не пересекаются.

Эта область является многообразием трех измерений. Следовательно, ей соответствуют два числа Бетти P_1 и P_2.

Это многообразие определяется неравенствами

$$\varphi_1>0,\quad \varphi_2>0,\quad \ldots,\quad \varphi_n>0,$$

если уравнения n поверхностей S:

$$\varphi_1=0,\quad \varphi_2=0,\quad \ldots,\quad \varphi_n=0.$$

Так как поверхности не пересекаются, то не существует значений x_1, x_2, x_3 таких, которые удовлетворяли бы одновременно двум из уравнений

$$\varphi_i=0,\quad \varphi_k=0.$$

Поверхности S_1, S_2, ..., S_n, имеющие два измерения, будут иметь лишь одно число Бетти, которое является порядком связности Римана; пусть

$$2Q_1+1,\quad 2Q_2+1,\ \ldots,\ 2Q_n+1$$

— порядки связности (нечетные, так как поверхности замкнутые) n поверхностей

$$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n,$$

тогда

$$P_2 = n, \quad P_1 = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n + 1.$$

Таким образом, для внутренней области сферы

$$P_2=1, \quad P_1=1;$$

для области, заключенной между двумя сферами,

$$P_2=2, \quad P_1=1;$$

для внутренней области тора

$$P_2=1, \quad P_1=2;$$

для области, заключенной между двумя торами,

$$P_2=2, \quad P_1=3.$$

§ 7. Применение интегралов [4]

Рассмотрим многообразие V, которое можно представить с помощью неравенств и равенств (8), (9), (10), так, чтобы удовлетворялись все условия, высказанные выше.

В этом случае известно, что следует понимать под многократным интегралом порядка m

$$\int F dy_1, \ dy_2, \ \ldots, \ dy_m,$$

распространенным на многообразие V; совершенно ясно, что под F я понимаю заданную функцию y. Интегрирование следует выполнять последовательно относительно m переменных y, пределы интегрирования определяются неравенствами (9) и (10).

Теперь я определю интегралы вида

$$\int \sum X_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m} dx_{\alpha_1} \ dx_{\alpha_2} \ \ldots \ dx_{\alpha_m}. \tag{11}$$

Дифференциалы $dx_{\alpha_1}, \ dx_{\alpha_2}, \ldots, dx_{\alpha_m}$ являются любыми m из n дифференциалов $dx_1, \ dx_2, \ldots, dx_n$. Функции $X_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}$ — заданные функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и их столько, сколько может быть сочетаний из индексов

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_m,$$

т. е. сколько сочетаний из n букв по m. Следует условиться, что функция X равна нулю, если два из индексов равны между собой, и что она меняет знак в случае перемены местами двух индексов.

Теперь интеграл (11) равен по определению интегралу m-го порядка

$$\int \sum X_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m} \frac{\partial (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_m})}{\partial (y_1, y_2, \ldots, y_m)} dy_1 dy_2 \ldots dy_m.$$

Если оказалось бы, что многообразие V не может быть представлено соотношениями в форме (8), (9) и (10), удовлетворяющими всем указанным условиям, то следует разложить многообразие V на частичные многообразия, достаточно малые, чтобы их можно было представить этим способом, и интеграл (11), распространенный на все многообразие V, будет тогда по определению суммой интегралов (11), распространенных на различные частичные многообразия.

Все же это определение оставляет одну двусмысленность.

Действительно, если поменять местами буквы y_1 и y_2, то интеграл меняет знак. Поэтому существенным будет задаться порядком этих букв, тогда перемена местами двух из них будет эквивалентной перемене знака интегрирования в учении об интегралах. Я буду говорить знак интегрирования, имея в виду порядок, в котором расположены буквы $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Мне пришлось заниматься аналогичным вопросом в одном мемуаре о вычетах двойных интегралов, опубликованном в IX томе «Acta mathematica» и, в частности, в § 3 этого мемуара, озаглавленном «Условия интегрируемости».

Я нашел, в каких случаях эти условия интегрируемости выполняются, иначе говоря, в каких случаях интеграл (11) становится нулем каждый раз, когда интегрирование распространяется на замкнутое многообразие [5].

Вот что я нашел: напишем, чтобы упростить запись,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$$

вместо $X_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}$ и $[\alpha_p]$ вместо x_{α_p}.

Наши условия интегрируемости запишутся так:

$$\frac{d(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)}{d[\alpha_{m+1}]} \pm \frac{d(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{m-1})}{d[\alpha_1]} \pm$$

$$\pm \frac{d(\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \alpha_1)}{d[\alpha_2]} \pm \ldots \pm \frac{d(\alpha_{m+1}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1})}{d[\alpha_m]} = 0. \qquad (12)$$

Закон, по которому следует подбирать знаки $\pm$, таков: следует всегда принимать знак $+$, если m четное, и попеременно знак $+$ и знак $-$, если m нечетное.

Тогда получим столько уравнений (12), сколько будет возможных систем индексов

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1},$$

иначе говоря, поскольку эти индексы следует выбрать среди

$$1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

сколько сочетаний можно составить из n букв по $m+1$.

Предположим теперь, что условия (12), вместо того, чтобы удовлетворяться для всех возможных значений n переменных

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,$$

будут удовлетворяться лишь для некоторых значений этих переменных. Рассмотрим, например, многообразие V, определенное условиями

$$F_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta > 0.$$

Пусть, затем, задана область D, содержащая все точки, соседние с точками V, и определенная, например, условиями

$$-\varepsilon < F_\alpha < \varepsilon, \quad \varphi_\beta > -\varepsilon,$$

где ε — очень малое положительное число.

Предположим, что условия (12) удовлетворены для всех точек области D.

Повторяя рассуждения упомянутого мемуара и соответственно изменяя их, можно показать следующее: пусть задано многообразие V' $m+1$ измерений, которое лежит в V (следовательно, число $m+1$ должно быть меньше, или, по крайней мере, равно числу измерений V).

Предположим, что полная граница V' состоит из k многообразий m измерений

$$W_1,\ W_2,\ \ldots,\ W_k,$$

таким образом, что $W_1+W_2+\cdots+W_k \sim 0$.

Тогда, если интеграл (11) удовлетворяет условиям (12) в области D, то алгебраическая сумма интегралов (11), распространенная на многообразия W_1, W_2, ..., W_k, равна нулю. Совершенно очевидно, что для каждого из них следует обратить внимание на знак интегрирования.

Условия (12) являются достаточными для того, чтобы дело обстояло именно так, но они не необходимы; число этих условий, как мы уже видели, равно числу сочетаний из n букв по $m+1$; для точности того результата, который я сейчас сообщу, было бы достаточным, чтобы интеграл (11) удовлетворялся для всех точек V при числе определенных условий, равном числу сочетаний из $n-p$ букв по $m+1$, где $n-p$ число измерений V.

Сформулировать эти условия было бы нетрудно, но это завело бы меня слишком далеко от моего предмета.

Если теперь интеграл (11) удовлетворяет условиям (12) в области D, то различные значения, принимаемые этим интегралом при его распростра-

нении на различные многообразия из V, замкнутые и имеющие m измерений, будут линейными комбинациями с целыми коэффициентами, составленными из некоторого числа этих значений, которые можно будет назвать периодами интеграла (11).

Наибольшее число периодов равно P_m-1, так как если рассматривать P_m любых замкнутых многообразий m измерений, то всегда найдется многообразие $m+1$ измерений, полной границей которого будут эти P_m многообразий, или некоторые из них. Следовательно, между P_m соответствующими интегралами всегда будет иметь место линейное соотношение с целыми коэффициентами. Между прочим, можно показать, что всегда существуют интегралы вида (11), для которых достигается максимальное число периодов. Этот способ понимания чисел Бетти был использован самим Бетти для первого и последнего из этих чисел, т. е. для P_1 и P_{m-1}, но мы увидим, что нетрудно сделать то же самое и для остальных чисел Бетти.

§ 8. Односторонние и двусторонние многообразия

Рассмотрим многообразие V, определенное по второму способу, т. е. образованное цепочкой или сетью частичных многообразий, каждое из которых само определяется соотношениями в форме (8) и (9).

Пусть задано частичное многообразие v_1, определенное условиями

$$x_i=\theta_i(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m),$$
$$|y_k|<\beta_k.$$

Пусть, далее, v_2 — другое частичное многообразие, определенное условиями

$$x_i=\theta'_i(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_m),$$
$$|z_k|<\gamma_k.$$

Предположим, что оба эти многообразия имеют общую часть v', образующую связное многообразие. Я говорю, что внутри этого многообразия функциональный детерминант

$$\Delta=\frac{\partial(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)}{\partial(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_m)}$$

всегда имеет один и тот же знак.

Действительно, он не сможет изменить знака, не обратившись в нуль или не приняв бесконечного значения. Но

$$\Delta=\frac{\partial(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)}{\partial(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_m)}:\frac{\partial(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)}{\partial(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)},$$

т. е. Δ является отношением двух функциональных детерминантов. Поскольку же оба эти функциональные детерминанта являются существенно конечными, Δ не может стать нулем, если только не будет

$$\frac{\partial (x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial (z_1, z_2, \ldots, z_m)} = 0$$

и так как ничто не отличает m первых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ от $n-m$ других $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$, то, следовательно, функциональный детерминант от m любых x по отношению к z будет нулем.

Следовательно, все функциональные детерминанты от функций должны одновременно стать равными нулю, что по предположению не должно иметь места. Значит Δ не может стать равным нулю; подобным образом можно убедиться, что он также не может стать и бесконечностью.

Значит, Δ всегда имеет один и тот же знак и мы можем выбрать порядок переменных z таким образом, чтобы этот детерминант постоянно оставался положительным.

В определенных случаях может возникнуть некоторое затруднение. Предположим, что общая часть v_1 и v_2 вместо того, чтобы свестись к одному связному многообразию v', состоит из нескольких связных многообразий v', v'', v'''; в каждом из них знак Δ остается постоянным, но он может перемениться при переходе от одного многообразия к другому. В этом случае мы скажем, что многообразие V является *односторонним*.

Предположим, что это обстоятельство не имеет места и рассмотрим последовательность частичных многообразий, образующих замкнутую цепочку

$$v_1, v_2, \ldots, v_q, v_1.$$

Пусть даны

$$y_1^i, y_2^i, \ldots, y_m^i$$

— m переменных, которые играют роль $y_1, y_2, \ldots, y_m$ относительно v_i.

Предположим, что v_1 и v_2 имеют общую часть v_1', v_2 и v_3 — общую часть v_2', ..., v_{q-1} и v_q — общую часть v_{q-1}' и, наконец, v_q и v_1 — общую часть v_q'.

Пусть Δ_i функциональный детерминант от

$$y_1^{i+1}, y_2^{i+2}, \ldots, y_m^{i+1}$$

относительно

$$y_1^i, y_2^i, \ldots, y_m.$$

Этот детерминант определяется внутри v_i'.

Подобным образом я определяю внутри v_q' функциональный детерминант Δ_q от

$$y_1^1, y_2^1, \ldots, y_m^1$$

относительно

$$y_1^q,\ y_2^q,\ \ldots,\ y_m^q.$$

В соответствии с излагаемым, мы всегда можем выбрать порядок переменных таким образом, что

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_{q-1}$$

будут всегда положительными. С другой стороны, Δ_q имеет всегда один и тот же знак, но будет ли этот постоянный знак знаком + или знаком —?

Если этот знак —, я опять назову многообразие V *односторонним*. Я мог бы также сказать, что многообразия $v_1, v_2, \ldots, v_q$ образуют одностороннюю цепочку.

Предположим теперь, что построена некоторая непрерывная цепь из частичных многообразий

$$v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_q \tag{4}$$

таким образом, что все точки V будут внутри (за исключением границы) одного из многообразий (4) или нескольких из них. Если в общей части двух любых многообразий (4) детерминант Δ положителен, я буду называть многообразие V *двусторонним*. Если последнее не является таковым, то совершенно ясно, что с несколькими из многообразий (4) всегда можно образовать одностороннюю цепочку, и что многообразие V будет односторонним. Я мог бы также сказать, что сеть из многообразий (4) образует двустороннюю систему.

Но чтобы полностью оправдать наше определение, надо показать, что V не может одновременно быть односторонним и двусторонним. Совершенно ясно, что в двусторонней системе (4) не может находиться односторонняя цепочка.

Остается, однако, показать, что система (4) останется двусторонней, если добавить к ней любое многообразие v_{q+1}, являющееся частью V.

Пусть v'_i — общая часть v_i и v_{q+1}; всякая точка v_{q+1} будет принадлежать по крайней мере к одному из многообразий v'_i и, так как v_{q+1} связно, то, взяв две точки M_1 и M_k из v_{q+1}, принадлежащие соответственно v'_1 и v'_k, мы сможем найти промежуточные многообразия, которые я могу обозначить (поскольку порядок номеров остается произвольным)

$$v'_1,\ v'_2,\ \ldots,\ v'_k$$

и которые образуют цепочку.

Я могу всегда выбрать порядок переменных, аналогичных y, которые определяют многообразие v_{q+1} так, что в v'_1 детерминант, аналогичный Δ и соответствующий v и v_{q+1}, будет положительным; я обозначу его Δ_1.

Подобно этому, обозначим Δ_i детерминант, аналогичный Δ и соответствующий v_i и a_{q+1}; Δ_i определен внутри v'_i.

Пусть затем Δ — детерминант, соответствующий v_1 и v_2, он будет определен во всей общей части обоих многообразий и, в частности, в общей части v_1' и v_2'; он будет положительным, так как система (4) является двусторонней.

Тогда, в общей части v_1' и v_2' Δ и Δ' будут положительными, откуда следует, что их отношение

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta'}$$

является положительным, и поскольку оно постоянно сохраняет один и тот же знак, то оно будет положительным для всех точек v_2'.

Последовательно доказывается, что $\Delta_3, \ldots, \Delta_k$ также являются положительными.

Итак, система остается двусторонней после присоединения v_{p+1}; таковой она останется и если в выражении уравнений одного из многообразий v_i заменить переменные $y_1, y_2, \ldots, y_m$ на голоморфные функции новых переменных $y_1', y_2', \ldots, y_m'$, функциональный детерминант которых никогда не обращается в нуль (что необходимо, если хотят, чтобы системе значений y соответствовала одна-единственная система значений y'). Совершенно ясно, что надо выбрать порядок новых переменных y' таким образом, чтобы функциональный детерминант был положительным.

Так как система всегда остается двусторонней, то нельзя построить односторонней цепи, а следовательно, многообразие не может быть одновременно двусторонним и односторонним.

Это и следовало доказать.

Всему свету известен пример* односторонней поверхности, которая получается, если взять бумажный прямоугольник $ABCD$ (у которого противоположны в одном направлении AB и CD, а в другом — BC и DA) и затем склеить вместе стороны AB и CD таким образом, чтобы A было склеено с C и B с D.

Еще проще образовать примеры двусторонних многообразий. Так, в пространстве n измерений:

1) всякая область n измерений является двусторонней;

2) всякая кривая 1-го измерения является двусторонней;

3) всякая *замкнутая* поверхность $n-1$ измерений является двусторонней.

Но можно идти и дальше.

Рассмотрим многообразие V, определенное *по первому способу*, т. е. при помощи равенств и неравенств вида (1). Я утверждаю, что оно всегда будет двусторонним.

Действительно пусть

$$F_1 = F_2 = \ldots = F_p = 0$$

* Лист Мёбиуса (*Ж. Л.*).

— p равенств, которые вместе с несколькими неравенствами, мы их не записываем, определяют V. Разобьем V на некоторое число частичных многообразий v, определяемых соотношениями в форме (8) и (9). Пусть

$$v_1, v_2, \ldots, v_q, v_1$$

— некоторое число частичных многообразий, образующих непрерывную цепочку, т. е. таких, что каждое из них имеет общую часть со следующим. Я утверждаю, что эта цепочка всегда будет двусторонней.

Действительно, несколько выше мы предположили, что функциональные детерминанты p функций F по отношению к p любым переменным x никогда все одновременно не обращаются в нуль. Значит, я могу предположить, что многообразия v достаточно малы так, чтобы внутри v_1 один из функциональных детерминантов (который я назову Δ_1) не равнялся нулю; чтобы внутри v_2 другой из этих детерминантов (который я назову Δ_2) не равнялся нулю, и т. д.

Если бы это было не так, то нужно было бы только разбить каждое из многообразий v на еще меньшие многообразия.

Пусть заданы, например,

$$\Delta_1 = \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_p)}{\partial(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_p})},$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_p)}{\partial(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_p})},$$

. . . .

Поскольку порядок букв $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_p}$ остается произвольным, а Δ_1 сохраняет свой знак внутри v_1, я могу всегда предполагать, что Δ_1 положителен внутри v_1. Аналогично, Δ_2 будет положительным внутри v_2, и т. д.

Положим теперь внутри v_1

$$\begin{aligned} &F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_p = 0, \\ &y_1^1 = x'_{\alpha_1}, \quad y_2^1 = x'_{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad y_m^1 = x'_{\alpha_m}. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $m = n - p$; переменные x'_{α_i} являются $m = n - p$ переменными x, которые остаются после удаления p переменных x_{α_i}.

Положим, аналогично, внутри v_2

$$\begin{aligned} &F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_p = 0, \\ &y_1^2 = x'_{\beta_1}, \quad y_2^2 = x'_{\beta_2}, \quad \ldots, \quad y_m^2 = x'_{\beta_m}. \end{aligned} \tag{14}$$

Переменные x'_{β_i} являются теми $m = n - p$ переменными x, которые остаются по удалении p переменных x_{β_i}. И так далее.

Я буду предполагать, что порядок переменных x'_{α_i} выбран таким образом, что можно перейти от нормального порядка переменных x, т. е. от порядка

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

к порядку

$$x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_p}, \quad x'_{\alpha_1}, x'_{\alpha_2}, \ldots, x'_{\alpha_m}$$

при помощи подстановки из альтернирующей группы.

Тогда, решая уравнения (13), мы увидим, что внутри v_1 x являются голоморфными функциями от

$$y_1^1, y_2^1, \ldots, y_m^1$$

и так далее. Вообще, внутри v_i x будут голоморфными функциями от

$$y_1^i, y_2^i, \ldots, y_m^i.$$

Следовательно, речь идет о вычислении детерминанта

$$\frac{\partial (y_1^2, y_2^2, \ldots, y_m^2)}{\partial (y_1^1, y_2^1, \ldots, y_m^1)},$$

или сокращенно

$$\frac{\partial y_i^2}{\partial y_i^1}$$

внутри общей части v_1 и v_2.

Заменим для этого уравнения (13) и (14) более общими уравнениями:

$$F_1 = \lambda_1, \quad F_2 = \lambda_2, \quad \ldots, \quad F_p = \lambda_p, \tag{13bis}$$

$$y_i^1 = x'_{\alpha_i}$$

и

$$F_k = \lambda_k, \quad y_1^2 = x'_{\beta_i}. \tag{14bis}$$

Полагаем затем $\lambda_k = 0$.

Решим теперь уравнения (13bis); получим x как функции от λ_k и y_i^1, голоморфные внутри v_1, и функциональный детерминант из

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

по отношению к

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \quad y_i^1, y_i^2, \ldots, y_i^m$$

очевидно будет равен $1/\Delta_1$.

Подобным образом решим уравнения (14bis); получим x как функ-

ции от λ_k и от y_i^2, голоморфные внутри v_2; их функциональный детерминант будет равен $1/\Delta_2$.

Тогда получим для общих точек v_1 и v_2

$$\frac{\partial y_i^2}{\partial y_i^1}=\frac{\partial(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p,y_1^2,y_2^2,\ldots,y_m^2)}{\partial(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p,y_1^1,y_2^1,\ldots,y_m^1)}=\frac{\Delta_1}{\Delta_2}.$$

Нам остается лишь сделать подстановку $\lambda_k=0$ в выражениях для x. Подобным образом мы найдем, что в общей части v_h и v_{h+1}

$$\frac{\partial y_i^{h+1}}{\partial y_i^h}=\frac{\Delta}{\Delta_{h+1}},$$

и что в общей части v_q и v_1

$$\frac{\partial y_i^1}{\partial y_i^q}=\frac{\Delta_q}{\Delta_1}.$$

Выше мы видели, что значение Δ_i внутри v_i всегда можно предположить положительным. Поэтому все эти отношения являются положительными, а цепочка — двусторонней. Это и следовало доказать.

Следовательно, все многообразия, которые включены в первое определение, являются двусторонними, и так как я приводил выше пример одностороннего многообразия, удовлетворяющего второму определению, то мы должны заключить, что многообразия, удовлетворяющие второму определению, не все удовлетворяют первому. Именно это я и утверждал выше [6].

Каждое одностороннее многообразие является, по определению, *противоположным самому себе*.

§ 9. Пересечение двух многообразий [7]

Пусть заданы два многообразия V и V', определенные по второму способу, одно из которых имеет p измерений, а другое — $n-p$ измерений, и пусть M_0 и M_0' — две точки, принадлежащие, соответственно, V и V' и соответственно имеющие координаты

$$x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0$$

и

$$x_1'^0,\ x_2'^0,\ \ldots,\ x_n'^0.$$

Построим в V вокруг M_0 частичное многообразие v, подобное тем, которые мы рассмотрели в § 3, таким образом, чтобы для некоторой точки x_1, x_2, ..., x_n многообразия v имелось

$$x_i=\theta_i(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_p)\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Подобно этому, построим в V' вокруг M_0' многообразие v' такое, что в точке x_1', x_2', ..., x_n' будет

$$x_i' = \theta_i'(y_1', y_2', \ldots, y_{n-p}') \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Рассмотрим детерминант

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dy_1} & \frac{dx_2}{dy_1} & \cdots & \frac{dx_n}{dy_1} \\ \frac{dx_1}{dy_2} & \frac{dx_2}{dy_2} & \cdots & \frac{dx_n}{dy_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dx_1}{dy_p} & \frac{dx_2}{dy_p} & \cdots & \frac{dx_n}{dy_p} \\ \frac{dx_1'}{dy_1'} & \frac{dx_2'}{dy_1'} & \cdots & \frac{dx_n'}{dy_1'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dx_1'}{dy_{n-p}'} & \frac{dx_2'}{dy_{n-p}'} & \cdots & \frac{dx_n'}{dy_{n-p}'} \end{vmatrix}.$$

Он является функцией от $y_1, y_2, \ldots, y_p, y_1', y_2', \ldots, y_{n-p}'$; эта функция будет зависеть от положения точек M и M' с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ на многообразиях v и v'. Я обозначу ее $f(M, M')$.

Я могу заменить переменные, подставив вместо $y_1, y_2, \ldots, y_p$ голоморфные функции от p новых переменных $z_1, z_2, \ldots, z_p$, выбранные таким образом, чтобы системе значений y соответствовала одна-единственная система значений z. Для этого необходимо, чтобы функциональный детерминант от y по отношению к z не становился нулем и я всегда могу предположить, располагая переменные z подходящим способом, что этот детерминант положителен.

Функция $f(M, M')$ умножается на этот функциональный детерминант и, следовательно, сохраняет свой знак.

Подобное происходит и в случае аналогичной замены переменных на многообразии v'.

Рассмотрим теперь другое многообразие v_1, подобное v, построенное в V, и многообразие v_1', подобное v', построенное в V'.

Пусть M_1 — точка многообразия v_1 и M_1' — точка многообразия v_1'. Мы можем построить функцию, аналогичную $f(M, M')$, и я обозначу ее

$$f_1(M_1, M_1').$$

Предположим теперь, что многообразия v_1 и v (так же как многообразия v_1' и v') имеют общую часть и что точки M и M_1 совпадают, так же как и точки M' и M_1'.

Сравним две функции

$$f(M, M'), \quad f_1(M, M').$$

Предположим, что оба многообразия V и V' являются двусторонними. Мы можем предположить тогда (выбирая подходящим образом порядок переменных y, взятых для v_1), что детерминант, подобный тому, который в § 8 мы обозначили через Δ, и относящийся к v и v_1, является положительным в общей части v и v_1; подобно этому, детерминант, аналогичный Δ и относящийся к v' и v_1', будет также положительным.

Тогда f и f_1 будут иметь один и тот же знак.

Пусть теперь дана $S(M, M')$ — функция, которая будет равна $+1$, -1 или 0, в зависимости от того, будет ли $f(M, M')$ положительной, отрицательной или нулем. Эта функция будет тогда полностью определенной, она будет зависеть лишь от положения точек M и M' на V и V', она не будет зависеть от способа построения v и v' вокруг M и M'.

Это не имело бы места, если бы одно из многообразий V и V' было односторонним, чего я не предполагаю.

Предположим, в частности, что точки M и M' совпадают и, следовательно, точка M будет точкой пересечения V и V'. В этом случае рассмотрение функции $S(M, M')$ является весьма интересным.

Предположим, что функция $S(M, M')$ образована для всех точек пересечения M многообразий V и V' и возьмем сумму всех функций S, полученных таким образом. Эту сумму я обозначу через $N(V, V')$.

Это определение $N(V, V')$ приложимо, если многообразия V и V' были определены в соответствии с § 3. Но его можно упростить если V и V' определены так, как это сделано в § 1. А именно, пусть

$$F_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta > 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, p; \quad \beta = 1, 2, \ldots, q)$$

— условия, определяющие V, и пусть

$$F'_\gamma = 0, \quad \varphi'_\delta > 0 \quad (\gamma = 1, 2, \ldots, n-p; \quad \delta = 1, 2, \ldots, q')$$

— условия, определяющие V'. V будет иметь $n-p$ измерений, а V' — p.

Рассмотрим точку M многообразия V с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и точку M' многообразия V' с координатами $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ и построим детерминант

$$\begin{vmatrix} \frac{dF_1}{dx_1} & \frac{dF_2}{dx_1} & \ldots & \frac{dF_p}{dx_1} & \frac{dF_1'}{dx_1'} & \frac{dF_2'}{dx_1'} & \ldots & \frac{dF_{n-p}'}{dx_1'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{dF_1}{dx_n} & \frac{dF_2}{dx_n} & \ldots & \frac{dF_p}{dx_n} & \frac{dF_1'}{dx_n'} & \frac{dF_2'}{dx_n'} & \ldots & \frac{dF_{n-p}'}{dx_n'} \end{vmatrix},$$

который я обозначу $\psi(M, M')$. Какое соотношение существует между $\psi(M, M')$ и $S(M, M')$?

Чтобы разобраться в этом, положим

$$x'_i = x_i + h_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и будем затем одновременно изменять x'_i и x_i, но таким образом, чтобы их разность λ_i оставалась постоянной.

Положим

$$F_\alpha(x_i) = y_\alpha,$$

$$F'_\gamma(x_i + h_i) = y_\gamma.$$

Если детерминант $\psi(M, M')$ не равен нулю, мы можем решить эти уравнения относительно x_i, откуда получим

$$x_i = \theta_i(y_\alpha, y'_\gamma).$$

Функциональный детерминант θ_i относительно y_α и y'_γ будет тогда $1/\psi(M, M')$.

Если мы примем $y_\alpha = 0$, то получим

$$x_i = \theta_i(0, y'_\gamma),$$

что будет уравнением многообразия $n-p$ измерений, лежащего в V; подобным образом, полагая

$$x'_i = h_i + \theta_i(y_\alpha, 0),$$

получим уравнение многообразия p измерений, лежащего в V'.

Если определить таким образом многообразия v и v' начала настоящего параграфа, то увидим, что функциональный детерминант θ_i является не чем иным, как $f(M, M')$, откуда

$$f(M, M')\,\psi(M, M') = 1.$$

Предположим теперь, что два многообразия V и V' лежат в многообразии W большего числа измерений. Пусть, например,

$$F_\alpha = 0, \qquad \varphi_\beta > 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p; \quad \beta = 1, 2, \ldots, q) \tag{1}$$

— соотношения, определяющие W, которое будет таким образом иметь $n-p$ измерений.

Пусть

$$F'_\gamma = 0, \qquad \varphi'_\delta > 0 \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, p'; \quad \delta = 1, 2, \ldots, q') \tag{2}$$

— соотношения, определяющие совместно с (1) V, которое будет таким образом иметь $n-p-p'$ измерений.

Пусть, наконец,

$$F''_\varepsilon = 0, \quad \varphi''_\zeta > 0 \quad (\varepsilon = 1, 2, \ldots, p''; \ \zeta = 1, 2, \ldots, q'') \tag{3}$$

— соотношения, определяющие совместно с (1) V', которое будет иметь, таким образом, $n-p-p''$ измерений. Я полагаю $p+p'+p''=n$.

Пусть M — точка пересечения V и V'.

Я образую функциональный детерминант для F_α, для F'_γ и для F''_ε относительно x и этот детерминант я обозначу $\psi(M)$.

Тогда $S(M)$ будет по определению равным $+1$ или -1, в зависимости от того, будет ли $\psi(M)$ положительным или отрицательным.

Я обозначу затем через $N(V, V')$ сумму всех $S(M)$ относительно всех точек пересечения V и V'.

Ясно, что если одно из многообразий V или V' будет заменено противоположным многообразием, то выражение $N(V, V')$ меняет знак.

Пусть задано теперь замкнутое многообразие V одного измерения и пусть W — область n измерений, полная граница которой состоит из многообразий $n-1$ измерений

$$V_1, \ V_2, \ \ldots, \ V_k,$$

таким образом, что

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_k \sim 0.$$

Я утверждаю, что

$$N(V, V_1) + N(V, V_2) + \ldots + N(V, V_k) = 0.$$

Действительно, многообразие V будет состоять из определенного числа связных многообразий одного измерения, т. е. из некоторого числа замкнутых линий. Уравнения одной из этих линий можно записать в форме

$$x_i = \theta_i(t),$$

где t переменная, которую мы заставим изменяться от $-\infty$ до $+\infty$.

Поскольку линия замкнутая, то будем иметь

$$\theta_i(-\infty) = \theta_i(+\infty).$$

Рассмотрим теперь точку M пересечения одной из этих линий с границей W; если при возрастании t эта линия переходит изнутри W наружу, будем иметь

$$S(M) = 1.$$

Если она переходит снаружи внутрь, то $S(M)$ будет равняться -1. Но так как линия замкнута, то она вернется в свою исходную точку, а следовательно, сумма всех $S(M)$ должна быть равной нулю.

Это и требовалось доказать.

Предположим теперь, что все многообразия, исследуемые нами, и, например, V, W, V_1, V_2, . . ., V_k лежат в некотором многообразии U и что мы изучаем порядки связности именно этого многообразия U и по отношению к нему берем гомологии.

(Вот что я хочу этим сказать: когда я определял гомологии в § 5, я брал некоторое многообразие V, игравшее важную роль в этом определении; так вот, эту роль теперь будет играть U.)

Я полагаю, что U имеет h измерений, V — одно измерение, W — h измерений, V_1, V_2, . . ., V_k — $h-1$ измерений.

Ничего не меняя в сказанном выше, мы очевидно, получаем, что если V является замкнутым и имеет одно измерение и

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_k \sim 0,$$

то

$$N(V, V_1) + N(V, V_2) + \ldots + N(V, V_k) = 0.$$

Я утверждаю, что это остается верным и тогда, когда многообразие V, имевшее одно измерение, более не замкнуто, но оба его конца лежат на границе U, при условии, что ни одна точка W не лежит на границе U.

Действительно, U оказывается разделенным на две связные или несвязные области, а именно, на W и на область R, лежащую вне W. По предположению, граница U целиком принадлежит R.

Так как линия V не является замкнутой, то начальная точка, соответствующая $t=-\infty$, более не будет совпадать с конечной точкой, соответствующей $t=+\infty$. Однако, по предположению, обе эти точки принадлежат границе U, а следовательно R.

Следовательно, наша линия пройдет точно столько же раз от R к W, как от W к R; следовательно, сумма $S(M)$ равна нулю.

Это и требовалось доказать.

Я установлю теперь обратное.

Пусть заданы k замкнутых многообразий V_1, V_2, . . ., V_k $h-1$ измерений, расположенных в U, причем V_i не имеет ни одной общей точки с границей U. Предположим, что гомология

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_k \sim 0$$

не имеет места; я утверждаю, что можно всегда найти линию V, расположенную в U, которая будет замкнутой или оба конца которой будут лежать на границе U и для которой

$$N(V, V_1) + N(V, V_2) + \ldots + N(V, V_k) \neq 0.$$

Действительно, предположим сперва, что многообразия V_1, V_2, . . ., V_k не разбивают U на несколько различных областей. Тогда можно перейти от любой точки U к любой другой точке U, не встречая никакого из многообразий V_i.

Рассмотрим тогда очень маленькую линию, которая встречается с V_1 в точке M и не встречается ни с каким другим из многообразий V_i. Мы можем соединить оба конца этой линии с помощью другой непрерывной линии, которая не встречается ни с одним из многообразий V_i; таким образом, мы построим замкнутую линию, которая встретится с многообразиями V_i только в одной точке. Следовательно, сумма S (M) не может быть нулем.

Предположим теперь, что многообразия V_i разбивают U на несколько областей R и в то же время линейно независимы. В этом случае ни для какой из областей R ее полная граница не может быть построена из многообразий V_i, иначе между этими многообразиями существовала бы гомология, чего мы не предполагаем.

Следовательно, полная граница R будет состоять из нескольких многообразий V_i и из части границы U. Отсюда следует, что из любой точки R можно пройти к границе U, не выходя из R и не встречаясь ни с одним из многообразий V_i.

Рассмотрим теперь одно из многообразий V_i, например V_1, и отметим маленькую линию, которая пересекает V_1 в точке M. Пусть R и R' будут области, которым принадлежат два конца μ и μ' этой маленькой линии. От μ можно непрерывной линией перейти к границе U, не выходя из R; из μ' можно третьей непрерывной линией перейти к границе U, не выходя из R'.

Вместе эти три непрерывные линии соединят границу U с границей U и если обозначить их сумму через V, то будем иметь

$$N(V,\ V_1)=1,\quad N(V,\ V_i)=0\qquad (i>1).$$

Следовательно, можно выбрать V таким способом, что все N $(V,\ V_i)$ будут нулями, за исключением одной из них, которая будет равна 1.

Предположим, наконец, что между V_i существует некоторое число гомологий, например три,

$$\sum k_i V_i \sim \sum k_i' V_i \sim \sum k_i'' V_i \sim 0. \qquad (\alpha)$$

Тогда мы можем между k многообразиями V_i отыскать k—3, которые будут линейно независимыми; пусть это будут, например, V_1, V_2, . . ., V_{k-3} [8].

Мы можем выбрать V таким образом, чтобы все числа N $(V,\ V_i)$, где $i=1,\ 2,\ \ldots,\ k-3$, были нулями, за исключением какого-то одного из них, которое будет равно 1. Значения

$$N(V,\ V_{k-2}),\quad N(V,\ V_{k-1}),\quad N(V,\ V_k)$$

выводятся с помощью соотношений

$$\sum k_i N(V,\ V_i)=\sum k_i N(V,\ V_i)=\sum k_i N(V,\ V_i)=0, \qquad (\beta)$$

которые являются необходимым следствием гомологий (α).

Не может, следовательно, случиться, что

$$\sum N(V, V_i) = 0, \qquad (\gamma)$$

каково бы ни было то из $k-3$ чисел

$$N(V, V_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, k-3),$$

которое равняется 1. Это может быть лишь в том случае, если уравнение (γ) является необходимым следствием уравнений (β), но тогда гомология

$$\sum V_i \sim 0 \qquad (\delta)$$

была бы необходимым следствием гомологий (α). А ведь мы предположили в начале, что эта гомология (δ) не имеет места.

Следовательно, можно всегда выбрать V таким образом, чтобы равенство (γ) не имело места.

Это и требовалось доказать.

Под сечением будем понимать всякое многообразие, содержащееся в U:

1) в случае, если оно замкнуто;

2) в случае, если оно не замкнуто, но его граница лежит в полной границе U [9].

Мы можем тогда сформулировать следующую теорему, которая резюмирует предыдущие рассуждения.

Для того чтобы можно было (в случае, когда многообразия V_i являются замкнутыми и имеют $h-1$ измерений) подобрать сечение V так, чтобы равенство

$$\sum k_i (V, V_i) = 0$$

не имело места, необходимо и достаточно, чтобы гомология

$$\sum k_i V_i \sim 0$$

не имела места.

Попробуем теперь распространить эту теорему на случай, когда V имеет p измерений и когда $V_1, V_2, \ldots, V_k$ имеют $h-p$ измерений.

Пусть

$$F_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta > 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-h)$$

— уравнения U; пусть

$$F_\alpha = 0, \quad F'_\gamma = 0, \quad \varphi'_\beta > 0 \quad (\gamma = 1, 2, \ldots, h-p)$$

— уравнения V.

Что касается $V_1, V_2, \ldots, V_k$, то мы определим их следующим образом. Мы всегда можем найти $p-1$ уравнений

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \ldots = \Phi_{p-1} = 0,$$

которым удовлетворяют все точки $V_1, V_2, \ldots, V_k$ [10]; так, если $h=3$, $p=2$, если U есть обычное пространство и если $V_1, V_2, \ldots, V_k$ — кривые, то можно всегда при помощи этих кривых, какими бы они ни были, определить поверхность.

Для определения V_i добавим сюда p-е равенство

$$F''_i = 0.$$

Пусть теперь U' — многообразие $h-p+1$ измерений

$$F_\alpha = 0, \quad \Phi_\nu = 0, \quad \varphi_\beta > 0$$

и V' — многообразие одного измерения

$$F_\alpha = F'_\gamma = \Phi_\nu = 0, \quad \varphi_\beta > 0.$$

Будем иметь сперва

$$N(V', V_i) = N(V, V_i).$$

С другой стороны, если гомология

$$\sum k_i V_i \sim 0$$

справедлива относительно U', то она справедлива и относительно U. Правда, обратное неверно, и эта гомология может иметь место относительно U, не будучи справедливой относительно U'. Однако если она имеет место относительно U, всегда можно, подобрав надлежащим образом функции Φ, найти многообразие U' с $h-p+1$ измерениями, относительно которого она будет иметь место [11].

Следовательно, мы должны заключить, что теорема остается верной и тогда, когда V имеет более одного измерения.

Итак, если V_1 и V_2 — два замкнутых многообразия $h-p$ измерений и для всех сечений V с p измерениями имеет место

$$N(V, V_1) = N(V, V_2),$$

то будет также

$$V_1 \sim V_2,$$

и обратно.

Ограничимся случаем, когда U является замкнутым. Тогда U не имеет границы, и все сечения являются замкнутыми.

Число линейно независимых сечений p измерений будет P_p-1. Пусть заданы эти сечения:

$$C_1, C_2, \ldots, C_\lambda \quad (\lambda = P_p - 1).$$

Пусть затем

$$V_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ \mu)$$

— μ замкнутых многобразия $h-p$ измерений.

Необходимое и достаточное условие того, чтобы между ними существовала гомология

$$\sum k_i V_i \sim 0,$$

заключается в том, чтобы имели место равенства

$$\sum k_i N(C_1,\ V_i) = \sum k_i N(C_2,\ V_i) = \ldots = \sum k_i N(C_\lambda,\ V_i) = 0.$$

Иначе говоря, если число μ многообразий V_i больше λ, то всегда можно найти целые k_i, удовлетворяющие этим условиям, так как у нас будет μ произвольных k_i и λ условий, которые следует выполнить. Если же V_i линейно независимы, то

$$\mu \leqslant \lambda.$$

Значит

$$P_{h-p} \leqslant P_p;$$

но, заменяя p через $h-p$, найдем

$$P_p \leqslant P_{h-p}.$$

Следовательно,

$$P_p = P_{h-p}.$$

Отсюда следует, что для замкнутого многообразия числа Бетти, равноотстоящие от концов, равны между собой.

Эта теорема, насколько мне известно, никогда не была высказана; все же она была известна некоторым лицам, которые даже использовали ее.

Посмотрим теперь, что произойдет со средним числом $P_{h/2}$ в случае, если h четно. Предположим, что h будет кратным $4+2$, так что $h/2$ нечетно.

Известно, что когда в детерминанте производится нечетное число перемен строчек, то он меняет знак. При перемене местами V и V_1, которые имеют $h/2$ измерений, детерминант $f\ (M,\ M)$ переменит знак; следовательно, мы получим

$$N(V,\ V_1) = -N(V_1,\ V),$$

откуда

$$N(V,\ V) = 0.$$

Символ $N\ (V,\ V)$ сам по себе не имеет никакого смысла, так как при совпадении двух многообразий V и V число точек пересечения становится бесконечным; следовательно, необходимо уточнить определение. Положим

$$N(V,\ V) = N(V,\ V'),$$

где

$$V \sim V'.$$

Теперь я утверждаю, что $P_{h/2}$ число нечетное. В самом деле, предположим, что оно будет четным и пусть заданы

$$V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_\mu$$

линейно независимых многообразий $h/2$ измерений, где

$$\mu = P_{h/2} - 1$$

— число нечетное.

Построим детерминант, в котором i-й член k-го столбца равен $N(V_i, V_k)$. Члены главной диагонали этого детерминанта будут нулями, а два члена, симметричные по отношению к этой диагонали, будут равны по величине, но с противоположными знаками. Так как число столбцов будет нечетным, то детерминант будет равен нулю. Отсюда следует, вопреки нашему предположению, что многообразия V_1, V_2, ..., V_μ не будут линейно независимыми.

Следовательно, $P_{h/2}$ является нечетным.

Это уже неверно ни в случае, если h кратно четырем, ни в случае, если многообразие U одностороннее, так как все наши рассуждения предполагают двусторонние многообразия. Несколько ниже мы приведем соответствующие примеры.

§ 10. Геометрическое представление

Существует способ представления многообразий трех измерений, расположенных в пространстве четырех измерений, способ, который удивительным образом облегчает их изучение.

Рассмотрим в обычном пространстве некоторое число многогранников

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n.$$

Можно предположить, что в пространстве четырех измерений существует определенное число многообразий трех измерений

$$Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_n,$$

соответственно гомеоморфных P_1, P_2, ..., P_n.

Пусть F_1 — грань многогранника P_1 и Φ_1 — совокупность точек границы Q_1, соответствующих различным точкам F_1. Подобно этому, пусть F_2 — грань P_2 и Φ_2 — *образ* этой грани на границе Q_2.

Может случиться, что Φ_1 совпадает с Φ_2. В этом случае два многообразия Q_1 и Q_2 являются смежными и можно перейти из одного внутрь другого, пройдя через Φ_1.

В этом случае будем называть грани F_1 и F_2 *сопряженными*.

Может случиться, что грани F_1 и F_2 принадлежат *одному и тому же* многограннику P_1. Тогда многообразие двух измерений Φ_1, которое не отличается от многообразия двух измерений Φ_2, отделит две части многообразия Q_1 одну от другой.

Это будет более понятно, если я сошлюсь на пример из обычного пространства. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ и тор, на котором мы проведем два сечения, а именно: меридиональную окружность и параллель; пусть H — точка пересечения этой параллели и этого меридиана. Поверхность разрезанного таким образом тора будет гомеоморфна с прямоугольником; два края сечения, образованного меридианом, соответствуют двум сторонам AB и CD прямоугольника; два края сечения, образованного параллелью, соответствуют двум сторонам AD и BC. Очевидна аналогия с предыдущим: прямоугольник соответствует многограннику P_1, разрезанный тор — многообразию Q_1, стороны AB и CD — двум граням F_1 и F_2, два края меридионального сечения — двум многообразиям Φ_1 и Φ_2, которые, как это видно, совпадают.

Установив это, представим себе, что между гранями n многогранников P_i существует некоторое число сопряженных друг с другом и некоторое число таких, которые остаются *свободными*.

Рассмотрим полное многообразие V, образованное совокупностью многообразий Q_i. Так как некоторые из этих многообразий Q_i являются смежными, можно сделать так, что полное многообразие V будет связным: это то, что я буду предполагать.

Если между гранями P_i нет ни одной, которая остается *свободной*, то многообразие V будет замкнутым. В противоположном случае точки, которые соответствуют граням, остающимся свободными, образуют полную границу V.

Понятно, что знание многогранников и способа сопряжения их граней предоставляет нам в обычном пространстве образ многообразия V и этот образ является достаточным для изучения его свойств с точки зрения Analysis situs.

Посмотрим, как следует определить способ сопряжения граней. Ясно, прежде всего, что для того, чтобы две грани могли быть сопряженными, необходимо, чтобы они имели по одинаковому числу сторон. Затем, чтобы полностью знать способ сопряжения, недостаточно установить, что некоторая грань сопрягается с такой-то другой; необходимо знать, кроме этого, какая вершина или сторона этой грани соответствует такой-то вершине или такой-то стороне ее сопряженной.

Только тогда способ сопряжения будет полностью определен.

Двум сопряженным граням соответствует, по определению, одно и то же многообразие двух измерений, внутреннее по отношению к V. Может оказаться также, что нескольким ребрам многогранника P будет соответствовать одна и та же линия, находящаяся внутри V, или что нескольким вершинам этого многогранника соответствует одна точка

внутри V. Мы скажем тогда, что эти ребра или эти вершины принадлежат к одному и тому же циклу.

Вот как можно образовать циклы ребер и циклы вершин.

Возьмем ребро A_1; грань F'_1, одну из двух граней, ограниченную A_1; грань F_2, сопряженную F'_1; A_2, ребро грани F_2, соответствующее A_1; другую грань F'_2, проходящую через A_2; грань F_3, сопряженную с F'_2; ребро A_3, соответствующее A_2, и т. д.

Следует остановиться, дойдя до свободной грани или по возвращении к A_1. Все ребра A_1, A_2, A_3... образуют цикл.

То же самое и с вершинами. Пусть заданы вершина S_1; одна из граней F'_1, проходящих через S_1; грань F_2, сопряженная с F'_1; вершина S_2, соответствующая S_1; *одна* из граней, проходящих через S_2, F'_2, и т. д.

S_1, S_2, S_3 принадлежат одному и тому же циклу.

Однако в этом случае через каждую вершину проходит более двух граней, следовательно, F'_2 например, можно подобрать несколькими способами; не следует останавливаться, пока не будут исчерпаны все возможности.

Аналогия с образованием циклов в теории фуксовых групп очевидна.

Еще более очевидной станет она, если предположить, что существует лишь один многогранник P_1.

Первый пример. Самым простым примером будет тот, когда есть лишь один многогранник P_1 и этот многогранник является кубом $ABCDA'B'C'D'$, вершины которого имеют соответственно координаты:

A	0 0 0	A'	0 0 1
B	0 1 0	B'	0 1 1
C	1 0 0	C'	1 0 1
D	1 1 0	D'	1 1 1

Я предполагаю, что противоположные грани сопряжены следующим образом:

$$\begin{gathered} ABDC \equiv A'B'D'C' \\ ACC'A' \equiv BDD'B', \\ CDD'C' \equiv ABB'A'. \end{gathered} \tag{1}$$

Вот что я понимаю под этим обозначением: соотношение

$$ABDC \equiv A'B'D'C'$$

означает:

1) что грани $ABDC$ и $A'B'D'C'$ сопряжены;

2) что вершины, относящиеся к первой из этих граней, следуют в таком порядке: $ABDC$;

3) что вершины A и A', B и B', D и D', C и C' соответствуют друг другу.

Заметим, между прочим, что вершины $ABDC$ встречаются на первой из этих граней в таком порядке, что, двигаясь по периметру в соответствующем направлении, мы будем иметь саму грань слева. Наоборот, вершины, соответствующие $A'B'D'C'$, встречаются на второй грани в таком порядке, что при прохождении периметра в этом направлении грань будет находиться справа.

Это условие следует выполнять всегда, *если хотят, чтобы V было двусторонним.* Если две грани F_1 и F_2 являются сопряженными и если какая-либо точка описывает периметр F_1 таким образом, чтобы грань оставалась слева, то соответствующая точка на F_2 должна описывать периметр этой грани, оставляя ее справа.

Итак, мы предполагаем, что способ сопряжения определен при помощи соотношений (1). Очевидно, что все вершины образуют один-единственный цикл и что есть три цикла ребер, включающих соответственно ребра, параллельные осям x, y и z.

Второй пример. Сохраним наш куб, но изменим способ сопряжения и определим его соотношениями

$$\begin{aligned} ABDC &\equiv B'D'C'A', \\ ABB'A' &\equiv DD'C'C, \\ ACC'A' &\equiv DD'B'B. \end{aligned} \tag{2}$$

Очевидно, что у нас будет два цикла ребер и два цикла вершин, и результат можно резюмировать нижеследующими соотношениями; я ставлю здесь знак $\equiv$ между двумя ребрами (или между двумя вершинами), чтобы выразить их принадлежность к одному и тому же циклу.

Имеются два цикла ребер

$$AB \equiv B'D' \equiv C'C \equiv B'A \equiv AC \equiv DD',$$
$$AA' \equiv DC \equiv C'A' \equiv B'B \equiv C'D' \equiv DB;$$

два цикла вершин

$$A \equiv B' \equiv C' \equiv D,$$
$$B \equiv D' \equiv C \equiv A'.$$

Позже мы увидим, что такой способ сопряжения нельзя допустить.

Третий пример. Сохраним наш куб при следующем способе сопряжения:

$$\begin{aligned} ABDC &\equiv B'D'C'A', \\ ABB'A' &\equiv C'CDD', \\ ACC'A' &\equiv DD'B'B. \end{aligned} \tag{3}$$

Находим тогда:

четыре цикла ребер

$$AB \equiv B'D' \equiv C'C, \quad AA' \equiv C'D' \equiv DB,$$
$$AC \equiv DD' \equiv B'A', \quad CD \equiv BB' \equiv A'C';$$

два цикла вершин

$$A \equiv B' \equiv C' \equiv D,$$
$$B \equiv D' \equiv A' \equiv C.$$

Четвертый пример. Пусть теперь будет задано

$$\begin{aligned} ABDC &\equiv B'D'C'A', \\ ABB'A' &\equiv CDD'C', \\ ACC'A' &\equiv BDD'B'. \end{aligned} \tag{5}$$

Находим:

три цикла ребер

$$AA' \equiv CC' \equiv BB' \equiv DD',$$
$$AB \equiv CD \equiv B'D' \equiv A'C',$$
$$AC \equiv BD \equiv D'C' \equiv B'A'$$

и один-единственный цикл вершин.

Пятый пример. Пусть задан правильный октаэдр: у него шесть вершин, из которых четыре образуют квадрат $BCED$ (буквы следуют в том порядке, в котором встречаются четыре вершины при обходе периметра квадрата), а две — A и P — лежат вне квадрата. Пусть

$$\begin{aligned} ABC &\equiv FED, \\ ACE &\equiv FDB, \\ AED &\equiv FBC, \\ ADB &\equiv FCE \end{aligned} \tag{6}$$

— способ сопряжения; находим шесть циклов ребер и три цикла вершин; каждое ребро образует цикл с противоположным ребром, т. е. с тем, которое симметрично ему относительно центра симметрии октаэдра, а каждая вершина образует цикл с противоположной вершиной.

Нет смысла увеличивать дальше число примеров; я предполагаю теперь определить, являются ли приемлемыми все способы сопряжения.

Назовем *астрой* фигуру, образованную определенным числом телесных углов, имеющих одну и ту же вершину и расположенных вокруг этой вершины таким образом, что каждая точка пространства принадлежит к одному и только одному из этих телесных углов.

В этой фигуре мы будем различать, кроме самих телесных углов и их вершины, определенное число граней, общих для двух телесных углов, и определенное число ребер, общих для нескольких телесных углов.

Я мог бы предположить, что ребра и грани бесконечно продолжены или же, что они доходят вплоть до поверхности некоторой сферы, центр которой находится в общей вершине телесных углов. Тогда эти различные телесные углы вырежут на сфере определенное число сферических многоугольников, так что поверхность сферы разделится на сферические многоугольники. Эта поверхность, разделенная изложенным образом, может рассматриваться как гомеоморфная с выпуклым многогранником, грани которого соответствуют сферическим многоугольникам, которые я только что определил.

Следовательно, телесным углам астры соответствуют грани многогранника, граням — ребра многогранника и ребрам астры — его вершины.

Пусть S, F и A — числа телесных углов, граней и ребер астры. Так как многогранник должен удовлетворить теореме Эйлера, то необходимо

$$S-F+A=2.$$

Вернемся теперь к нашим многогранникам

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n$$

и рассмотрим цикл вершин; всем вершинам этого цикла будет соответствовать одна и та же точка V, которую я обозначу M. Между многообразиями

$$Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_n$$

будет несколько таких, у которых точка M лежит на границе; я обозначу их Q_α. Эти многообразия и будут соответствовать многогранникам P_α, которым принадлежат различные вершины цикла.

Рассмотрим теперь два из многообразий Q_α, которые являются смежными, и многообразие двух измерений, служащее им общей границей. Многообразия двух измерений, определяемые таким образом, я обозначу Φ_α, они соответствуют тем граням многогранников P_α, которым принадлежат различные вершины цикла.

Возьмем, наконец, многообразия одного измерения, являющиеся пересечением двух из многообразий Φ_α, их я обозначу L_α. Они будут соответствовать тем ребрам многогранников P_α, которым принадлежат различные вершины цикла.

Изучим фигуру, образованную многообразиями Q_α, Φ_α, L_α, или, скорее, точками этих многообразий, удовлетворяющими неравенству

$$(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+(x_3-x_3^0)^2+(x_4-x_4^0)^2<\varepsilon^2, \qquad (7)$$

где ε — очень маленькая величина; x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0 — координаты точки M.

Эта фигура очевидно будет гомеоморфна с астрой, грани и ребра которой ограничены сферой. Пусть эта астра будет A.

Рассмотрим какое-нибудь из многообразий Q_α и, кроме того, многообразие W, образованное теми из его точек, которые удовлетворяют неравенству (7). Это многообразие будет или не будет связным. Если оно не будет связным, то я разложу его на несколько связных многообразий и обозначу те различные связные многообразия, которые смогу образовать таким образом, через Q'_α. (Таким образом, число этих Q'_α может быть больше числа Q_α, если одно из многообразий W несвязно.)

Подобным образом я определю Φ'_α и L'_α.

Пусть q_α, φ_α, l_α — числа Q'_α, Φ'_α и L'_α; иначе говоря, это — числа телесных углов, граней и ребер астры A.

Отсюда следующее заключение.

Для того чтобы способ сопряжения был приемлемым, необходимо, чтобы для всех циклов вершин было

$$q_\alpha - \varphi_\alpha + l_\alpha = 2.$$

Посмотрим теперь, как можно было бы вычислить числа q_α, φ_α, l_α для некоторого цикла α вершин.

1. q_α будет числом вершин цикла.

2. Для того чтобы получить φ_α, необходимо только найти сумму чисел граней, которые проходят через различные вершины цикла, и разделить ее на два. Если, например, цикл α состоит из трех вершин a, b, c, принадлежащих соответственно многогранникам P_1, P_2 и P_3; если точка a является вершиной трехгранного угла таким образом, что три грани P_1 проходят через a; если четыре грани P_2 пройдут через b и пять граней P_3 через c, то получим

$$\varphi_\alpha = \frac{3+4+5}{2} = 6.$$

3. Для определения l_α перенумеруем ребра, которые сходятся к различным вершинам цикла, следующим образом: все ребра, относящиеся к одному и тому же циклу ребер, будут считаться за одно, если один из концов принадлежит к циклу α; они будут считаться за два, если оба конца принадлежат к циклу α.

Приложим эти правила к тем шести примерам, которые были разобраны нами выше и получим следующую таблицу:

Пример	q_α	φ_α	l_α	Пример	q_α	φ_α	l_α
Первый	8	12	6	Четвертый	8	12	6
Второй	4	6	2	Пятый	2	4	4
Третий	4	6	4				

Необходимо заметить, что во втором, третьем и пятом примерах имеется по нескольку циклов вершин, однако получается, что три числа q_α, φ_α, l_α получают те же самые значения для всех циклов одного примера.

Эта таблица показывает, что соотношение

$$q_\alpha - \varphi_\alpha + l_\alpha = 2$$

удовлетворяется для всех наших примеров, за исключением второго. Поэтому способ сопряжения, принятый во втором примере, следует отбросить.

§ 11. Представление с помощью дискретной группы

Вот другой способ представления, которым иногда также можно пользоваться.

Пусть (x, y, z) — точка в обычном пространстве; рассмотрим ряд подстановок, которые соответственно заменяют x, y и z на

$$\begin{array}{lll} \varphi_1(x, y, z), & \psi_1(x, y, z), & \chi_1(x, y, z) \\ \varphi_2(x, y, z), & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_n(x, y, z), & \psi_n(x, y, z), & \chi_n(x, y, z) \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Предположим, что совокупность этих подстановок образует дискретную группу. Тогда пространство разделится на бесконечное число областей

$$D_0, D_1, D_2, \ldots,$$

и таким образом, что каждой области D будет отвечать одна подстановка группы S, которая переводит D_0 в D_i.

Рассмотрим поверхность Σ, образующую часть границы D_0, отделяющую эту область D_0 от области D_i; подстановка S_i^{-1}, обратная S_i, переводит D_i в D_0 и так как точки Σ принадлежат к границе D_i, поверхность, полученная из Σ в результате преобразования, также будет частью границы D_0.

Таким образом, окажется, что граница D_0 разделена на куски поверхности, которые будут сопряжены между собой по два так, что каждая из них получается из своей сопряженной в результате некоторой подстановки группы.

Область D_0 с границей, разделенной подобным образом, будет гомеоморфна с многогранником, грани которого сопряжены между собой по две, как в предыдущем параграфе. Тогда можно будет, как и в предыдущем параграфе, привести в соответствие с этим многогранником или тем самым с областью D_0 некоторое многообразие, замкнутое и имеющее три измерения, заключенное в пространстве четырех измерений; причем это многообразие можно получить переносом этой области в пространство четырех измерений, с последующей деформацией до тех пор, пока не удастся *склеить* между собой сопряженные куски ее границы.

Аналогия с теорией фуксовых групп слишком очевидна, чтобы на ней стоило настаивать; я ограничусь одним примером.

Шестой пример. Рассмотрим группу, полученную при помощи трех подстановок

$$\begin{aligned}&(x,\ y,\ z;\quad x+1,\ y,\ z),\\ &(x,\ y,\ z;\quad x,\ y+1,\ z),\\ &(x,\ y,\ z;\quad \alpha x+\beta y,\ \gamma x+\delta y,\ z+1),\end{aligned} \tag{1}$$

где α, β, γ, δ — целые числа, такие, что

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1.$$

Я буду называть эту группу группой $(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)$.

Я утверждаю, что она является дискретной.

Чтобы отдать себе в этом отчет, попробуем найти, как распределены в пространстве образы одной и той же точки

$$x=a,\ y=b,\ z=c$$

при преобразованиях группы.

Во-первых, все преобразования этой точки при помощи некоторой комбинации двух первых подстановок будут включены в формулу

$$x=a+k,\ y=b+k_1,\ z=c, \tag{2}$$

где k и k_1 — два целых числа; как легко видеть, обе эти подстановки переместимы.

Преобразуем теперь совокупность точек (2) с помощью третьей подстановки; мы найдем тогда

$$x=\alpha(a+k)+\beta(b+k_1),\qquad y=\gamma(a+k)+\delta(b+k_1),\qquad z=c+1. \tag{3}$$

Положим, для сокращения,

$$\alpha a+\beta b=a_1,\qquad \gamma a+\delta b=b_1;$$

таким образом, точка $(a_1,\ b_1)$ получается из точки $(a,\ b)$ при помощи подстановки

$$(x,\ y;\ \ \alpha x+\beta y,\ \gamma x+\delta y),$$

которую я обозначу s.

Мы сможем теперь заменить уравнения (3) следующими:

$$x=a_1+k',\qquad y=b_1+k_1',\qquad z=c_1+1, \tag{4}$$

где k' и k_1' — два новых целых числа; применяя к этим точкам две первые подстановки, вернемся опять к тем же исходным точкам.

Воспользуемся теперь третьей подстановкой.

Пусть заданы

$$a_2 = \alpha a_1 + \beta b_1, \qquad b_2 = \gamma a_1 + \delta b_1$$

таким образом, что точка a_2, b_2 получится из точки a_1, b_1 с помощью s.

Тогда точки, полученные из (4) с помощью третьей подстановки, включаются в формулу

$$x = a_2 + k'', \qquad y = b_2 + k_1'', \qquad z = c + 2, \tag{5}$$

где k'' и k_1'' будут два целых числа.

Вообще, предположим, что последовательные образы точки (a, b) при помощи подстановки s будут a_1b_1; a_2b_2; . . .; . . .; a_nb_n; . . . и также, что последовательные образы с помощью обратной подстановки будут $a_{-1}b_{-1}$; $a_{-2}b_{-2}$; . . ..

Тогда все преобразования точки (a, b, c) с помощью подстановок группы (1) будут даны формулой

$$x = a_n + k, \qquad y = b_n + k_1, \qquad z = c + n,$$

где n, k и k_1 являются тремя произвольными целыми числами.

Совершенно ясно, что группа, порожденная двумя первыми подстановками, переместима с третьей.

Основная область D_0 является кубом, стороны которого равны 1 и ограничены шестью плоскостями.

$$x;\ y;\ z = 0;\ 1.$$

Простейшим случаем будет тот, когда

$$\alpha = \delta = 1, \qquad \beta = \gamma = 0,$$

так как в этом случае три наших подстановки сводятся к

$$(x,\ y,\ z;\ x+1,\ y,\ z;\ x,\ y+1,\ z;\ x,\ y,\ z+1).$$

Каждая из них переводит одну из граней куба в противоположную грань; поэтому мы просто возвращаемся к первому примеру.

Но способ, при помощи которого поверхность куба D_0 делится на сопряженные области, не всегда является таким простым.

Предположим, например,

$$\alpha = \beta = \delta = 1, \qquad \gamma = 0;$$

тогда каждая из граней, параллельных оси z, будет по-прежнему сопряженной противоположной грани; однако для граней $z=0$, $z=1$, перпендикулярных оси z, дело будет сложнее.

Предположим, что точки граней $ABCD$, $A'B'C'D'$ имеют те же координаты, что и в четырех первых примерах. Каждая из граней $ABCD$,

$A'B'C'D'$ должна быть разделена на два треугольника, а именно, ABC и BCD с одной, $A'D'C'$ и $A'B'D'$ с другой стороны, и закон сопряжения граней будет выражен тогда при помощи соотношений

$$ACC'A' \equiv BDD'A',$$
$$CDD'C' \equiv ABB'A'$$
$$ABC \equiv A'D'C'$$
$$BCD \equiv B'A'D'$$

В более общем случае грани, параллельные оси z, остаются сопряженными по две друг с другом, но грани, перпендикулярные оси z, следует разложить на более мелкие многоугольники, которые будут тем более многочисленными, чем больше числа α, β, γ, δ, и которые будут сопряжены по два в соответствии с более или менее сложным законом.

Простым случаем будет следующий:

$$\alpha = \delta = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -1.$$

В этом случае способ сопряжения тот же самый, что и в нашем пятом примере.

§ 12. Фундаментальная группа

Теперь мы подходим к определению фундаментальной группы многообразия.

Пусть

$$F_1, F_2, \ldots, F_\lambda$$

— λ функций от координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ некоторой точки M многообразия V, определенного соотношениями

$$f_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta > 0.$$

Я не предполагаю, что функции F однозначны. Когда точка M, выйдя из своего начального положения M_0, вернется в это положение после прохождения некоторого пути, может случиться, что функции F не возвратятся к своим первоначальным значениям.

Для большей определенности, хотя это и не дает ничего существенного, предположим, что функции F определены следующим образом. Они должны удовлетворять дифференциальным уравнениям в форме

$$dF_i = X_{i,1}dx_1 + X_{i,2}dx_2 + \ldots + X_{i,n}dx_n, \tag{1}$$

где коэффициенты $X_{i,k}$ являются заданными функциями от x_k и от F_i. Эти функции должны быть однозначными, конечными и непрерывными, так же как и их производные, для всех значений F, причем для всех точек V и даже для всех точек, достаточно близких к V.

Одновременно я предполагаю, что для всех точек, достаточно близких к V, уравнения (1) удовлетворяют условиям интегрируемости, которые можно записать следующим образом:

$$\frac{dX_{i,k}}{dx_q}+\frac{dX_{i,k}}{dF_1}X_{1,q}+\frac{dX_{i,k}}{dF_2}X_{2,q}+\ldots+\frac{dX_{i,k}}{dF_\lambda}X_{\lambda,q}=$$

$$=\frac{dX_{i,q}}{dx_k}+\frac{dX_{i,q}}{dF_1}X_{1,k}+\frac{dX_{i,q}}{dF_2}X_{2,k}+\ldots+\frac{dX_{i,q}}{dF_\lambda}X_{\lambda,k}.$$

Если теперь точка M опишет на многообразии V бесконечно малый контур, то функции F вернутся к своим прежним значениям. То же самое будет, если точка M опишет на многообразии V *петлю*, т. е. если она пойдет сперва от M_0 к M_1 любым путем M_0BM_1, затем опишет бесконечно малый контур и, наконец, возвратится в M_0 тем же самым путем M_1BM_0.

Но так может и не быть, если точка опишет замкнутый конечный контур.

Предположим, например, что мы находимся в обычном пространстве, и что наше многообразие V представляет из себя тор. Очевидно, может случиться, что функции F все еще возвращаются к своим первоначальным значениям, если точка M описывает петлю на этом торе, но этого больше не будет, если точка M опишет меридиональную или параллельную окружность.

Конечные значения функций F, полученные, когда подвижная точка M, выйдя из начальной точки M_0, вернется в нее же после того, как опишет замкнутый контур, эти конечные значения, говорю я, естественно зависят от начальных значений.

Итак, пусть F_a^0 и F_a' — начальное и конечное значения F_a. Значения F_a' будут функциями F_a^0 или, другими словами, функции F испытают, когда точка M опишет рассматриваемый замкнутый контур, определенную замену, которая преобразует F_a^0 в F_a'.

Совокупность всех подстановок, которые испытывают таким образом функции F_1, когда точка M опишет все замкнутые контуры, которые можно провести в многообразии V, исходя из точки M_0, образует, очевидно, группу, которую я обозначу через g.

Теперь рассмотрим замкнутый контур M_0BM_0, описанный на V и исходящий из начальной точки M_0. Если этот замкнутый контур сводится к петле, я запишу это

$$M_0BM_0\equiv 0.$$

Если же M_0AM_1, M_0BM_1, M_0CM_1 являются тремя различными путями, проведенными в V и идущими от M_0 к M_1, я условлюсь записывать это

$$M_0AM_1CM_0=M_0AM_1BM_0+M_0BM_1CM_0.$$

Необходимо заметить, что $M_0AM_1CM_0$ не то же самое, что $M_0CM_1AM_0$, а также $M_0AM_1BM_0+M_0BM_1CM_0$ не то, что

$$M_0BM_1CM_0+M_0AM_1BM_0,$$

так как нельзя менять порядок членов суммы.

Из этого условия вытекает, что

$$M_0BM_0\equiv 0,$$

если замкнутый контур M_0BM_0 образует полную границу многообразия двух измерений, являющегося частью V. В самом деле, этот замкнутый контур можно было бы тогда разложить на очень большое число петель [12].

Таким образом, мы подошли к исследованию соотношений в форме

$$k_1C_1+k_2C_2\equiv k_3C_3+k_4C_4,$$

где k являются целыми числами, а C — замкнутые контуры, описанные на V и исходящие из M_0. Эти соотношения, которые я назову эквивалентностями, похожи на гомологии, изученные мною несколько выше. Отличия заключаются в следующем.

1. В гомологиях контуры могут начинаться в любой начальной точке;
2. В гомологиях можно менять порядок членов суммы.

Можно добавить также одну эквивалентность к другой, но при условии, что порядок членов не будет изменен. Таким образом, если имеется

$$A\equiv B \quad \text{и} \quad C\equiv D,$$

то можно заключить, что

$$A+C\equiv B+D,$$

но не

$$C+A\equiv B+D.$$

Добавим к этому, что из

$$2A\equiv 0$$

нельзя вывести тождества

$$A\equiv 0.$$

Теперь ясно, что можно ввести группу G, удовлетворяющую следующим условиям:

1. Каждому замкнутому контуру M_0BM_0 будет соответствовать подстановка S группы.

2. Для того чтобы S сводилась к тождественной подстановке, необходимо и достаточно, чтобы

$$M_0BM_0\equiv 0.$$

3. Если S и S' соответствуют контурам C и C' и если

$$C'' \equiv C + C',$$

то подстановкой, соответствующей C'', будет SS'.

Группу G будем называть *фундаментальной группой* многообразия V. Сравним ее с группой g подстановок, испытываемых функциями F.

Группа g будет гомоморфна G.

Гомоморфизм может быть взаимно однозначным.

Он может не быть взаимно однозначным, если какой-нибудь замкнутый контур M_0BM_0, не разложимый на петли, приводит функции F к их исходным значениям.

§ 13. Фундаментальные эквивалентности

Группа G порождена некоторым определенным числом основных подстановок $S_1, S_2, \ldots, S_p$. Каждой из них будет соответствовать замкнутый контур, так что мы будем иметь *p замкнутых фундаментальных контуров* $C_1, C_2, \ldots, C_p$, и любой замкнутый контур будет эквивалентен комбинации фундаментальных контуров, следующих в определенном порядке.

Эти фундаментальные контуры, вообще говоря, не являются совершенно независимыми и между ними существуют определенные соотношения, которые я назову *фундаментальными эквивалентностями*.

Предположим, например, что между фундаментальными контурами имеется эквивалентность

$$k_1C_1 + k_2C_2 + k_1'C_1 + k_3C_3 \equiv 0.$$

Это означает, что подстановка $S_1^{k_1}S_2^{k_2}S_1^{k_1'}S_3^{k_3}$ группы G сводится к тождественной подстановке.

Фундаментальные эквивалентности полностью определяют нам форму группы G [13].

Предположим, что многообразие V было определено по способу представления, описанному в § 10, и что у нас есть только один многогранник P_1. Совершенно ясно, что все фундаментальные контуры получаются следующим образом. Пусть M_0 — некоторая точка внутри P_1, A — точка на одной из граней P_1, A' — соответствующая ей точка на сопряженной грани. Будем продвигаться от M_0 к A, затем от A' к M_0, не выходя из P_1; соответствующий путь на многообразии V будет замкнутым.

Следовательно, будет столько же фундаментальных контуров, сколько есть пар граней.

Вот как образуются фундаментальные эквивалентности.

Рассмотрим цикл ребер. Пусть, например, задано ребро, пересечение граней F_1 и F'_μ, которое я по этой причине назову *ребром* $F_1F'_\mu$; пусть F'_1 будет грань, сопряженная с F_1, и $F_2F'_1$ — ребро, соответствующее $F_1F'_\mu$ на этой грани; пусть F'_2 будет грань, сопряженная с F_2, и $F_3F'_2$ — ребро,

соответствующее $F_2F'_1$ на этой грани, и т. д., пока мы не придем к грани F'_μ и ребру $F_1F'_\mu$.

Заметим, что, производя эту операцию, можно несколько раз попасть на одну и ту же грань.

Пусть A_i — точка F_i и A'_i — соответствующая точка F'_i; пусть C_i — фундаментальный контур

$$M_0A_i + A'_iM_0.$$

Тогда будем иметь фундаментальную эквивалентность

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_\mu \equiv 0.$$

Следовательно, будет столько же фундаментальных эквивалентностей, сколько циклов ребер.

После того как таким образом образованы фундаментальные эквивалентности, из них выводятся и фундаментальные гомологии [14], которые отличаются от них лишь тем, что порядок членов в последних безразличен. Знание этих гомологий немедленно влечет за собой знание числа Бетти P_1.

Применим эти принципы к вышеразобранным примерам и заметим, что все многообразия, упомянутые в этих примерах, являются замкнутыми и имеют три измерения. Будем иметь

$$P_1 = P_2.$$

Первый пример.

$$ABDC \equiv A'B'D'C', \qquad (C_1)$$

$$ABB'A' \equiv CDD'C', \qquad (C_2)$$

$$ACC'A' \equiv BDD'B'. \qquad (C_3)$$

Вот что я понимаю под обозначением

$$ABDC \equiv A'B'D'C'. \qquad (C_1)$$

Я хочу сказать, что грань $ABDC$ сопряжена с $A'B'D'C$ и что если α обозначает точку на $ABDC$ а α' — сопряженную точку на $A'B'D'C'$, то фундаментальный контур $M_0\alpha + \alpha' M_0$ обозначается через C_1.

Фундаментальные эквивалентности

$$C_1 + C_2 \equiv C_2 + C_1, \quad C_1 + C_3 \equiv C_3 + C_1, \quad C_2 + C_3 \equiv C_3 + C_2.$$

Фундаментальные гомологии сводятся к тождествам, поэтому

$$P_1 = P_2 = 4.$$

Я сразу же перехожу к третьему примеру, так как мы видели, что второй пример следует отбросить.

Третий пример.

$$ABDC \equiv B'D'C'A', \quad (C_1)$$

$$ABB'A' \equiv C'CDD', \quad (C_2)$$

$$ACC'A' \equiv DD'B'B. \quad (C_3)$$

Фундаментальные эквивалентности

$$C_1 + C_3 + C_2 \equiv 0, \quad C_1 - C_3 - C_2 \equiv 0,$$

$$C_2 - C_1 - C_3 \equiv 0, \quad C_3 - C_2 - C_1 \equiv 0,$$

что можно также записать

$$2C_1 \equiv 2C_2 \equiv 2C_3, \quad 4C_1 \equiv 0.$$

Фундаментальные гомологии

$$C_1 \sim C_2 \sim C_3 \sim 0,$$

откуда

$$P_1 = P_2 = 1.$$

Этому результату можно дать простую геометрическую интерпретацию.

Группа G имеет конечный порядок и состоит только из восьми различных подстановок, соответствующих следующим контурам:

$$0, \ C_1, \ C_2, \ C_3, \ 2C_1, \ 3C_1, \ 3C_2, \ 3C_3.$$

Эта группа изоморфна следующей группе:

$$(x, \ y, \ z, \ t; \quad -y, \ x, \ -t, \ z;$$

$$-t, \ -z, \ y, \ x; \quad z, \ -t, \ -x, \ y;$$

$$-x, \ -y, \ -z, \ -t; \quad y, \ -x, \ t, \ -z;$$

$$t, \ z, \ -y, \ -x; \quad -z, \ t, \ x, \ -y).$$

Эта группа, которая преобразует самого в себя гиперкуб четырех измерений, восемь граней которого имеют уравнения

$$x = \pm 1, \quad y = \pm 1, \quad z = \pm 1, \quad t = \pm 1,$$

могла бы быть названа *гиперкубической*.

Четвертый пример.

$$ABCD \equiv B'D'C'A', \quad (C_1)$$

$$ABB'A' \equiv CDD'C', \quad (C_2)$$

$$ACC'A' \equiv BDD'B'. \quad (C_3)$$

Фундаментальные эквивалентности

$$C_2+C_3\equiv C_3+C_2,\quad C_3+C_1\equiv C_1+C_2,\quad -C_2+C_1\equiv C_1+C_3.$$

Фундаментальные гомологи

$$C_2\sim C_3\sim 0,$$

откуда

$$P_1=P_2=2.$$

Пятый пример.

$$ABC\equiv FED, \qquad (C_1)$$
$$ACE\equiv FDB, \qquad (C_2)$$
$$AED\equiv FBC, \qquad (C_3)$$
$$ADB\equiv FCE. \qquad (C_4)$$

Фундаментальные эквивалентности

$$C_1\equiv C_2\equiv C_3\equiv C_4,\qquad 2C_1\equiv 0,$$

откуда

$$C_1\sim C_2\sim C_3\sim C_4\sim 0$$

и

$$P_1=P_2=1.$$

Группа G сводится к двум подстановкам, соответствующим нулевому контуру 0 и контуру C_1.

Шестой пример. Группа G, очевидно, изоморфна с группой (α, β, γ, δ). Три подстановки

$$(x,\ y,\ z;\quad x+1,\ y,\ z),$$
$$(x,\ y,\ z;\quad x,\ y+1,\ z),$$
$$(x,\ y,\ z;\quad \alpha x+\beta y,\ \gamma x+\delta y,\ z+1)$$

соответственно отвечают фундаментальным контурам C_1, C_2 и C_3.

Рассмотрим фундаментальные эквивалентности

$$C_1+C_2\equiv C_2+C_1,$$
$$C_1+C_3\equiv C_3+\alpha C_1+\gamma C_2,$$
$$C_2+C_3\equiv C_3+\beta C_1+\delta C_2,$$

откуда сперва выводим, что любую комбинацию фундаментальных контуров можно выразить в форме

$$m_3C_3+m_1C_1+m_2C_2,$$

где m — целые числа. И так как это выражение не может быть эквивалентно 0, если только все три m не станут нулями, то отсюда вытекает, что это выражение дает нам все фундаментальные эквивалентности.

Фундаментальные гомологии

$$(\alpha - 1) C_1 + \gamma C_2 \sim 0,$$
$$\beta C_2 + (\delta - 1) C_2 \sim 0.$$

Если эти две гомологии не различны, то

$$C_1 \sim C_2 \sim 0,$$

откуда

$$P_1 = P_2 = 2.$$

Это то, что получается в общем случае и, в частности, в нашем четвертом примере.

Если детерминант этих гомологий равен нулю, т. е.

$$(\alpha - 1)(\delta - 1) - \beta\gamma = 0,$$

где

$$\alpha + \delta = 2,$$

то будем иметь

$$P_1 = P_2 = 3,$$

за исключением того случая, когда две гомологии сводятся к тождествам. Это случается для

$$\alpha = \delta = 1, \qquad \beta = \gamma = 0,$$

т. е. для нашего первого примера. В этом случае будет

$$P_1 = P_2 = 4.$$

§ 14. Условия гомеоморфизма

Известно, что два замкнутых многообразия двух измерений, имеющие одни и те же числа Бетти, являются гомеоморфными. Этот факт следует, например, из изучения периодов абелевых функций. Рассмотрим риманову поверхность R и пусть z будет соответствующей мнимой переменной; можно ввести новую мнимую переменную t, такую, чтобы z было фуксовой функцией от t и чтобы t, рассматриваемое как функция от z, не имела никакой особой точки на поверхности R. Все эти фуксовы группы, соответствующие различным римановым поверхностям, имеющим тот же порядок связности, будут изоморфными.

Подобная фуксова группа будет, в конце концов, не чем иным, как фундаментальной группой g, отнесенной к поверхности R, которая рассматривается как многообразие двух измерений.

Заметим, что не все фуксовы группы способны определить подобным образом замкнутое многообразие двух измерений. Рассмотрим фуксов фундаментальной многоугольник R_0. Если фуксова функция существует во всей плоскости, то к последнему следует добавить симметричный ему по отношению к действительной оси многоугольник, который обозначим R_0'. Однако в этом случае область R_0+R_0' не всегда будет просто связной. Каждой точке замкнутого многообразия V должна соответствовать точка R_0 (или R_0+R_0'), причем только одна, и наоборот. Предположим, что существует один или несколько циклов вершин, и что сумма углов этого цикла будет равна нулю или $2\pi/n$, где n — целое число, большее 1. Пусть затем M будет точкой V, соответствующей этому циклу вершин. Рассмотрим бесконечно малую петлю, охватывающую M. В соответствии с определением группы g, в группе g этой петле должна соответствовать тождественная подстановка, а в фуксовой группе — не тождественная подстановка. Следовательно, фуксова группа не может быть изоморфной с g.

Следовательно, остаются фуксовы группы первого семейства такие, что сумма углов любого цикла равна 2π, и группы третьего семейства. Но эти последние также следует отбросить. Действительно, если группа относится к третьему семейству, то область R_0+R_0' более не является просто связной.

Пусть задан замкнутый контур C, пробегаемый в этой области, такой, что для него не имеет места

$$C \sim 0.$$

Этому контуру будет в фуксовой группе соответствовать тождественная подстановка (так как переменная z возвратится в свою исходную точку), а в группе g — подстановка не тождественная. Здесь опять фуксова группа не может быть изоморфной с g.

Следовательно, остаются лишь группы первого семейства и лишь такие, для которых сумма углов каждого цикла будет равной 2π.

Все те из этих групп, которые относятся к одному роду, изоморфны друг другу, и по этой причине все замкнутые многообразия двух измерений, имеющие одно и то же число Бетти, гомеоморфны.

Будет ли то же самое, если число измерений будет бóльшим; являются ли гомеоморфными два замкнутых многообразия h измерений ($h > 2$), имеющие одни и те же числа Бетти?

Мы увидим, что ответ будет отрицательным и как раз именно это показывает нам, насколько усложняются вопросы Analysis situs при увеличении числа измерений.

Совершенно ясно, что если два многообразия гомеоморфны, то их группы g будут изоморфными.

Вернемся теперь к нашему шестому примеру и определим, могут ли быть изоморфны две группы (α, β, γ, δ).

Пусть заданы эти две группы (α, β, γ, δ) и (α', β', γ', δ'); пусть C_1, C_2, C_3; C_1', C_2', C_3' — три фундаментальных контура каждой из этих групп; пусть

$$\begin{aligned} &C_1 + C_2 \equiv C_2 + C_1, \\ &C_1 + C_3 \equiv C_3 + \alpha C_1 + \gamma C_2, \\ &C_2 + C_3 \equiv C_3 + \beta C_1 + \delta C_2, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &C_1' + C_2' \equiv C_2' + C_1', \\ &C_1' + C_3' \equiv C_3' + \alpha' C_1' + \gamma' C_2', \\ &C_2' + C_3' \equiv C_3' + \beta' C_1' + \delta' C_2' \end{aligned} \tag{1bis}$$

— фундаментальные эквивалентности двух групп.

Допустим, что группы изоморфны и пусть

$$\begin{aligned} &a_3 C_3 + a_1 C_1 + a_2 C_2, \\ &b_3 C_3 + b_1 C_1 + b_2 C_2, \\ &c_3 C_3 + c_1 C_1 + c_2 C_2 \end{aligned}$$

— контуры первой группы, которые соответствуют контурам C_1', C_2', C_3' второй группы; a, b и c являются целыми числами; в самом деле, мы видели несколько выше, что контур первой группы можно выразить подобным образом.

Для того чтобы имел место изоморфизм, необходимо, чтобы при подстановке в эквивалентностях (1bis) $a_3 C_3 + a_1 C_1 + a_2 C_2 \ldots$ вместо C_1', C_2', C_3' опять получались эквивалентности (1).

Поэтому сначала необходимо, чтобы подстановки (которые я обозначаю теми же знаками, что и соответствующие контуры)

$$\begin{aligned} &a_3 C_3 + a_1 C_1 + a_2 C_2, \\ &b_3 C_3 + b_1 C_1 + b_2 C_2 \end{aligned}$$

были переместимы. Для упрощения записи я использую следующее обозначение.

Я полагаю

$$a_3 = h, \qquad b_3 = k, \qquad a_1 C_1 + a_2 C_2 = S_0; \qquad b_1 C_1 + b_2 C_2 = T_0$$

так, что наши две первые подстановки сводятся к $hC_3 + S_0$, $kC_3 + T_0$.

Я буду обозначать через S_1 то, что получится из S, если подвергнуть коэффициенты линейной подстановке (α, β, γ, δ), т. е. при замене a_1 и a_2 на

$$\alpha a_1 + \beta a_2 \text{ и } \gamma a_1 + \delta a_2$$

S_2 будет то, что получится из S_1, если подвергнуть коэффициенты той же подстановке, и т. д.; аналогично, T_1, T_2, ... будут последовательно получаться из T_0.

Установив это, получим, на основании эквивалентностей (1),

$$S_0 + hC_3 \equiv hC_3 + S_h.$$

Для того чтобы наши подстановки были переместимы, необходимо, чтобы

$$hC_3 + S_0 + kC_3 + T_0 \equiv kC_3 + T_0 + hC_3 + S_0,$$

или

$$(k+h)\,C_3 + S_k + T_0 \equiv (k+h)\,C_3 + T_h + S_0,$$

или

$$S_k + T_0 \equiv T_h + S_0. \qquad (\lambda)$$

Предположим сначала, что h равно k и отлично от нуля. Тогда предыдущую эквивалентность можно заменить равенствами

$$(\alpha_h - 1)(a_1 - b_1) + \beta_h (a_2 - b_2) = 0,$$
$$\gamma_h (a_1 - b_1) + (\delta_h - 1)(a_2 - b_2) = 0,$$

где я обозначил через

$$\begin{vmatrix} \alpha_h & \beta_h \\ \gamma_h & \delta_a \end{vmatrix}$$

коэффициенты h-й степени линейной подстановки

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

Эти равенства удовлетворяются двумя путями:

1) или если

$$a_1 = b_1, \qquad a_2 = b_2,$$

тогда две подстановки

$$hC_3 + S_0, \qquad hC_3 + T_0$$

будут совпадать;

2) или же если детерминант

$$\begin{vmatrix} \alpha_h - 1 & \beta_h \\ \gamma_h & \delta_h - 1 \end{vmatrix}$$

равен нулю. Но это может случиться, если только

$$s^h = 1,$$

где s — один из корней уравнения

$$\begin{vmatrix} \alpha - s & \beta \\ \gamma & \delta - s \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

т. е., если подстановка $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ является *эллиптической*; это означает, что корни уравнения (2) мнимые (они должны быть равны корню h-й степени из 1), или *параболической*, что означает, что корни уравнения (2) равны между собой.

Теперь предположим, что подстановка $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ является *гиперболической*, т. е. корни уравнения относительно s будут действительными, и больше не будем требовать, чтобы $h = k$.

Тогда k-я степень от

$$hC_3 + S_0$$

и h-я степень от

$$kC_3 + T_0$$

должны быть переместимы. Пусть

$$h'C_3 + S_0'',$$

$$k'C_3 + T_0'$$

— эти две степени. Так как мы имеем

$$h' = k' = hk,$$

то эти две степени, в соответствии с разобранным выше случаем, должны совпадать. В группе $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$, предполагаемой изоморфной, k-я степень от C_1' должна совпадать с h-й степенью от C_2'. Так как это невозможно, то должно быть

$$h = k = 0,$$

т. е.

$$a_3 = b_3 = 0.$$

Перейдем к случаю эллиптических подстановок, к которым мы отнесем также подстановку

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Тогда детерминант

$$\begin{vmatrix} \alpha_h - 1 & \beta_h \\ \gamma_h & \delta_h - 1 \end{vmatrix}$$

может стать нулем для определенного значения h, которое я обозначу ν.

Но тогда подстановка

$$\begin{vmatrix} \alpha_\nu & \beta_\nu \\ \gamma_\nu & \delta_\nu \end{vmatrix}$$

сводится к тождественной подстановке, т. е. будет иметь место

$$\alpha_\nu = \delta_\nu = 1, \qquad \beta_\nu = \gamma_\nu = 0.$$

Тогда окажется, во-первых, что νC_3 переместимо с C_1 и с C_2 и, более общим образом, что две подстановки

$$a_3C_3 + a_1C_1 + a_2C_2,$$
$$b_3C_3 + b_1C_1 + b_2C_2$$

переместимы, если только a_3 и b_3 делятся на ν. Это достаточное условие является также и необходимым, за исключением, как и выше, случая, когда две степени обеих наших подстановок совпадают.

Для доказательства этого я применю еще более сокращенную запись; символ

$$m_1C_1 + m_2C_2$$

имеет смысл лишь в том случае, если m_1 и m_2 являются целыми числами; однако запись

$$\mu(a'_1C_1 + a'_2C_2) + \rho(b'_1C_1 + b'_2C_2)$$

может иметь смысл и тогда, когда μ, ρ, все a' и все b' не являются целыми числами, если только

$$\mu a'_1 + \rho b'_1, \qquad \mu a'_2 + \rho b'_2$$

были целые числа. Очевидно, что мы имеем право на это постольку, поскольку C_1 и C_2 переместимы.

Подберем теперь

$$\xi_0 = a'_1C_1 + a'_2C_2,$$
$$\eta_0 = b'_1C_1 + b'_2C_2$$

таким образом, чтобы

$$\xi_1 = \xi_0 s, \qquad \eta_1 = \eta_0 s^{-1},$$

где ξ_1 и η_1, в соответствии с нашим предположением, получаются из ξ_0 и η_0 при помощи линейной подстановки $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$; s — один из корней уравнения (2). Согласно теории линейных подстановок, можно всегда выбрать числа a' и b' (которые, вообще, будут иррациональными и даже мнимыми), чтобы это было именно так. Положим тогда

$$S_0 = \mu\xi_0 + \rho\eta_0, \qquad T = \mu'\xi_0 + \rho'\eta_0.$$

Будем иметь

$$\mu\xi_0 + \rho\eta_0 + hC_3 \equiv hC_3 + \mu s^h \xi_0 + \rho s^{-h}\eta_0$$

и

$$k(hC_3 + \mu\xi_0 + \rho\eta_0) \equiv khC_3 + \mu \frac{s^{kh}-1}{s^h-1}\xi_0 + \rho \frac{s^{-kh}-1}{s^{-h}-1}\eta.$$

Установив это, мы можем записать эквивалентность (λ) в виде

$$\mu(s^k - 1) = \mu'(s^h - 1),$$
$$\rho(s^{-k} - 1) = \rho'(s^{-h} - 1).$$

Если k и h не делятся на ν, то эти соотношения не удовлетворяются тождественно, и мы можем положить

$$\mu = (s^h - 1)\varepsilon, \qquad \mu' = (s^k - 1)\varepsilon, \qquad \rho = (s^{-h} - 1)\zeta, \qquad \rho' = (s^{-k} - 1)\zeta.$$

Но тогда

$$k(hC_3 + S_0) \equiv khC_3 + \varepsilon(s^{kh} - 1)\xi_0 + \zeta(s^{-kh} - 1)\eta_0,$$
$$h(kC_3 + T_0) \equiv khC_3 + \varepsilon(s^{kh} - 1)\xi_0 + \zeta(s^{-kh} - 1)\eta_0,$$

что показывает, что k-я степень нашей первой подстановки идентична с h-й степенью второй подстановки. Так как мы исключаем этот случай, то, следовательно, должно быть

$$a_3 \equiv b_3 \equiv 0 \pmod \nu.$$

Однако можно идти и дальше; во-первых, обозначая две наши первые подстановки через C_1' и C_2', мы можем заменить их на

$$\omega_1 C_1' + \omega_2 C_2', \qquad \omega_1' C_1' + \omega_2' C_2',$$

где ω — такие целые числа, что $\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_2' = 1$. Следовательно, мы можем всегда предположить, что $b_3 = 0$ (иначе можно было бы заменить C_1' и C_2' на $\omega_1 C_1' + \omega_2 C_2'$ и $\omega_1' C_1' + \omega_2' C_2'$, выбирая ω так, чтобы новое b_3 стало нулем).

Но подгруппа, порожденная C_1' и C_2', ввиду изоморфизма с (α', β', γ', δ'), должна быть переместимой со всеми подстановками группы и, в частности, с C_3.

Запишем тогда, что подстановка

$$-C_3 + C_2' + C_3$$

входит в подгруппу, порожденную C_1' и C_2'. Имеем

$$C_2' = \mu'\xi_0 + \rho'\eta_0,$$
$$-C_3 + C_2' + C_3 = \mu' s\xi_0 + \rho' s^{-1}\eta_0.$$

Для того чтобы эта вторая подстановка стала частью своей группы, необходимо, если a_3 не равно нулю, чтобы эта последняя подстановка была кратной C'_2.

Однако, очевидно, это может иметь место лишь при $s = s^{-1} = -1$.

Если оставить этот случай в стороне, то необходимо имеем

$$a_3 = b_3 = 0.$$

Если, таким образом, мы оставим в стороне тот случай, когда

$$\alpha + \delta = \pm 2$$

(параболические подстановки и подстановку (—1, 0, 0, —1)), то должно быть

$$a_3 = b_3 = 0.$$

Добавим к этому, что c_3 должно быть равно 1, без чего комбинации трех фундаментальных подстановок

$$a_1 C_1 + a_2 C_2 \equiv C'_1,$$
$$b_1 C_1 + b_2 C_2 \equiv C'_2,$$
$$c_3 C_3 + c_1 C_1 + c_2 C_2 \equiv C'_3$$

не смогли бы воспроизвести всех подстановок

$$m_3 C_3 + m_1 C_1 + m_2 C_2$$

группы $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, а лишь те, при которых m делилось бы на c_3.

Теперь нужно, чтобы любая подстановка группы $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ выражалась в форме

$$m_3 C'_3 + m_1 C'_1 + m_2 C'_2.$$

Для того чтобы C_1 можно было выразить в этой форме, нужно прежде всего, чтобы m_3 равнялось нулю; затем должно быть тождественно

$$C_1 = m_1 (a_1 C_1 + a_2 C_2) + m_2 (b_1 C_1 + b_2 C_2)$$

и также

$$C_2 = m'_1 (a_1 C_1 + a_2 C_2) + m'_2 (b_1 C_1 + b_2 C_2).$$

Так как m и m' являются целыми числами, то детерминант

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1.$$

Но выше я сказал, что можно заменить C'_1 и C'_2 на

$$\omega_1 C'_1 + \omega_2 C'_2 = C_1, \qquad \omega'_1 C'_1 + \omega'_2 C'_2 = C_2.$$

Если выражение $a_1b_2 - a_2b_1$ равно 1, то мы могли бы подобрать значения ω так, чтобы

$$\omega_1 C'_1 + \omega_2 C'_2 = C_1, \qquad \omega'_1 C'_1 + \omega'_2 C'_2 = C_2,$$

иначе говоря, мы могли бы положить

$$a_1 = b_2 = 1, \qquad a_2 = b_1 = 0.$$

Но тогда эквивалентность (1 bis)

$$C'_1 + C'_3 \equiv C'_3 + \alpha' C'_1 + \gamma' C'_2$$

становится

$$C_1 + C_3 \equiv C_3 + \alpha' C_1 + \gamma' C_2,$$

откуда

$$\alpha = \alpha', \qquad \gamma = \gamma';$$

подобно этому найдем

$$\beta = \beta', \qquad \delta = \delta'.$$

Итак, мы должны заключить, что две группы $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ и $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ не могут быть изоморфными, если только переход от одной к другой не осуществляется при замене C'_1 и C'_2

$$\omega_1 C'_1 + \omega_2 C'_2, \qquad \omega'_1 C'_1 + \omega'_2 C'_2.$$

Это же можно выразить и иначе.

Пусть

$$S = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

— линейная подстановка с целыми коэффициентами такими, что

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Пусть

$$T = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega'_1 & \omega'_2 \end{vmatrix}$$

— другая линейная подстановка с целыми коэффициентами, для которых

$$\omega_1 \omega'_2 - \omega'_1 \omega_2 = 1.$$

Подстановка $T^{-1}ST$, которая называется *преобразованием* S через T, является также линейной с целыми коэффициентами и с детерминантом, равным 1.

Если две линейные подстановки S и S' с целыми коэффициентами и с детерминантом, равным 1, преобразуются одна в другую при помощи подстановки в виде T, я буду считать, что S и S' принадлежат к одному и тому же классу.

Совершенно ясно, что S и S' могут принадлежать к одному и тому же классу, лишь если сумма $\alpha+\delta$ имеет для них обоих одно значение. Однако это условие не является достаточным, и некоторому целому значению $\alpha+\delta$ соответствуют несколько классов линейных подстановок, подобно тому, как одному и тому же детерминанту соответствует несколько классов квадратичных форм.

Итак, условием необходимым и достаточным для того, чтобы две группы, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ и $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$, были изоморфными, служит принадлежность к одному и тому же классу двух линейных подстановок, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ и $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$.

Мы оставили в стороне случай, для которого

$$\alpha+\delta=\pm 2.$$

Если $\alpha+\delta=2$, то подстановка $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ будет относиться к тому же классу, что и $(1, h, 0, 1)$; группа $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ будет изоморфна группе $(1, h, 0, 1)$.

Эта последняя содержит одну замечательную подстановку C_2, которая не будет кратной никакой другой и которая переместима со всеми подстановками группы. Нетрудно обнаружить, что если h не равно нулю, то C_2 будет единственной подстановкой, обладающей этим свойством.

Мы можем оставить также в стороне случай равенства h нулю, так как группа $(1, 0, 0, 1)$, все подстановки которой попарно переместимы, очевидно, не может быть изоморфна никакой другой группе $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Если $\alpha+\beta=-2$, то группа $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ будет изоморфна группе $(-1, h, 0, -1)$. Эта последняя содержит одну замечательную подстановку C_2, которая не кратна никакой другой, не переместима со всеми подстановками группы, но переместима со всеми *удвоениями* этих подстановок. Если h не нуль, то C_2 является единственной подстановкой, обладающей этим свойством. Если, наоборот, h — нуль, то таковых бесконечно много, что уже доказывает то, что $(-1, 0, 0, -1)$ не может быть изоморфна $(-1, h, 0, -1)$.

Совершенно так же присутствие этой замечательной подстановки C_2 в $(1, h, 0, 1)$ и отсутствие какой-либо подстановки, обладающей тем же свойством в $(-1, h', 0, -1)$, показывают, что эти две группы не могут быть изоморфными.

Мне остается решить два вопроса.

1. Могут ли быть изоморфными групп $(1, h, 0, 1)$ и $(1, h', 0, 1)$, для которых $|h| \neq 0$, $|h'| \neq 0$, $|h| \neq |h'|$?

2. Тот же вопрос для групп $(-1, h, 0, -1)$, $(-1, h', 0, -1)$.

Начнем с первого вопроса.

Заметим сперва, что так как C_2 является единственной подстановкой первой группы, которая обладает характеристическим свойством, отмеченным выше, то должно быть

$$C_2' \equiv C_2$$

(где $C_2' \equiv -C_2$, но тогда можно заменить C_1' и C_2 на $-C_1'$ и $-C_2'$).

Далее, для того чтобы можно было, комбинируя

$$C_1' \equiv a_3C_3 + a_1C_1 + a_2C_2,$$
$$C_2' \equiv C_2,$$
$$C_3' \equiv c_3C_3 + c_1C_1 + c_2C_2,$$

найти все подстановки первой группы, необходимо, чтобы

$$a_3c_1 - c_3a_1 = 1.$$

Тогда легко доказать, что

$$C_1' + C_3' \equiv C_3' + C_1' + hC_2',$$

что и доказывает, что две группы могут быть изоморфны лишь в случае

$$h = \pm h'.$$

Переходим ко второму вопросу.

Подобно только что изложенному, ясно, что необходимо

$$C_2' \equiv C_2,$$
$$a_3c_1 - c_3a_1 = 1.$$

Откуда следует

$$C_1' + C_3' \equiv (a_3 + c_3)\,C_3 + (c_1 + a_1\varepsilon)\,C_1 + (c_2 + a_2\varepsilon - a_1c_3h\varepsilon)\,C_2,$$

где

$$\varepsilon = (-1)^{c_3}$$

и

$$C_3' - C_1' \equiv (c_3 - a_3)\,C_3 + (c_1 - a_1)\,\varepsilon' C_1 + [(c_2 - a_2)\,\varepsilon' + (a_1 + c_1)\,a_3\varepsilon' h]\,C_2,$$

где

$$\varepsilon' = (-1)^{a_3}.$$

Если желают, чтобы

$$C_1' + C_2' \equiv C_3' + h'C_2',$$

то необходимо, чтобы

$$a_3 = 0, \qquad \varepsilon' = 1, \qquad \varepsilon = -1, \qquad a_1c_3 = 1, \qquad h = h'.$$

Итак, обе наши группы могут быть изоморфны лишь в случае

$$h = \pm h'.$$

Следовательно, результат, указанный выше, является общим и распространяется на параболические подстановки.

Если две линейные подстановки $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ не относятся к одному и тому же классу, то соответствующие две группы не могут быть изоморфны.

Из этого длинного рассуждения вытекает, что различные группы (α, β, γ, δ) могут породить бесконечно много различных замкнутых многообразий V, не гомеоморфных между собой. Но число P_1 может принимать лишь три значения: 2, 3 или 4.

Итак, для того чтобы два замкнутых многообразия были гомеоморфными, недостаточно, чтобы они имели одни и те же числа Бетти.

Об этом свидетельствуют также и наши другие примеры.

В третьем примере группа G сводится к восьми подстановкам и в пятом примере — только к двум подстановкам.

Напротив, рассмотрим гиперсферу

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1;$$

это — многообразие, группа которого G приводится к одной-единственной подстановке — к тождественной подстановке.

Вот, таким образом, три многообразия, группы G которых конечного порядка; однако эти группы не изоморфны. Поэтому эти многообразия не гомеоморфны и тем не менее они будут иметь одни и те же числа Бетти:

$$P_1=P_2=1.$$

Кажется естественным ослабить понятие просто связного многообразия и оставить его лишь для тех многообразий, группа G которых сводится к тождественной подстановке.

Тогда у замкнутого многообразия более двух измерений группа G может быть конечного порядка без того, чтобы многообразие было просто связным.

Этого не может случиться с многообразиями двух измерений: их группа G не может быть конечного порядка и не сводиться к единственной подстановке.

Мы уже видели, почему фуксова группа, которая допускает цикл вершин, сумма углов которого равна $2\pi/n$ ($n>1$), не может быть группой G замкнутого многообразия двух измерений.

То же самое и по той же причине справедливо и для любой группы конечного порядка или, в более общем виде, для всякой группы, содержащей подстановку, некоторая степень которой сводится к тождественной подстановке?

Было бы интересным разобрать следующие вопросы.

1. Если дана некоторая группа G, определенная рядом фундаментальных эквивалентностей, то может ли она породить замкнутое многообразие n измерений?

2. С какой стороны можно подойти к построению такого многообразия?

3. Если два многообразия одного и того же числа измерений имеют одну и ту же группу G, всегда ли они гомеоморфны [15]?

Решение этих вопросов потребовало бы сложного исследования и длинных рассуждений. Здесь я об этом говорить не буду.

Я хочу все же привлечь внимание к одному вопросу.

Риман связал исследование алгебраических кривых с исследованием многообразий двух измерений с точки зрения Analysis situs.

Подобно этому, исследование алгебраических поверхностей связывается с изучением многообразий четырех измерений. Эти многообразия имеют три числа Бетти:

$$P_1=P_3 \quad \text{и} \quad P_2.$$

Пикар показал, что для алгебраической поверхности самой общей степени число P_1 сводится к 1. Оно получает большее значение лишь для некоторых особенных случаев. Большая связность оказывается здесь лишь исключением.

Этот результат кажется парадоксальным; возможно, однако, теперь он покажется нам менее парадоксальным: одна группа G может быть значительно сложнее другой группы G' и, однако, соответствовать много меньшей величине числа P_1.

§ 15. Другие способы образования многообразий

Можно дать многообразиям и другие определения, которые будут, так сказать, промежуточными между двумя первыми.

Например, можно рассмотреть многообразие V, образованное совокупностью точек, удовлетворяющих некоторым неравенствам и уравнениям

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1,\ x_2, \ldots, x_n;\ y_1,\ y_2, \ldots, y_q) \\ F_2(x_1,\ x_2, \ldots, x_n;\ y_1,\ y_2, \ldots, y_q) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_p(x_1,\ x_2, \ldots, x_n;\ y_1,\ y_2, \ldots, y_q) \end{array}\right\} = 0, \tag{1}$$

где x являются координатами точки, а y — произвольные параметры; числом измерений V будет тогда $n-p+q$.

Можно добавить также к уравнениям (1) соотношения

$$\varphi_\alpha(y_1,\ y_2, \ldots, y_q) = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2, \ldots, \lambda)$$

между y. Тогда y не будут уже совершенно произвольными параметрами и число измерений V становится равным $n-p+q-\lambda$.

Можно также рассмотреть многообразие V, определенное некоторыми неравенствами и соотношениями

$$x_i = \theta_i(y_1,\ y_2, \ldots, y_p) \qquad (i = 1,\ 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где y являются параметрами, связанными λ уравнениями

$$\varphi_\alpha(y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda).$$

Число измерений V будет тогда $p - \lambda$.

Рассмотрим пока $y_1, y_2, \ldots, y_p$ как координаты точки P в пространстве p измерений. Равенства

$$\varphi_\alpha = 0$$

определят тогда в этом пространстве p измерений некоторое многообразие W.

Каждой точке W будет соответствовать точка V, так как уравнения (2) выражают x в функции от y.

Наиболее простым случаем будет тот, в котором, обратно, некоторой точке V будет соответствовать единственная точка W. Но будет еще и следующий, также очень интересный случай.

Предположим, что многообразие W остается неизменным, когда y подвергаются подстановкам некоторой группы G. Пусть P — одна точка W, $P_1, P_2, \ldots, P_h$ — образы при подстановках G.

Совокупность точек $P, P_1, P_2, \ldots, P_h$ образуют то, что я буду называть *системой точек*.

Если функции θ_i не изменяются при помощи подстановок G, то ясно, что различным точкам одной и той же системы соответствует одна и та же точка V.

Интересным случаем будет тот, когда точке V соответствует одна-единственная система точек W.

Если задано многообразие W и группа G, которая его не изменяет, то всегда можно построить многообразие V такое, что каждой точке V будет соответствовать одна и только одна система точек W.

Для того чтобы V было двусторонним, необходимо и достаточно, чтобы многообразие W было двусторонним и чтобы все подстановки G обладали следующим свойством:

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_p$ будут координатами P; $y'_1, y'_2, \ldots, y'_p$ — координатами образа P при соответствующем преобразовании. Тогда функциональный детерминант y' относительно y должен быть положительным.

Седьмой пример. Пусть

$$y_1^2 + y_2^2 + y^2 = 1$$

— уравнение многообразия W, которое, таким образом, будет сферой в обычном пространстве.

Эта сфера не изменится, если вместо y_1, y_2, y_3 взять $-y_1, -y_2, -y_3$. Это и будет нашей группой G.

Если теперь мы положим, например,

$$x_1 = y_1^2, \quad x_2 = y_2^2, \quad x_3 = y_3^2,$$
$$x_4 = y_1 y_3, \quad x_5 = y_1 y_3, \quad x_6 = y_1 y_4,$$

то x не изменятся, когда y будут менять знак, и мы получим определение многообразия V двух измерений в пространстве шести измерений.

Это многообразие будет замкнутым; оно будет *односторонним.*

Пусть, в самом деле, P будет точкой W, координатами которой будут y_1, y_2, y_3. Для определения положения этой точки на сфере W достаточно будет знать две из этих координат, например, y_1 и y_2, ибо уравнение сферы дает нам возможность определить y_3 в функции от y_1 и от y_2.

Преобразованная точка P' с координатами $-y_1$, $-y_2$ и $-y_3$ является диаметрально противоположной. Но не следует для определения положения точки P пользоваться y_1 и y_2, так как y_3 не является однозначной функцией от этих двух переменных. Лучше принять

$$y_1 = \cos\varphi \sin\theta,$$
$$y_2 = \sin\varphi \sin\theta,$$
$$y_3 = \cos\theta.$$

Координаты точки P в этой новой системе будут φ и θ; координаты точки P' будут $\varphi+\pi$ и $-\theta+\pi$. Затем очевидно, что

$$\frac{\partial(\varphi+\pi,\ \pi-\theta)}{\partial(\varphi,\ \theta)} = -1 < 0.$$

Следовательно, многообразие V является односторонним.

Восьмой пример. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_q$; $z_1, z_2, \ldots, z_q$ — $2q$ параметров, связанных соотношениями

$$\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_q^2 = 1, \\ z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_q^2 = 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Если мы будем рассматривать эти $2q$ параметров как координаты точки в пространстве $2q$ измерений, то уравнения (3) представят замкнутое многообразие W, имеющее $2q-2$ измерений.

Если мы будем рассматривать $y_1, y_2, \ldots, y_q$ и $z_1, z_2, \ldots, z_q$ как координаты двух точек Q и Q' в пространстве q измерений, то эти точки обе должны находиться на *гиперсфере* S, уравнение которой

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_q^2 = 1$$

и которая является замкнутым многообразием $q-1$ измерений.

Каждой паре точек S будет соответствовать, таким образом, одна и только одна точка W, и наоборот, *если только я условлюсь рассматривать две пары точек QQ' и $Q'Q$ как различные.*

Теперь рассмотрим $q(q+3)/2$ комбинаций

$$y_i + z_i,\ y_i z_i,\ y_i z_k + y_k z_i \qquad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots, q)$$

и приравняем их $q(q+3)/2 = n$ переменным

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_n.$$

Мы определим таким образом многообразие V с $2q-2$ измерениями в пространстве n измерений.

Если заменить y_i на z_i и z_i на y_i (т. е. поменять местами точки Q и Q'), то эти $q(q+3)/2$ комбинаций не изменятся.

Каждой паре точек гиперсферы соответствует, таким образом, одна и только одна точка многообразия V, и наоборот, но *при условии, что две пары QQ' и $Q'Q$ не считаются различными.*

Будет ли замкнутым это многообразие V? Я покажу, что оно не замкнуто для $q=2$ и замкнуто для $q>2$ [16].

Мы имеем здесь

$$x_1=y_1+z_1,\quad x_2=y_1z_1,\quad x_3=y_2+z_2,$$
$$x_4=y_2z_2,\quad x_5=y_1z_2+y_2z_1.$$

Очевидно, для того чтобы y и z были действительными, необходимо, чтобы

$$x_1^2>4x_2,\quad x_3^2>4x_4.$$

Аналогичные неравенства будем иметь для $q>2$. Однако в каком случае эти неравенства определят действительную границу нашего многообразия V?

Для того чтобы лучше разобраться в этом, я разберу сперва более простой пример.

Пусть в обычном пространстве задана окружность

$$x^2+y^2=1,\quad z=0.$$

Если сохранить лишь те точки окружности, для которых y является положительным, то мы будем иметь следующие соотношения:

$$x^2+y^2=1,\quad z=0,\quad y>0,$$

которые определят многообразие одного измерения (оно в этом случае будет полуокружностью).

Это многообразие незамкнутое, оно допускает две граничные точки

$$x=\pm 1,\quad y=z=0.$$

Рассмотрим, с другой стороны, следующую поверхность:

$$x^2+y^2-z^2+(x^2+y^2+z^2)^2=0. \tag{4}$$

Эта поверхность образована вращением лемнискаты вокруг ее большой оси. Она состоит из двух различных двумерных частей N_1 и N_2, которые имеют общую коническую вершину, являющуюся началом; от одной

части можно перейти к другой, только пройдя через начальную точку. Добавим затем к уравнению (4) неравенство

$$z > 0. \qquad (5)$$

Соотношения (4) и (5) определяют многообразие двух измерений, являющееся не чем иным, как частью N_1. Это многообразие следует рассматривать как замкнутое; оно гомеоморфно сфере и вершину конуса

$$x=y=z=0$$

не следует рассматривать как действительную граничную точку.

Вообще, если многообразие p измерений не замкнуто, то его граница образуется одним или несколькими многообразиями $p-1$ измерений. Если совокупность точек, которые можно считать граничными точками, образует одно или несколько многообразий менее чем $p-1$ измерений, то это не истинные граничные точки с той точки зрения, которая занимает нас в настоящее время, и заданное многообразие является замкнутым.

Как раз в нашем случае мы получим точки, о которых можно предположить, что они являются граничными, если только допустить, что точки Q и Q_1 совпадают, т. е. что

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = z_2, \ldots, y_q = z_q.$$

Мы получаем здесь многообразие $q-1$ измерений. Тогда полная граница V будет иметь только $q-1$ измерений, тогда как V будет иметь $2q-2$ измерений. Следовательно, V будет замкнутым, если только

$$2q-2=(q-1)+1 \quad \text{или} \quad q=2.$$

Чтобы лучше понять это, сравним два примера: $q=2$ и $q=3$.

Пусть сначала $q=2$; рассмотрим наше многообразие в окрестности точки

$$y_1=z_1=0, \quad y_2=z_2=1,$$

т. е. точки

$$x_1=0, \quad x_2=0, \quad x_3=2, \quad x_4=1, \quad x_5=0.$$

Заметим сперва, что для малых значений x_1 и x_2 три других переменных, x_3, x_4 и x_5, можно разложить по степеням x_1 и x_2; достаточно будет, если мы изучим изменения x_1 и x_2.

Мы видим, что x_1 и x_2 могут принимать все значения, удовлетворяющие выражению

$$x_1^2 > 4x_2.$$

Таким образом, плоскость x_1, x_2 оказывается разделенной на две части линией

$$x_1^2=4x_2,$$

которая является настоящей граничной линией.

Можно было бы получить тот же самый результат, изучая многообразие V в окрестности любой другой граничной точки. Это многообразие не является замкнутым.

Пусть теперь $q=3$ и

$$x_1=y_1+z_1, \quad x_2=y_1z_1, \quad x_3=y_2+z_2, \quad x_4=y_2z_2, \quad x_5=y_1z_2+y_2z_1,$$
$$x_6=y_3+z_3, \quad x_7=y_3z_3, \quad x_8=y_1z_3+y_3z_1, \quad x_9=y_2z_3+y_3z_2.$$

Исследуем многообразие V в окрестности точки P_0, для которой

$$y_1=z_1=y_2=z_2=0, \quad y_3=z_3=1,$$

откуда

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_8=x_9=0, \quad x_6=2, \ x_7=1.$$

Мы видим теперь, что в окрестности этой точки x_6, x_7, x_8, x_9 разложимы по степеням x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5 и, таким образом, достаточно было бы изучить поведение этих пяти последних переменных.

Чтобы сохранить только три переменных и сделать возможным геометрическое представление, я пересеку мое многообразие V плоским многообразием

$$x_1=0, \quad x_3=0$$

таким образом, что пересечение окажется многообразием V' двух измерений.

Пусть x_2, x_4 и x_5 будут координаты некоторой точки V'. Мы можем рассматривать эти переменные как координаты в обычном пространстве и получим, таким образом, геометрическое представление многообразия V' или, скорее, части этого многообразия, соседствующей с P_0.

Тогда можно найти

$$y_1=-z_1, \quad y_2=-z_2,$$

так как x_1 и x_3 являются по предположению нулями и, следовательно,

$$x_2=-y_1^2, \quad x_4=-y_2^2, \quad x_6=-2y_1y_2,$$

откуда

$$4x_2x_4-x_5^2=0.$$

Это уравнение конуса второго порядка, однако в рассуждение входит лишь одна-единственная поверхность этого конуса, так как должно быть

$$x_2 < 0, \quad x_4 < 0.$$

Часть конуса, удовлетворяющая задаче, отделена от той части, которая ей не удовлетворяет, вершиной, которую не следует рассматривать как настоящую граничную точку. Таким образом, многообразие V' так же, как и многообразие V, является замкнутым.

Аналогичный результат можно получить, исследуя V в окрестности другой граничной точки или пересекая V иными плоскими многообразиями, отличными от

$$x_1 = x_2 = 0.$$

Я здесь имел в виду привести лишь пример, поясняющий предыдущие рассуждения.

Сущность его в следующем: *многообразие V является замкнутым, если $q > 2$, и не замкнуто, если $q=2$.*

Является ли многообразие V односторонним или же двусторонним?

Я предполагаю установить, что оно является двусторонним, если q нечетное, и наоборот, что оно является односторонним, если q четное.

Положим

$$\begin{aligned}
y_1 &= \cos\theta_1, & z_1 &= \cos\theta_1',\\
y_2 &= \sin\theta_1\cos\theta_2, & z_2 &= \sin\theta_1'\cos\theta_2',\\
y_3 &= \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, & z_3 &= \sin\theta_1'\sin\theta_2'\cos\theta_3',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, & &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y_{q-1} &= \sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{q-2}\cos\theta_{q-1}, & z_{q-1} &= \sin\theta_1'\sin\theta_2'\ldots\sin\theta_{q-2}'\cos\theta_{q-1}',\\
y_q &= \sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{q-2}\sin\theta_{q-1}, & z_q &= \sin\theta_1'\sin\theta_2'\ldots\sin\theta_{q-2}'\sin\theta_{q-1}'.
\end{aligned}$$

Положение некоторой точки на W определяется координатами

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_{q-1}; \quad \theta_1',\ \theta_2',\ \ldots,\ \theta_{q-1}'.$$

С другой стороны, группа G состоит (исключая тождественную подстановку) из единственной подстановки, которая меняет местами θ_i и θ_i'. Для того чтобы V стало двусторонним, необходимо и достаточно, чтобы функциональный детерминант

$$\frac{\partial(\theta_i,\ \theta_i')}{\partial(\theta_i',\ \theta_i)} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1)$$

был положительным. Иначе говоря, он будет равен $(-1)^{q-1}$, т. е. $+1$, если q является числом нечетным, и -1, если q — четное число. Итак:

V является двусторонним, если q — нечетное;

V является односторонним, если q — четное, что и требовалось доказать.

Займемся теперь определением числа Бетти P_{q-1}.

Определим сперва числа Бетти для W.

Мы можем построить на W два многообразия каждое $q-1$ измерений следующим образом. Известно, что каждая точка W соответствует паре точек QQ' гиперсферы S. Парам Q_0Q', где Q_0 — фиксировано, а Q' описывает всю гиперсферу, будет соответствовать замкнутое многообразие U_1 $q-1$ измерений, составляющее часть W. Аналогично, парам QQ_0, где Q описывает всю гиперсферу в то время, как Q_0 — фиксированное число, будет соответствовать замкнутое многообразие U_3 $q-1$ измерений, составляющее часть W.

Эти два многообразия будут линейно независимыми (с точки зрения гомологий).

Действительно, рассмотрим интеграл порядка $q-1$

$$J = \int \sin^{q-3}\theta_1 \sin^{q-3}\theta_2 \ldots \sin^2\theta_{q-2} \sin\theta_{q-1} d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_{q-1}$$

и пусть J'— интеграл порядка $q-1$, полученный в результате замены в J величин θ_i через θ_i'.

Рассмотрим затем интеграл

$$J + \lambda J',$$

где λ иррационально.

Нам известны x как функции от θ и θ'; обратно, мы сможем вычислить θ и θ' как функции от x, причем таким образом, чтобы интеграл $J+\lambda J'$ принял форму

$$\int \sum X\delta,$$

где X — целая функция относительно x, а δ — произведение $q-1$ дифференциалов dx_i.

Я замечаю, кроме того, что интеграл $J+\lambda J'$ равен нулю, когда он распространен на бесконечно малое замкнутое многообразие, лежащее в W.

Распространенный на U_2, он равен σ (поверхность гиперсферы S); распространенный на U_1, он равен $\lambda\sigma$, и так как не существует никакого линейного соотношения между σ и $\lambda\sigma$, то U_1 и U_2 являются линейно независимыми.

Число Бетти P_{q-1}, таким образом, равно по крайней мере трем.

Для того чтобы продвинуться в наших рассуждениях дальше, рассмотрим многообразие W', полученное при исключении из W всех точек обоих многообразий U_1 и U_2; я предполагаю установить, что W' является просто связным.

Рассмотрим также многообразие S', полученное при исключении из гиперсферы S точки Q_0. Каждой паре точек QQ' многообразия S' будет соответствовать одна точка W', и наоборот.

Но S' гомеоморфно области D

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_{q-1}^2 < 1,$$

составляя часть пространства $q-1$ измерений; здесь координаты области обозначены через $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{q-1}$.

Таким образом, поверхность обычной сферы, при исключении одной точки, становится гомеоморфной кругу.

Каждой паре точек области D будет соответствовать точка W', откуда следует, что W' гомеоморфно относительно области Δ, определенной неравенствами

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_{q-1}^2 < 1,$$
$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \ldots + \zeta_{q-1}^2 < 1$$

и расположенной в пространстве $2q-2$ измерений, координаты которой обозначены через η_i и ζ_i.

Иначе говоря, область Δ является просто связной, так как она выпуклая. Пусть, действительно, v — некоторое замкнутое многообразие определенного числа измерений, являющееся частью Δ; я утверждаю, что его можно, деформируя непрерывным образом, свести к точке, не выводя его из пределов Δ. Построим многообразие v', умножая на положительный множитель k, меньший единицы, координаты всех точек v (многообразие v' гомотетично относительно v, центр гомотетии будет началом, а отношение гомотетии равно k). Многообразие v' будет целиком находиться внутри Δ и, когда уменьшается от 1 до 0, оно сначала совпадает с v, а в конце сводится к точке, что и требовалось доказать.

Итак, Δ и, следовательно, W' являются просто связными. Определим теперь числа Бетти для W, сначала — число P_h, для которого $h < q-1$. Рассмотрим для этого замкнутое многообразие h измерений, лежащее в W; это многообразие, вне зависимости от того, пересекает ли оно U_1 и U_2 или нет, можно всегда рассматривать как гомологичное с многообразием h измерений, не имеющим общих точек ни с U_1, ни с U_2. Это последнее будет гомологично нулю в W' (так как W' просто связное) и, a fortiori, в W.

Таким образом P_h равно 1.

Так как, с другой стороны, числа Бетти, равноотстоящие от концов, равны, то P_h будет также равно 1 и если h будет больше $q-1$.

Остается определить P_{q-1}.

Рассмотрим замкнутое многообразие v $q-1$ измерений, лежащее в W. Если оно не пересекает ни U_1, ни U_2, то оно будет гомологично нулю; действительно, оно лежит в W' и, следовательно, будет гомологично нулю относительно W' и, a fortiori, относительно W.

Предположим, что оно пересекает U_1 и U_2.

Точки W, которые соответствуют паре Q_1Q', где Q_1 фиксировано, а Q' описывает всю гиперсферу, образуют многообразие U_1', которое

будет гомологично U_1. Через каждую точку W проходит одно и только одно многообразие U_1'.

Точки W, соответствующие паре QQ_2, где Q_2 фиксировано, а Q описывает всю гиперсферу, образуют многообразие U_2', которое будет гомологично U_2.

Через каждую точку W проходит одно и только одно многообразие U_2'.

Два многообразия U_1' и U_2' имеют одну общую точку и только одну (а именно точку, соответствующую паре Q_1Q_2). Наоборот, два многообразия U_1' (или два многообразия U_2') не пересекаются.

Установив это, возвратимся к многообразию v и предположим, для определенности рассуждений, что оно пересекает U_1 в двух точках M' и M'' и U_2 в одной точке N'. Через точку M' я могу провести многообразие U_2'; через точку M'' — аналогичное многообразие U_2''; через точку N' — многообразие U_1'.

После этого, произведя бесконечно малую деформацию v, я могу устроить так, чтобы оно всегда пересекало U_1 и U_2 только в точках M', M'' и N' и чтобы вокруг M' оно имело маленькую общую с U_2'' часть u_2', а вокруг N' — маленькую общую с U_1' часть u_1'.

Тогда совокупность многообразий

$$U_1'-u_1',\ \ U_2'-u_2',\ \ U_2''-u_2'',\ \ -v+u_1'+u_2'+u_2''$$

образует замкнутое многообразие, которое не пересечет ни U_1, ни U_2, и которое, следовательно, будет гомологично нулю; следовательно, будем иметь

$$U_1'-u_1'+U_2'-u_2'+U_2''-u_2''\sim v-u_1'-u_2'-u_2'',$$

откуда

$$v\sim U_2'+U_1'+U_2''\sim U_1+2U_2.$$

Могло бы случиться также, что, например, число, которое мы обозначили выше через $S\,(M)$, не будет иметь то же значение для точки M', рассматриваемой как точка пересечения v и U_1, и для точки M', рассматриваемой как точка пересечения U_2' и U_1. В этом случае следовало бы заменить U_2' противоположным многообразием; тогда будет

$$v\sim U_1'-U_2'+U_2''\sim U_1.$$

Во всех случаях v, U_1 и U_2 не будут линейно независимыми и мы получим

$$P_{q-1}=3.$$

Определим теперь числа Бетти для V.

Парам QQ' и $Q'Q$ соответствует одна и та же точка V; отсюда следует, что и U_1 и U_2 соответствует в V одно и то же многообразие, так что можно записать

$$U_1\sim U_2.$$

С другой стороны, интеграл $J+J'$, распространенный на это многообразие, не является нулем. Это показывает, что гомология

$$U_1 \sim 0$$

не имеет места.

Следовательно, число P_{q-1} по меньшей мере равно двум.

Каждому замкнутому многообразию v, лежащему в V, будет соответствовать многообразие w, лежащее в W, однако могут представиться два случая: мы знаем, что каждой точке V соответствуют две точки W и я мог бы сказать, для сокращения, что эти две точки являются *симметричными*, так как для перехода от одной к другой надо заменить y_i на z_i.

Построим w, выбирая для каждой точки v *одну* из двух точек, соответствующую ей в w. Вполне может случиться, что w будет замкнутым, или же, что w не будет замкнутым, но что его граница состоит из попарно симметричных точек.

Рассмотрим сперва случай, когда w является замкнутым.

Если число измерений отлично от $q-1$, w (а следовательно, и v) можно при помощи непрерывной деформации свести к точке, и мы будем иметь

$$v \sim 0.$$

Если число измерений равно $q-1$, то будем иметь по отношению к W

$$w \sim mU_1 + nU_2,$$

где m и n — целые числа. Однако по отношению к V U_1 гомологично U_2.

Следовательно, будем иметь по отношению к V

$$v \sim (m+n)\, U_1.$$

Рассмотрим теперь случай, когда w не является замкнутым. Принимаем, что число измерений меньше или равно $q-1$; случай, когда это число будет выше $q-1$, легко сводится к этому, так как числа Бетти попарно равны. Граница f многообразия w будет тогда иметь меньше $q-1$ измерений.

Пусть дано многообразие $q-1$ измерений H, лежащее в W, которое состоит из точек, симметричных между собой, т. е. из точек

$$y_i = z_i.$$

Граница f может деформироваться непрерывным образом так, чтобы ее точки продолжали оставаться симметричными по две, и так, чтобы к концу деформации деформированная граница стала частью H.

Следовательно, w может деформироваться непрерывным образом, не переставая соответствовать замкнутому многообразию v, причем таким

образом, что к концу деформации деформированное многообразие w станет замкнутым.

Следовательно, v всегда гомологично с многообразием v, соответствующим замкнутому многообразию w.

Следовательно, продолжая рассуждение,

$$v \sim 0, \quad v \sim (m+n)\, U_1.$$

Таким образом, все числа Бетти для V равны 1, за исключением P_{q-1}, которое равно 2.

Отсюда два следствия.

1. Если q будет нечетным, то V — двустороннее. Следовательно, для двустороннего многообразия $4k$ измерений число P_{2k} не обязательно будет нечетным.

2. Если q будет четным, то V — одностороннее. Следовательно, для одностороннего многообразия $4k+2$ измерений число P_{2k+1} не будет обязательно нечетным, как это имело бы место для двустороннего многообразия.

Я уже упоминал об этих результатах в конце § 9.

§ 16. Теорема Эйлера

Известна теорема Эйлера, согласно которой, если S, A и F числа вершин, ребер и граней выпуклого многогранника, то для последнего должно быть

$$S-A+F=2.$$

Эта теорема была обобщена адмиралом Жонкьером для случая невыпуклых многогранников. Если многогранник образует замкнутое многообразие двух измерений, число Бетти которого P_1, то

$$S-A+F=3-P_1.$$

Тот факт, что грани являются плоскими, не имеет, очевидно, никакого значения, и теорема одинаково приложима к криволинейным многогранникам; она приложима также к подразделениям какой-либо замкнутой поверхности на просто связные области. Эти области будут соответствовать граням многогранника, линии, служащие границей двух каких-либо из этих областей, соответствуют ребрам, а концы этих линий — вершинам.

Я предполагаю обобщить эти результаты на любое пространство.

Итак, пусть V — замкнутое многообразие p измерений. Подразделим его на некоторое число многообразий v_p, каждое p измерений; эти многообразия v_p не будут замкнутыми и их границы будут образованы некоторым числом многообразий v_{p-1}, каждое $p-1$ измерений. В свою очередь, границы v_{p-1} будут образованы некоторым числом многообразий v_{p-2}, каждое $p-2$ измерений, и так далее; я приду, наконец, к некоторому числу многообразий одного измерения, границами которых будет опре-

деленное число изолированных точек или многообразий нулевого измерения, которые я обозначу v_0.

Многообразие V может иметь любые числа Бетти, но я требую, чтобы многообразия $v_p, v_{p-1}, \ldots, v_1$ были просто связными.

Через $\alpha_p, \alpha_{p-1}, \ldots, \alpha_1$ и α_0 я обозначу число многообразий v_p, $v_{p-1}, \ldots, v_1$ и v_0.

Фигура, образованная всеми этими многообразиями, могла бы называться многогранником, так как очевидна аналогия с обычными многогранниками. Обычный многогранник в действительности является замкнутым многообразием V двух измерений, которое подразделяется на определенное число многообразий v_2, являющихся гранями. Границами граней служит определенное число многообразий v_1, являющихся ребрами и, в свою очередь, имеющими в качестве границ некоторое число многообразий v_0, называемых *вершинами*.

Я собираюсь вычислить число

$$N = \alpha_p - \alpha_{p-1} + \alpha_{p-2} - \ldots \mp \alpha_1 \pm \alpha_0.$$

Я введу здесь несколько новых обозначений, может быть, не совсем оправданных, но удобных.

Если два многогранника получаются в результате деления многообразия V двумя различными способами, я назову их *конгруентными*.

Пусть теперь задан многогранник P, образованный многообразием V, областями v_p и их последовательными границами $v_{p-1}, \ldots, v_1, v_0$.

Подразделим v_p на более мелкие области v'_p; полные границы v'_p будут состоять из некоторого числа новых областей v''_{p-1} и, кроме того, из областей v'_{p-1}, полученных при делении v_{p-1}; полные границы v'_{p-1} и v''_{p-1} будут состоять из некоторого числа новых областей v''_{p-2} и, кроме того, из областей v'_{p-2}, полученных при делении v_{p-2}, и так далее. Наконец, мы придем к v'_1 и v''_1, полные границы которых будут состоять из некоторого числа новых точек v''_0 и, кроме того, из точек v_0.

Пусть P' представляет собой многогранник, образованный совокупностью областей $v'_p, v'_{p-1}, v''_{p-1}, v'_{p-2}, v''_{p-2}, \ldots, v'_1, v''_1, v_0, v''_0$.

Я буду называть многогранник P' *производным* от многогранника P.

Попробуем уяснить это определение с помощью примера, заимствованного из обычной геометрии. Рассмотрим правильный тетраэдр T. На каждой грани я соединю каждую вершину с серединой противоположной стороны. Тогда каждая грань окажется разделенной на шесть треугольников; всего будет двадцать четыре треугольника. Многогранник с двадцатью четырьмя гранями, полученный таким образом, будет *производным* от T.

Пусть теперь даны два конгруентных многогранника, P и P', полученных при помощи двух различных способов разложения некоторого многообразия V; всегда будет существовать такой многогранник P'', который будет одновременно производным от P и P' и который получится путем

комбинирования обоих способов разложения*. Если теперь обозначить через v_p, v'_p и v''_p подразделения V в трех способах разложения, которые соответствуют трем многогранникам P, P' и P'', то необходимым и достаточным условием того, чтобы две точки принадлежали одновременно одной и той же области v''_p, будет то, что они также одновременно должны принадлежать одной и той же области v_p и одной и той же области v'_p.

Я намереваюсь установить, что число N является одним и тем же для двух конгруентных многогранников и, так как мы только что выяснили, что два конгруентных многогранника всегда имеют общий производный многогранник, то нам достаточно будет показать тождественность числа N для многогранника и для всех его производных.

Исследуем в многограннике P одну из областей v_{p-1}; она будет всегда принадлежать двум и только двум областям v_p, которые она отделяет одну от другой. Наоборот, область v_{p-2} будет принадлежать, вообще, более чем двум областям v_p и более чем двум областям v_{p-1}. Это подобно тому, как в обычных многогранниках ребро отделяет друг от друга две грани, тогда как вершина, вообще говоря, принадлежит более чем двум граням и более чем двум ребрам.

Тем не менее, мы не исключаем случая, когда область v_{p-2} будет принадлежать только двум областям v_{p-1}. Так, в примере с обычным многогранником мы не исключаем случая, когда середина некоторого ребра рассматривается в качестве вершины и когда это ребро, следовательно, рассматривается как образованное двумя смежными ребрами.

Области v_{p-2}, которые будут принадлежать только двум областям v_{p-1}, будут называться *сингулярными*. Пусть задана сингулярная область v_{p-2}, принадлежащая двум областям v_{p-1}, которые я обозначу v'_{p-1} и v''_{p-1}. Совершенно ясно, что v'_{p-1} разделит между собой *те же самые две области* v_p, которые разделены v''_{p-1}, и, таким образом, v_{p-2} будет также принадлежать только двум областям v_p.

Совершенно так же я буду говорить, что многообразие v_q является *сингулярным*, если оно принадлежит только двум многообразиям v_{q+1} и в этом случае оба многообразия v_{q+1}, которым будет принадлежать v_q, будут принадлежать тем же самым v_{q+2}, тем же самым $v_{q+3}, \ldots$, тем же самым v_p. Таким образом, отбрасывание v_q и взаимное присоединение двух v_{q+1} не внесет никакого изменения ни в v_{q+2}, ни в $v_{q+3}, \ldots$, ни в v_p.

Пусть теперь дано многообразие v_h. Этому многообразию принадлежит определенное число многообразий v_{h-1}. Если одно из последних является сингулярным, то я буду называть многообразие v_h *иррегулярным*; в противоположном случае оно будет регулярным.

Рассмотрим многогранник P с областями v_p, $v_{p-1}, \ldots$ и производный от него многогранник P' с областями v'_p, $v'_{p-1}, \ldots$. Попробуем подняться

---

* См. примечание [20] к стр. 579. (*Прим. ред.*).

от многогранника P' к многограннику P. Пусть даны две области v'_p, которые я обозначу α и β; я предполагаю, что они отделены одна от другой с помощью области v'_{p-1}, которую я обозначу γ, что они, следовательно, являются смежными и что они составляют часть одной и той же области v_p. (Так как α и β являются частями одной и той же области v_p, то область γ не является подразделением одной из областей v_{p-1}, которые отделяют области v_p одну от другой; следовательно, эта область γ является одной из тех, которые я обозначил через v''_{p-1} в определении производных многогранников. Здесь, однако, я более не делаю этого различия и буду обозначать через v'_{p-1} как многообразия, обозначенные мною ранее v''_{p-1}, так и многообразия, обозначенные v'_{p-1}).

Установив это, исключим область γ, которая служит границей α и β и *присоединим* область α к области β. Тем самым мы исключим одну область v'_p и одну область v'_{p-1}. С другой стороны, мы не исключим никакой области v'_{p-2}, если область γ регулярна. Действительно, если ни одна из областей v'_{p-2} не является сингулярной, то каждая будет принадлежать по меньшей мере трем областям v'_{p-1}, и после исключения γ она будет принадлежать по крайней мере двум областям v'_{p-1}. Подобно этому, каждая область v'_q (где $q < p-2$), являющаяся частью γ, будет принадлежать по меньшей мере трем областям v'_{h-1} и, после исключения γ, все же будет принадлежать не менее чем двум областям v'_{p-1}. Исключение γ, следовательно, не исключает ни одной из областей v'_q, *следовательно, оно не меняет значения числа* N.

Если, наоборот, область γ является иррегулярной, у нас более не будет права исключать ее, так как тогда будет существовать область v'_{p-2}, принадлежащая только γ и другой области v'_{p-1}. После исключения γ она будет принадлежать лишь одной области v'_{p-1}, что является неприемлемым.

Что нужно делать в таком случае? Область γ разделяет две области v_p, которые я обозначил через α и β, однако она сама не образует единственной границы между α и β. Действительно, так как γ иррегулярно, то будет существовать сингулярная область v'_{p-2}, которую я обозначу δ и которая будет принадлежать γ и другой области v'_{p-1}, которую я обозначу через γ'. Эта область γ', согласно тому, что мы видели выше, разделяет те же области, что и γ, т. е. α и β.

Если область δ является регулярной, то мы можем исключить ее и объединить γ и γ'. Тогда область $\gamma+\gamma'$ отделит α от β. Мы уменьшили бы таким образом α_{p-1} и α_{p-2} на единицу, тогда как прочие числа α_i не изменились бы. N также осталось бы неизменным.

Если δ иррегулярно, то одна область v'_{p-3} будет сингулярной. Я обозначу ее ε; она отделит δ от другой области δ'. Мы исключим ε и присоединим δ к δ', и т. д.

Таким же образом мы можем исключить область v'_q, которая отделяет две области v'_{q+1} одну от другой, и присоединить одну из этих областей v'_{q+1} ко второй, но при двух условиях:

1) если q меньше, чем $p-1$, необходимо, чтобы область v'_q была сингулярной;

2) и во всяком случае она должна быть регулярной.

После этого предположения будем рассуждать следующим образом:

Я хочу возвратиться от многогранника P' к многограннику P. Без какого-либо неудобства я могу предположить, что многогранник P не включает сингулярной области, но многогранник P' и промежуточные многогранники могут включать таковые.

При помощи целого ряда исключений и присоединений мы вернемся от многогранника P' к многограннику P, проходя через ряд промежуточных многогранников, которые я обозначу

$$P_0 = P', \quad P_1, \quad P_2, \ldots, \quad P_{m-1}, \quad P_m.$$

Как можно перейти от многогранника P_i к многограннику P_{i+1}?

Если P_i включает сингулярные v'_0, я исключу одну из них. Если же их нет, то все v'_1 будут регулярными; если окажутся сингулярные v'_1, я исключу одну из них.

Если нет сингулярных v'_1, все v'_2 будут регулярными; если окажутся сингулярные v'_2, я исключу одну из них.

И так далее.

И, наконец, не будет ни одного сингулярного v'_{p-2}, все v'_{p-1} будут регулярными и мы будем иметь право исключить любое из них; если одна из областей v_p разделена на несколько областей v'_p, я выберу две из этих областей v'_p, которые будут смежными и отделенными одна от другой областью v'_{p-1}, которая будет их общей границей; я присоединю одну область к другой, исключая эту общую границу.

Мы не остановимся до тех пор, пока не останется ни одной сингулярной области и пока, с другой стороны, ни одна из областей v_p более не будет делиться на несколько областей v'_p. Но тогда мы придем к многограннику P.

Ни одна из этих операций не сможет изменить числа N.

Следовательно, это число имеет одинаковое значение для P и для P', что и следовало доказать.

Это доказательство могло бы вызвать некоторые замечания, можно было бы спросить, все ли области в этой последовательности операций останутся просто связными. Однако, прежде чем изменить наше доказательство с учетом этих замечаний, я хочу определить, какой должна быть величина числа N для просто связного многогранника.

Если наша теорема справедлива, то число N должно иметь одно и то же значение для двух многогранников, полученных при разделении двух

гомеоморфных многообразий. Следовательно, для любых двух просто связных многогранников значение этого числа одно и то же.

Значит, нам достаточно провести это доказательство для произвольно выбранного просто связного многогранника [17].

Я выберу для этой цели обобщенный тетраэдр.

Я называю так многогранник, образованный полной границей области

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad \ldots, \quad x_p > 0,$$
$$x_{p+1} > 0, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_p + x_{p+1} < 0.$$

Тогда будем иметь

$$\alpha_p = p + 2, \quad \alpha_{p-1} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}, \ldots,$$
$$\alpha_q = \frac{(p+2)!}{(q+2)!\,(p-q)!}, \quad \ldots, \quad \alpha_1 = \frac{(p+1)(p+2)}{2}, \quad \alpha_0 = p + 2,$$

т. е. оказывается, что числа α_q равны коэффициентам бинома. Следовательно,

$$(1-1)^{p+2} = 1 - \alpha_p + \alpha_{p-1} - \ldots \pm \alpha_1 \mp \alpha_0 \pm 1 = 1 - N \pm 1.$$

Перед последним членом следует взять знак $+$, если p четное, и знак $-$, если p нечетное.

Следовательно, получим $N=2$ для случая четного p и $N=0$ для случая нечетного p.

Я пришел бы к тому же результату, если бы выбрал обобщенный куб. Я называю так многогранник, образованный полной границей области

$$-1 < x_i < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, p+1).$$

Тогда будем иметь

$$\alpha_p = 2(p+1), \quad \alpha_{p-1} = 2^2 \frac{p(p+1)}{2}, \ldots, \quad \alpha_q = 2^{p-p+1} \frac{(p+1)}{(q+1)!\,(p-a)!}, \ldots,$$
$$\alpha_1 = 2^{l}(p+1), \quad \alpha_0 = 2^{p+1},$$

откуда

$$(1-2)^{p+1} = 1 - \alpha_p + \alpha_{p-1} - \ldots \pm \alpha_1 \mp \alpha_0 = 1 - N,$$

откуда

$$N = 1 - (-1)^{p+1},$$

т. е.

$$N = 2, \text{ если } p \text{ четное},$$

$$N = 0, \text{ если } p \text{ нечетное}.$$

Таким образом, для просто связного многогранника число N равно 2, если p четное, и равно 0, если p нечетное.

Теперь, для того чтобы предложить полное и строгое доказательство нашей теоремы, я предположу, что она верна для многообразий меньше чем p измерений.

Итак, рассмотрим наш многогранник P и область v_q q измерений, принадлежащую этому многограннику. Эта область v_q будет частью определенного числа областей v_{q-1}, определенного числа областей v_{q-2}, ..., определенного числа областей v_p. Совокупность всех этих областей образует то, что я назову *астрой* v_q.

Я обозначу через γ_h число областей v_h $(h > q)$, которые, таким образом, являются частью астры v_q.

Пусть $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ будет точкой v_q; рассмотрим гиперсферу S, которая имеет в качестве уравнения

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2 = \varepsilon^2,$$

где ε — очень малая величина.

Пусть Π будет плоское многообразие, определенное q уравнениями

$$A_i^1 (x_1 - x_1^0) + A_i^2 (x_2 - x_2^0) + \ldots + A_i^n (x_n - x_n^0) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, q),$$

где A_i^k — любые постоянные числа.

Пересечение S, Π и V будет многообразием $p - q - 1$ измерений, которое я обозначу через W и которое будет просто связным. Пересечения S и Π с различными областями, которые образуют астру v_q, определят своей совокупностью многогранник, образованный подразделением W и просто связный.

Для этого многогранника число α_h будет равным γ_{h+q+1}; так как он имеет меньше чем p измерений, то наша теорема приложима к нему. Таким образом, мы можем написать

$$\gamma_p - \gamma_{p-1} + \ldots \pm \gamma_{q+2} \mp \gamma_{q+1} = 2 \text{ или } 0, \qquad (A)$$

в зависимости от того, будет ли $p - q$ четным или нечетным.

Определим теперь многогранник Q, образованный с помощью операции, которую можно назвать *квадрильяжем*.

Пусть V будет многообразие p измерений, расположенное в пространстве n измерений. Построим бесконечное число многообразий, определяемых уравнениями

$$x_i = a_{k,i},$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = -\infty, \ldots, -1, 0, +1, +2, \ldots, +\infty). \qquad (B)$$

Эти плоские многообразия разложат пространство на бесконечное число областей D_n, подобно прямоугольным параллелепипедам. Гра-

ницы D_n будут образованы некоторым числом областей D_{n-1}, имеющих $n-1$ измерений и являющихся частями различных плоских многообразий $x_i = a_{k,i}$, также подобно прямоугольным параллелепипедам. Границы D_{n-1} будут образованы определенным числом областей D_{n-2}, подобно прямоугольным параллелепипедам в пространстве $n-2$ измерений, и так далее.

Тогда многогранник Q будет определен следующим образом: области v_p будут образованы пересечениями V с областями D_n, области v_{p-1} — пересечениями V с областями D_{n-1} и так далее. Наконец, области v_0 будут образованы пересечениями V с областями D_{n-p}.

Из этого определения вытекает, что многогранник Q не допускает сингулярных областей.

Я рассмотрю, кроме того, многогранник P_1, конгруентный Q, и многогранник P', одновременно производный от P и от Q.

Я поднимусь с одной стороны от P' к P, а с другой—от P' к Q и установлю, что при выполнении обеих этих операций число N не меняется.

Сперва поднимемся от P' к P.

Пусть $x_i = a$ — одно из плоских многообразий, определенных уравнением (B). Разделим области v'_q с любым числом измерений, которые составляют многогранник P', на четыре группы.

К первой группе относятся те, которые составляют часть многообразия

$$x_i = a.$$

Ко второй группе относятся области, включающие такие точки, как

$$x_i = a + \varepsilon,$$

где ε — положительное очень малое число.

К третьей группе относятся те области, которые включают такие точки, как

$$x_i = a - \varepsilon.$$

Все остальные области относятся к четвертой группе.

Пусть δ_q, δ'_q, δ''_q будут числами многообразий q измерений, которые соответственно относятся к первой, второй и третьей группам.

Каждое многообразие второй группы будет смежным с одним из многообразий третьей группы и их общей границей будет многообразие первой группы, имеющее одним измерением меньше. Многообразия трех первых групп взаимно соответствуют друг другу, и мы будем иметь

$$\delta'_q = \delta''_q = \delta_{q-1}.$$

Ясно, кроме того, что

$$\delta'_0 = \delta''_0 = \delta_p = 0.$$

Если в совокупности плоских многообразий (B), которые составляют квадрильяж и которые породили многогранники Q и P', исключить многообразие $x_i=a$, то получатся два многогранника Q_1 и P'_1, более простые, чем первые. Сравним P'_1 и P_1.

Когда исключают плоские многообразия $x_i=a$, то исключают многообразия первой группы и *присоединяют* каждое многообразие третьей группы к соответствующему многообразию второй группы. Тогда при переходе от P' к P'_1 число α_q уменьшится на

$$\delta''_q+\delta_q=\delta_q+\delta_{q-1}.$$

В частности, числа α_p и α_0 уменьшатся на δ_{p-1} и δ_0. Отсюда следует, что число N уменьшится на

$$\delta_{p-1}-(\delta_{p-1}+\delta_{p-2})+(\delta_{p-2}+\delta_{p-3})-\ldots\pm(\delta_1+\delta_0)\mp\delta_0=0.$$

Тем самым N не меняется. Таким образом, исключая многообразие $x_i=a$, не изменяют N, но, исключая подобным образом все плоские многообразия, определенные уравнениями (B), возвращаются к многограннику P. Следовательно, число N является одним и тем же для P' и для P.

Поднимемся теперь от P' к Q.

Пусть w_p, w_{p-1}, ..., w_1, w_0 — многообразия, совокупность которых составляет многогранник Q; пусть, далее, v'_p, v'_{p-1}, ..., v'_1, v'_0 — многообразия, совокупность которых составляет многогранник P'.

Распределим многообразия v'_q по $p+1$ классам.

К первому классу мы отнесем такие многообразия, которые являются частью одной из областей w_p, не входя в состав ни одной из областей w_{p-1}. Так как многогранник P' является производным от Q, то мы отнесем к первому классу все многообразия v'_p (которые все входят в подразделения w_p) те из многообразий v'_{p-1}, которые разделяют между собой два многообразия v'_p, являющиеся частью одной и той же области w_p, а также их пересечения.

Ко второму классу мы отнесем многообразия, входящие в состав одной из областей w_{p-1}, но не входящие ни в одну из областей w_{p-2}.

К третьему классу отнесем многообразия, которые являются частью одной из областей w_{p-2}, но не входят ни в одну из областей w_{p-3}.

В состав p-го класса будут входить такие многообразия, которые являются частью одной из областей w_1, но не будут ни одной из точек w_0.

Наконец, $(p+1)$-й класс включит в свой состав точки w_0.

Для того чтобы возвратиться от P' к Q, я сделаю следующее: я начну с исключения всех многообразий первого класса, имеющих менее p измерений, в результате чего при помощи объединения соединятся в одну все области v'_p, являющиеся подразделениями одной и той же области w_p.

Я утверждаю, что эта операция не изменяет числа N.

Действительно, можно предположить, что клетки квадрильяжа, с помощью которых образовано Q, настолько сжаты, что в середине одной из таких клеток D_p, т. е. внутри одной из областей w_p, нельзя найти точек, принадлежащих к двум различным многообразиям v_{p-1}, за исключением случая, когда там оказываются точки, принадлежащие к пересечению обоих этих многообразий. (Я обозначаю всегда с помощью v_q многообразия, совокупность которых образует P.) Более общим образом я могу предположить, что в одной области w_p нельзя найти точек, принадлежащих к различным многообразиям v_q $(q < p)$, если только это не будут точки, принадлежащие пересечениям этих различных многообразий.

Итак, в области w_p мы можем обнаружить точки некоторой области v_q и всех областей v_h $(h > q)$, составляющих часть ее астры.

Но мы не сможем иметь точек двух областей v_q или точек v_q и одной области v_h $(h > q)$, не входящей в состав астры v_q, если, кроме того, не будем иметь точек области v_{q-1}.

Если теперь я буду предполагать, что q является самым малым значением, которое можно дать числу размерностей некоторой области v_q для того, чтобы эта область имела точки внутри w_p, если, повторяю, я сделаю такое предположение, то внутри w_p будут лишь точки *одной-единственной* области v_q и ее астры.

Рассмотрим теперь область w_p, содержащую точки v_q и область астры v_q. Пусть будут заданы числа

$$\gamma_{q+1}, \gamma_{q+2}, \ldots, \gamma_p,$$

которые мы определили выше, определяя астру.

Отсюда следует, что внутри w_p мы будем иметь

1	область	v'_q	первого	класса
γ_{q+1}	областей	v'_{q+1}	»	»
γ_{q+2}	»	v'_{q+2}	»	»
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
γ_p	»	v'_p	»	»

Исключая области первого класса, имеющие менее чем p измерений, и присоединяя одни к другим γ_p областей v'_p, совокупность которых составляет w_p, мы уменьшаем α_p на γ_{p-1}, α_{p-1} на $\gamma_{p-1}, \ldots, \alpha_{q+1}$ на γ_{q+1}, α_q на 1. Тогда на основании уравнения (A) число N не меняется.

Выполнив это, мы исключим затем все многообразия второго класса, имеющие менее $p-1$ измерений, прибавляя одни к другим все многообразия второго класса v_{p-1}, являющиеся частью одной и той же области w_{p-1}. Затем мы исключим все многообразия третьего класса, имеющие менее

$p-2$ измерений, прибавляя одни к другим все многообразия v_{p-2}, являющиеся частью одной и той же области w_{p-2}, и так далее.

Наконец, мы придем к многограннику Q.

Тем же путем, что и выше, можно показать, что ни одна из этих операций не изменит числа N.

Следовательно, число N является одним и тем же для P' и Q; оно является также одним и тем же для P и Q и, следовательно, для любых двух конгруентных многогранников.

Это и следовало доказать.

§ 17. Случай нечетного p

Я собираюсь определить относительно любого многогранника P новые замечательные числа, которые я обозначу через $\beta_{\lambda, \mu}$.

Пусть сперва $\lambda > \mu$; я рассмотрю все многообразия v_λ, для каждого из них я определю число многообразий v_μ, являющихся их частью. Затем я суммирую все эти числа относительно различных многообразий v_λ и эту сумму обозначу $\beta_{\lambda, \mu}$.

Так как многообразия v_λ, по предположению, являются просто связными, то будем иметь

$$\beta_{\lambda, \lambda-1} - \beta_{\lambda, \lambda-2} + \cdots \pm \beta_{\lambda, 1} \mp \beta_{\lambda, 0} = 2\alpha_\lambda \text{ или } 0,$$

в зависимости от того, будет ли λ нечетным или четным.

Пусть теперь $\lambda < \mu$, я рассмотрю все многообразия v_λ, для каждого из них я возьму число тех многообразий v_μ, частью которых оно является (т. е. число γ_μ относительно астры v_λ). Я образую затем сумму всех этих чисел относительно различных многообразий v_λ и эту сумму я назову $\beta_{\lambda, \mu}$.

На основании уравнения (A) предыдущего параграфа будем иметь

$$\beta_{\lambda, p} - \beta_{\lambda, p-1} + \cdots \pm \beta_{\lambda, \lambda+2} \mp \beta_{\lambda, \lambda+1} = 2\alpha_\lambda \text{ или } 0,$$

в зависимости от того, будет ли $p-\lambda$ нечетным или четным.

Из этого определения следует, что

$$\beta_{\lambda, \mu} = \beta_{\mu, \lambda}.$$

Установив это, построим следующую таблицу:

$+\beta_{p, p-1}$,	$-\beta_{p, p-2}$,	$+\beta_{p, p-3}$,	$\ldots$,	$\pm\beta_{p, 1}$,	$\mp\beta_{p, 0}$,
	$+\beta_{p-1, p-2}$,	$-\beta_{p-1, p-3}$,	$\ldots$,	$\pm\beta_{p-1, 1}$,	$\pm\beta_{p-1, 0}$,
	$\ldots\ldots\ldots$,	$\ldots\ldots\ldots$,	$\ldots$,	$\ldots\ldots$,	$\ldots\ldots$,
		$\ldots\ldots\ldots$,	$\ldots$,	$\ldots\ldots$,	$\ldots\ldots$,
			$\ldots$,	$\ldots\ldots$,	$\ldots\ldots$,
				$+\beta_{2, 1}$,	$-\beta_{2, 0}$,
					$+\beta_{1, 0}$.

Очевидно, что в каждой строке и в каждом столбце каждый член имеет присвоенный ему знак $+$ или $-$ таким образом, что $\beta_{\lambda, \mu}$ присваивается знак $+$, если $\lambda - \mu$ является нечетным, и знак $-$, если оно является четным.

Построим сумму членов этой таблицы; это суммирование можно выполнить двумя способами: суммируя сначала строчки и суммируя сначала столбцы.

Сумма членов различных строк таблицы будет равна, начиная сверху,

$$2\alpha_p,\ 0,\ 2\alpha_{p-2},\ 0,\ \ldots,\ 2\alpha_3,\ 0,\ 2\alpha_1,$$

если p нечетное, и

$$0,\ 2\alpha_{p-1},\ 0,\ 2\alpha_{p-3},\ \ldots,\ 2\alpha_3,\ 0,\ 2\alpha_1,$$

если p четное. Следовательно, сумма членов таблицы равна

$$2\alpha_1 + 2\alpha_3 + \ldots + 2\alpha_p,$$

если p нечетное, и

$$2\alpha_1 + 2\alpha_3 + \ldots + 2\alpha_{p-1},$$

если p четное.

Сумма членов различных столбцов таблицы будет, начиная слева.

$$2\alpha_{p-1},\ 0,\ 2\alpha_{p-3},\ 0,\ \ldots,\ 2\alpha_2,\ 0,\ 2\alpha_0,$$

если p нечетное, и

$$2\alpha_{p-1},\ 0,\ 2\alpha_{p-3},\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 2\alpha_1,\ 0,$$

если p четное.

Сумма членов таблицы будет, следовательно, равна

$$2\alpha_0 + 2\alpha_2 + \ldots + 2\alpha_{p-1},$$

если p нечетное, и

$$2\alpha_1 + 2\alpha_3 + \ldots + 2\alpha_{p-1},$$

если p четное.

Сравнивая два выражения этой суммы, получим тождество в случае четного p и выражение

$$N = 0$$

в случае нечетного p.

Отсюда следует:

Число N является нулем и не зависит от чисел Бетти, если p нечетное; оно, наоборот, зависит от чисел Бетти, если p четное.

§ 18. Второе доказательство

Второе доказательство покажет нам, как это число зависит от чисел Бетти.

Чтобы хорошо в нем разобраться, я проведу его сперва для обычных многогранников с α_0 вершинами, α_1 ребрами и α_2 гранями.

Каждой из α_0 вершин я сопоставлю произвольное число; каждому из α_1 ребер я сопоставлю число δ, равное разности чисел, соответствующих двум его вершинам.

Таким образом, мы будем иметь α_1 разностей δ, которые, однако, нельзя выбрать произвольно. В самом деле, они будут определены, если мы будем знать α_0 чисел, связанных с вершинами, и даже тогда, когда будем знать разности первых $\alpha_0 - 1$ этих чисел с последним из них. Оказывается, следовательно, что произвольно можно выбрать всего $\alpha_0 - 1$ разностей δ.

Итак, между разностями δ должно существовать

$$\alpha_1 = \alpha_0 + 1$$

линейных соотношений.

Совершенно ясно, что все эти линейные соотношения можно было бы получить следующим способом: рассмотрим последовательность ребер, образующую замкнутый контур; алгебраическая сумма разностей δ, относящихся к различным ребрам этой последовательности, должна равняться нулю.

Итак, попробуем построить замкнутые контуры, образованные ребрами.

Во-первых, у нас будут многоугольные контуры каждой грани; их число равно α_2.

Если затем многогранник не является просто связным, мы можем провести на его поверхности $P_1 - 1$ замкнутых контуров, линейно независимых в смысле, приданном этому понятию в параграфе о гомологиях. Пусть C будет одним из этих контуров; он последовательно пересекает различные грани; пусть a_1a_2, a_2a_3, . . ., $a_{n-1}a_n$, a_na_1 — дуги этих контуров, взятые на каждой из его граней.

Возьмем первую из этих дуг a_1a_2 и соответствующую грань F.

Точка a_1 и точка a_2 находятся на периметре этой грани; мы могли бы перейти от a_1 к a_2, следуя по этому периметру путем, который я обозначу $a_1m_1a_2$. Тогда будем иметь

$$a_1m_1a_2 + a_2a_1 \sim 0,$$

иначе говоря, на контуре C можно заменить дугу a_1a_2 с помощью дуги $a_1m_1a_2$; подобным же образом поступим и с другими дугами; окончательно мы заменим C гомологичным контуром

$$a_1m_1a_2 + a_2m_2a_3 + \ldots + a_nm_na_1,$$

который я обозначу C'. Этот контур C' будет состоять из определенного числа ребер и частей ребер. Например, дуга $a_1m_1a_2$ будет состоять из сегмента ребра, соединяющего a_1 с ближайшей вершиной, затем из некоторого числа полных ребер, затем из сегмента Sa_2, соединяющего a_2 с ближайшей вершиной.

Однако этот сегмент Sa_2 пробегается по дуге $a_2m_2a_3$ в противоположном направлении. Части ребер, составляющих C_1', пробегаются, следовательно, дважды в противоположных направлениях. Следовательно, мы можем исключить их и, таким образом, получим контур C'', образованный исключительно целыми ребрами и гомологичный C или C'.

Мы получим P_1-1 контуров, аналогичных C'', которые дадут P_1-1 соотношений между δ.

Таким образом, мы получим α_2+P-1 замкнутых контуров, образованных дугами; я утверждаю, что все прочие возможные контуры будут лишь их комбинациями.

Пусть задан замкнутый контур, образованный ребрами и гомологичный нулю; он разделит поверхность многогранника на две области. Пусть R — одна из них; очевидно, она будет образована определенным числом q граней, поскольку контур образуется исключительно ребрами. Следовательно, мы можем заменить заданный контур q частными контурами, образованными периметрами этих q граней.

Если теперь заданный контур не гомологичен нулю, то мы всегда сможем заменить его комбинацией контуров C'' и контуром, гомологичным нулю.

Следовательно, будем иметь

$$\alpha_2+P_1-1$$

соотношений между нашими δ и не будем иметь никаких других. Однако будут ли они все различными?

Для того чтобы разобраться в этом, следует посмотреть, можно ли образовать из этих соотношений линейную комбинацию, которая сведется к тождеству или, что то же самое, можно ли образовать из наших α_2+P_1-1 контуров такую комбинацию, чтобы каждое ребро пробегалось два раза в противоположном направлении (или, если бы эта операция проводилась более двух раз, чтобы она выполнялась столько же раз в одном направлении, сколько и в противоположном).

Можно ли, во-первых, образовать такую комбинацию с α_2 периметрами П? Сказать, что каждое ребро пробегается подобным образом дважды в противоположных направлениях, значит сказать, что совокупность многоугольников, периметры которых обегаются указанным образом, образует замкнутый многогранник.

Итак, становится очевидным, что подобным образом можно построить лишь один замкнутый многогранник, который и будет заданным многогранником.

Следовательно, с помощью α_2 соотношений, соответствующих периметрам П, можно образовать тождественную линейную комбинацию, причем только одну.

Можно ли теперь образовать подобные комбинации с периметрами П и контурами C''? Если бы это было так, совокупность многоугольников, периметры которых пробегаются указанным образом, образовала бы

полиэдральную незамкнутую поверхность, полная граница которой была бы образована комбинацией контуров C''. Но это невозможно, так как контуры C' являются линейно независимыми.

Следовательно, при помощи наших α_2+P_1-1 соотношений можно образовать тождественную комбинацию и только одну. Итак, между δ будет

$$(\alpha_2+P_1-1)-1$$

различных соотношений. Число произвольных δ будет, следовательно,

$$\alpha_1-(\alpha_2+P_1-1)+1,$$

откуда вытекает

$$\alpha_0-1=\alpha_1-(\alpha_2+P_1-1)+1$$

или

$$N=3-P_1.$$

Распространим это доказательство на случай многогранника трех измерений, где различаются:

α_0	вершин	v_0
α_1	многообразий	v_1
α_2	»	v_2
α_3	»	v_3.

Каждому из v_0 сопоставим некоторое число и каждому из v_1 — разность δ между числами, соответствующими двум вершинам. Тогда получим α_1 разностей δ, из которых α_0-1 будут произвольными.

Линейные соотношения, существующие между δ, будут получены построением всех замкнутых контуров исключительно из v_1.

Сперва мы получим периметры Π многообразий v_2, число которых будет α_2; пусть затем C — любой замкнутый контур, не гомологичный нулю, который пересечет последовательно различные v_3; пусть a_1a_2, $a_2a_3 \ldots$ — дуги C, которые находятся в каждом из этих v_3.

Рассмотрим дугу a_1a_2, которая находится в одном из v_3, я обозначу ее через Φ; концы этой дуги, a_1 и a_2, находятся в двух из v_2, служащих границей Φ, а именно, a_1 в φ_1 и a_2 в φ_2.

Пусть b_1 — какая-либо вершина φ_1 и b_2 — какая-либо вершина φ_2. Соединим a_1 и b_1 любой линией a_1b_1, затем соединим b_1 и b_2 линией b_1b_2, образованной исключительно v_1, принадлежащими к границе Φ, и b_2 и a_2 любой линией a_2b_2. Тогда будем иметь

$$a_1a_2 \sim a_1b_1+b_1b_2+b_2a_2,$$

так что мы можем заменить дугу a_1a_2 дугой $a_1b_1b_2a_2$; сделаем то же самое и для других дуг C. Произведем замену C гомологичным контуром

$$a_1b_1b_2a_2+a_2b_2b_3a_3+\cdots,$$

который я обозначу через C'. Контур C' состоит из некоторого числа v_1 и дуг, аналогичных a_1b_1, a_2b_2, . . ., каждая из которых пробегается два раза в противоположных направлениях. Следовательно, можно исключить эти дуги, и у нас останется контур C'', гомологичный с C и образованный исключительно из v_1.

Всего будет $P_1 - 1$ контуров C''.

Я утверждаю теперь, что каждый замкнутый контур K, образованный из v_1, является комбинацией из П и из C''. Если $K \sim 0$, то контур K будет полной границей некоторой области R двух измерений. Эту область R можно подразделить на определенное число многообразий r и каждая из областей r является при этом частью R, находящейся внутри v_3. Рассмотрим одно из многообразий r и пусть φ — область v_3, в которой оно находится; полная граница r будет замкнутым многообразием u одного измерения, составляющего часть полной границы φ. Так как φ является просто связным, то u разделит полную границу φ на две области. Пусть r' — одна из этих областей; она будет состоять из некоторого числа областей v_2, которые будут входить в нее целиком, и из некоторого числа частей v_2 (так как между v_2, образующими полную границу φ, есть такие, которые u разбивают на две части). Очевидно, r гомологично r', и мы можем заменить r на r'. Если мы будем поступать так для всех областей r, то получим многообразие R', гомологичное R, которое будет состоять из определенного числа полных v_2 и из некоторого числа кусков v_2, которые попарно противоположны друг другу. Мы можем исключить эти куски и таким образом получим многообразие R'', гомологичное относительно R и ограниченное тем же контуром K. Это многообразие R'' можно разложить на некоторое число многоугольников v_2 так, что контур K может быть заменен периметрами П этих многоугольников.

Если K не гомологично нулю, то его можно заменить некоторым числом контуров C'' и контуром, гомологичным нулю.

Итак, мы имеем

$$\alpha_2 + P_1 - 1$$

соотношений между δ, которые я запишу как

$$\varepsilon = 0,$$

и мы не будем иметь никаких других. Но все ли они различны?

Иначе говоря, смогли ли бы мы построить линейную комбинацию из ε, которая была бы тождественно равна нулю, или комбинацию из П и из C'', где каждое v_1 повторяется два раза в противоположном смысле?

Если в эту комбинацию должны быть включены C'', то совокупность многогранников v_2, периметры П которых входили бы в состав комбинации, образовали бы многообразие двух измерений, не замкнутое, полная граница которого была бы образована некоторым числом контуров C''. Но это невозможно, так как C'' линейно независимы.

Мне остается лишь исследовать те комбинации, в состав которых не входят П; совокупность многоугольников v_2, периметры П которых входили в состав комбинаций, образуют теперь замкнутое многообразие.

Таким образом, мы пришли к необходимости исследовать замкнутые многообразия, образованные исключительно из v_2.

Здесь мы имеем сперва полные границы v_3, которые я обозначу Ф и число которых будет α_3.

Пусть затем D — произвольное многообразие двух измерений, не гомологичное нулю. Поступим с ним так, как мы поступали с R; мы увидим, что оно гомологично замкнутому многообразию D'' двух измерений, образованному исключительно из v_2.

Число этих D'' будет $P_2 - 1$.

Я утверждаю теперь, что любое замкнутое многообразие K, образованное из v_2, является комбинацией П и D''. Действительно, если оно гомологично нулю, то оно ограничивает область S трех измерений, которая будет состоять из некоторого числа v_2, поскольку K состоит из некоторого числа v_2. Следовательно, можно заменить K полными границами Ф этих v_2. Если же K не гомологично нулю, то его можно заменить некоторым числом D'' и многообразием, гомологичным нулю, образованным исключительно из v_2.

Итак, мы имеем

$$\alpha_2 + P_2 - 1$$

линейных соотношений между ε, которые я запишу коротко

$$\zeta = 0,$$

и более никаких других. Все ли они различны?

Для того чтобы образовать линейную комбинацию из ζ, которая будет тождественно равной нулю, необходимо образовать комбинацию из Ф и из D'' такую, что каждое v_2 фигурирует в ней дважды в противоположном смысле. Мы увидим, подобно предыдущему, что D'' не могут фигурировать в этой комбинации и что совокупность v_2, границы которых Ф фигурируют в ней, должна образовать замкнутое многообразие трех измерений. Однако мы не сможем построить более одного-единственного многообразия такого вида: это есть сам заданный многогранник.

Следовательно, существует одна линейная комбинация из ζ, которая тождественно сводится к нулю.

Значит будем иметь

$$(a_3 + P_2 - 1) - 1$$

различных линейных соотношений между ε,

$$(\alpha_2 + P_1 - 1) - (\alpha_3 + P_2 - 1) + 1$$

различных линейных соотношений между δ.

Итак, между δ останется лишь

$$\alpha_1 - (\alpha_2 + P_1 - 1) + (\alpha_3 + P_2 - 1) - 1$$

соотношений, которые будут произвольными; таким образом, находим

$$\alpha_0 - 1 = \alpha_1 - (\alpha_2 + P_1 - 1) + (\alpha_3 + P_2 - 1) - 1,$$

и для многогранников четырех измерений можно было бы найти, что

$$\alpha_0 - 1 = \alpha_1 - (\alpha_2 + P_1 - 1) + (\alpha_3 + P_2 - 1) - (\alpha_4 + P_3 - 1) + 1.$$

Следовательно, имеем

$$N = P_2 - P_1$$

для многогранников трех измерений и

$$N = 3 - P_1 + P_2 - P_3$$

для многогранников четырех измерений.

В общем случае будем иметь

$$N = P_{p-1} - P_{p-2} + \ldots + P_2 - P_1,$$

если p нечетное, и

$$N = 3 - P_1 + P_2 - \ldots + P_{p-1},$$

если p четное.

Если мы заметим теперь, что числа Бетти, равноотстоящие от концов, равны, то увидим, что необходимо

$$N = 0,$$

если p нечетное, что мы уже видели в предыдущем параграфе.

ДОПОЛНЕНИЕ К «ANALYSIS SITUS» *

§ 1. Введение

В Журнале Политехнической школы (том, посвященный столетию основания Школы, 1894) я опубликовал мемуар, озаглавленный «Analysis situs», в котором я изучил многообразия в пространстве более трех измерений и свойства чисел Бетти. К этому именно мемуару будут относиться ссылки, которые я вынужден довольно часто делать в дальнейшем, указывая только на заглавие «Analysis situs».

В этом мемуаре сформулирована следующая теорема: *для всякого замкнутого многообразия числа Бетти, равноотстоящие от концов, равны между собой.*

Та же самая теорема была сформулирована Пикаром в его «*Теории алгебраических функций двух переменных*» [18].

Недавно Хегор возвратился к той же проблеме в весьма замечательной работе, опубликованной на датском языке под заглавием «Введение в топологическую теорию алгебраической связности» **. Он считает, что изложенная теорема неверна и доказательства ее не представляют ценности.

Прежде чем заняться возражениями Хегора, следует сделать одно замечание. Существуют два способа определения чисел Бетти.

Рассмотрим многообразие V, которое я буду, например, считать замкнутым. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — n многообразий p измерений, лежащих в V. Я предполагаю, что нельзя найти многообразия $p+1$ измерений, лежащего в V, для которого $v_1, v_2, \ldots, v_n$ составляют полную границу. Однако, если к ним добавить некоторое $(n+1)$-е многообразие p измерений, которое я обозначу v_{n+1} и которое лежит в V, то можно найти в V такое многообразие $p+1$ измерений, входящее в состав V, что $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$ образуют его полную границу, *каким бы способом ни было выбрано* $(n+1)$-е *многообразие* v_{n+1}. В этом случае говорят, что число Бетти равно $n+1$ для многообразий p измерений.

Таково определение, принятое Бетти.

---

* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1899, 13, p. 285—343.

** Forstudier til en topologisk teori för de algebraiske Sammenhäng. Copenhague, det Nordiske Forlag E. Bojesen, 1898.

Но можно предложить и иное определение.

Предположим, что можно найти в V такое многообразие $p+1$ измерений, что v_1, v_2, ..., v_n определят его полную границу. Я могу выразить это с помощью следующего соотношения:

$$v_1+v_2+\ldots+v_n\sim 0,$$

которое я назову *гомологией*.

Может случиться, что в полной границе нашего многообразия $p+1$ измерений несколько раз будет повторяться одно и то же многообразие v_1; в этом случае оно войдет в состав первого члена гомологии с коэффициентом, который должен быть целым числом.

В соответствии с этим определением, можно складывать гомологии, можно вычитать их одну из другой, можно их умножать на целое число.

Условимся также, что можно делить гомологию на целое число, если на это число делятся все коэффициенты. Следовательно, если имеется многообразие $p+1$ измерений, полная граница которого составлена четырехкратной величиной многообразия v_1, то мы условимся, что можно записывать не только гомологию

$$4v_1\sim 0,$$

но и гомологию

$$v_1\sim 0;$$

причем эта гомология означает, что существуют многообразия $p+1$ измерений, такие, которые в качестве полной границы имеют многообразие v_1 или это многообразие, взятое некоторое число раз.

Гомология

$$2v_1+3v_2\sim 0$$

означает, что есть многообразия $p+1$ измерений, которые в качестве полной границы имеют двойную величину v_1 и тройную величину v_2 или четырехкратную величину v_1 и шестикратную v_2, или шестикратную v_1 и девятикратную v_2 и т. д.

Такие условия были приняты мною в «Analysis situs», стр. 470.

Я скажу также, что несколько многообразий будут независимыми, если они не связаны никакой гомологией с целыми коэффициентами.

Если же есть n независимых многообразий p измерений, то число Бетти, в соответствии со вторым определением, будет равно $n+1$.

Это второе определение, которое было принято мной в «Analysis situs», не согласуется с первым.

Теорема, сформулированная выше и подвергнутая Хегором критике, является действительной для чисел Бетти, определенных по второму способу. Она неверна для чисел Бетти, определенных по первому способу.

Это и доказывает пример, приведенный Хегором на стр. 86.

Если принять первое определение, то

$$P_1=2, \quad P_2=1$$

и, следовательно,

$$P_2 < P_1.$$

Если же, наоборот, принять второе определение, то найдем

$$P_1=1, \quad P_2=1$$

и, следовательно,

$$P_2=P_1$$

в соответствии со сформулированной теоремой.

То же самое было доказано и с помощью примера, приведенного мною в «Analysis situs» (третий пример, стр. 494).

Нами были построены фундаментальные тождества (стр. 506), которые были записаны следующим образом:

$$2C_1=2C_2=2C_3, \quad 4C_1=0;$$

мы можем вывести из них гомологии

$$4C_1 \sim 4C_2 \sim 4C_3 \sim 0.$$

Поскольку, соответственно нашему предположению, эти гомологии можно разделить на 4, мы придем к следующей системе фундаментальных гомологий:

$$C_1 \sim C_2 \sim C_3 \sim 0.$$

Если теперь P_1 и P_2 — числа Бетти, *определенные по второму способу*, то находим

$$P_1=P_2=1.$$

Однако равенства чисел P_1 и P_2 не существовало бы, если бы было принято первое определение, предложенное Бетти; по-прежнему оставалось бы $P_2=1$, однако не было бы $P_1=1$.

Действительно, не существует многообразия двух измерений, которое имело бы в качестве своей полной границы замкнутую линию C_1, иначе существовало бы тождество $C_1=0$.

Справедливо лишь то, что существует многообразие двух измерений, принимающее в качестве границы учетверенную линию C_1. Следовательно, P_1 не равно 1.

Возвратимся к теореме, согласно которой числа Бетти, равноотстоящие от концов, равны между собой.

Доказательство, которое я предложил в «Analysis situs», кажется одинаково приложимым к обоим определениям чисел Бетти; оно все же должно

иметь слабое место, ибо предшествующие примеры достаточно ясно показали неверность теоремы для первого определения.

Хегор это прекрасно понял, однако я не думаю, чтобы его первое возражение было обосновано.

После того как он изложил мой способ определения многообразий V_1, V_2, ..., V_p («Analysis situs», стр. 489) с помощью уравнений $\Phi=0$, $F''_i=0$, он добавляет (стр. 70): «... каждое из многообразий V должно, следовательно, быть полным пересечением p многообразий U $h-1$ измерений». Это неточно, так как, кроме равенств, у меня есть еще некоторое число неравенств, которые я ввел в начале мемуара и которые я более не повторял в последующих рассуждениях; следовательно, мои многообразия не являются полными пересечениями.

Второе возражение, напротив, справедливо. «Если наоборот, — говорит Хегор, — гомология $\sum\limits_i V_i \sim 0$ не имеет места, тогда в U' можно провести замкнутую кривую V' такую, что $\sum N(V', V_i) \neq 0$, но неясно, будет ли эта кривая пересечением многообразий V». Здесь, действительно, слабое место доказательства.

Итак, необходимо вернуться к рассмотрению вопроса, что и составляет предмет настоящей работы.

Часто для упрощения доказательств я рассматривал лишь случай замкнутых многообразий трех измерений, содержащихся в пространстве четырех измерений. Нетрудно распространить их на общий случай.

Я рассматриваю, таким образом, в последующем, замкнутое многообразие V, но для вычисления его чисел Бетти я полагаю, что оно разделено на меньшие многообразия, которые образуют полиэдр, в том смысле, как об этом говорится на стр. 532 «Analysis situs».

§ 2. Схема полиэдра

Итак, рассмотрим, как это было сделано в «Analysis situs» на стр. 532, полиэдр p измерений, иначе говоря, многообразие V p измерений, разделенное на многообразия v_p. Границами v_p будут v_{p-1}; границами v_{p-1} будут v_{p-2}, ..., границами v_1 (ребер) будут v_0 (вершины).

Я обозначу через α_i число v_i.

Пусть a_1^q, a_2^q, ..., $a_{\alpha_q}^q$ будут различные v_q.

Пусть a_1^q будет одним из многообразий v_q и a_1^{q-1} одним из многообразий v_{q-1}, служащих ему в качестве границы. Изучим взаимоотношения a_1^q и a_1^{q-1}.

Пусть

$$F_1 = F_2 = \ldots = F_{n-q} = F_{n-q+1} = 0, \qquad \varphi_\gamma > 0 \tag{1}$$

будут равенства и неравенства, определяющие a_1^{q-1} в соответствии с первым определением многообразий («Analysis situs», стр. 459).

Соотношения, определяющие a_1^q, можно выразить в форме

$$F_1 = F_2 = \ldots = F_{n-q} = 0, \quad F_{n-q+1} > 0, \quad \varphi_\gamma > 0. \tag{2}$$

В этом случае мы скажем, что отношение a_1^q и a_1^{q-1} является *прямым*. Это отношение становится *обратным*, если заменить одно из этих двух многообразий противоположным многообразием; оно опять станет прямым, если каждое из двух многообразий заменить противоположным.

Известно, что многообразие заменяется *противоположным многообразием* («Analysis situs», стр. 468), если поменять местами две из функций F (которые, будучи приравнены нулю, дают уравнения, определяющие многообразие), или же переменить знак у одной из них.

Итак, пары многообразий

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0, \quad F_1 = F_2 = 0, \quad F_3 > 0;$$
$$F_1 = F_2 = F_3 = 0, \quad F_1 = F_3 = 0, \quad F_2 < 0;$$
$$F_1 = F_2 = F_3 = 0, \quad F_2 = F_3 = 0, \quad F_1 > 0$$

находятся в прямом отношении, тогда как пары многообразий

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0, \quad F_1 = F_2 = 0, \quad F_3 < 0;$$
$$F_1 = F_2 = F_3 = 0, \quad F_1 = F_3 = 0, \quad F_2 > 0$$

находятся в обратном отношении.

Установив это, предположим, что $\varepsilon_{i,j}^q$ — число, равное нулю, если a_j^{q-1} не является границей a_i^q; равное $+1$, если a_j^{q-1} — граница a_i^q и находится в прямом отношении с a_i^q; наконец, равно -1, если a_j^{q-1} — граница a_i^q, но находится с a_i^q в обратном отношении.

Условимся писать *конгруенцию*

$$a_i^q \equiv \sum \varepsilon_{i,j}^q a_j^{q-1}, \tag{3}$$

с помощью которой определим границы a_i^q.

Совокупность конгруенций (3), соответствующих разностям $v_p, v_{p-1}, \ldots, v_0$ от V, составляет то, что можно назвать *схемой полиэдра*.

Можно поставить себе два вопроса:

1. Если схема задана, всегда ли существует соответствующий ей полиэдр?

2. Гомеоморфны ли два полиэдра, имеющие одну и ту же схему?

Мы не будем пока пытаться исследовать эти два вопроса, а предварительно попробуем найти некоторые из условий, которым должна удовлетворять схема для того, чтобы полиэдр мог ей соответствовать.

Рассмотрим одно из v_{p-1}, например a_1^{p-1}; это многообразие должно отделять друг от друга два и только два из v_p. Таким образом, среди чисел $\varepsilon_{i,1}^p$ будет одно, равное $+1$, одно, равное -1; все остальные будут равняться нулю.

Это еще не все: рассмотрим одно какое-либо из v_q, например, a_i^q и одно из v_{q-2}, например, a_k^{q-2}.

Одно из двух: или a_k^{q-2} не будет принадлежать к a_i^q и в этом случае все произведения

$$\varepsilon_{i,j}^q \varepsilon_{j,k}^{q-1} \tag{4}$$

будут нулями, так как если a_j^{q-1} не принадлежит к a_i^q, то первый множитель равен нулю; если, наоборот, a_j^{q-1} будет принадлежать к a_i^q, то многообразие a_k^{q-2} не сможет принадлежать к a_j^{q-1} (без чего оно будет принадлежать к a_i^q, что противоречит предположению), и второй множитель должен быть нулем.

Иначе a_k^{q-2} будет принадлежать к a_i^q; но тогда мы сможем рассуждать о многообразии a_i^q так же, как мы только что рассуждали о многообразии V, и заключим, что a_k^{q-2} должно отделять друг от друга два многообразия v_{q-1}, принадлежащие к a_i^q, и притом только два, а именно a_1^{q-1} и a_2^{q-1}.

Среди произведений (4) будет только два таких, которые не равны нулю:

$$\varepsilon_{i,1}^q \varepsilon_{1,k}^{q-1}, \quad \varepsilon_{i,2}^q \varepsilon_{2,k}^{q-1}.$$

Что касается всех других, то в действительности или a_j^{q-1} не будет принадлежать к a_i^q, или a_k^{q-2} не будет принадлежать к a_j^{q-1}.

Следовательно, эти два произведения будут равны $+1$ в одном случае и -1 во втором.

Итак, для всех случаев

$$\sum_j \varepsilon_{i,j}^q \varepsilon_{j,k}^{q-1} = 0. \tag{5}$$

Также будем иметь

$$\sum_i \varepsilon_{i,1}^p = 0$$

и, в более общем случае, каким бы ни было k,

$$\sum_i \varepsilon_{i,k}^p = 0. \tag{5bis}$$

Соотношение (5bis) можно, с некоторой точки зрения, рассматривать как частный случай соотношения (5).

Пусть P будет частью пространства $p+1$ измерений, ограниченного полиэдром V; тогда полная граница P будет состоять из различных

многообразий v_p, которые в своей совокупности образуют V; следовательно, мы можем записать в смысле конгруенции (3)

$$P \equiv \sum_i a_i^p \tag{3bis}$$

или же

$$P \equiv \sum_i \varepsilon_{0,i}^{p+1} a_i^p,$$

где числа $\varepsilon_{0,i}^{p+1}$ по определению все будут равны 1.

С учетом этого, соотношение (5bis), которое можно записать

$$\sum_i \varepsilon_{0,i}^{p+1} \varepsilon_{i,k}^p = 0,$$

является теперь не чем иным, как частным случаем соотношения (5).

Далее, каждое v_1 имеет в качестве концов два и только два v_0, что дает нам возможность получить конгруенции (3) в форме

$$a_i' = a_j^0 - a_k^0$$

и получить соотношение, аналогичное (5) и (5bis),

$$\sum_j \varepsilon_{i,j}^1 = 0,$$

которое опять приводится к форме (5), если мы согласимся считать, что все $\varepsilon_0 = +1$.

С другой стороны рассмотрим одно из a_i^q, все a_j^{q+1}, для которых оно служит границей, все a_k^{q+2}, для которых эти a_j^{q+1} служат границами, и так далее. Совокупность всех этих многообразий составит то, что мы назвали *астрой* («Analysis situs», стр. 537).

Мы видели (цит. работа, стр. 537), что полиэдр, соответствующий астре, должен быть просто связным. Итак, одно из условий того, чтобы полиэдр мог соответствовать заданной схеме, состоит в том, что полиэдры, соответствующие различным астрам, в согласии с условием, данным на стр. 537 «Analysis situs», все должны быть просто связными.

Рассмотрим теперь одно из a_i^q, все a_j^{q-1}, которые являются его границами, a_k^{q-2}, служащие границами для a_j^{q-1}, и т. д. Эта совокупность многообразий составит полиэдр q измерений; будем предполагать, что он имеет простую связность.

Это уже не есть условие, необходимое, чтобы полиэдр соответствовал схеме: это просто некоторое условие, которое, если не оговорено противное, предполагается выполненным.

Чтобы уяснить это определение на примере, посмотрим сначала, каковой является схема обобщенного тетраэдра, определенного на стр. 536 («Analysis situs»).

Грани этого тетраэдра определены $n+1$ уравнениями

$$\begin{aligned} &x_1=0,\ x_2=0, \ldots, x_n=0, \\ &x_1+x_2+\ldots+x_n=1. \end{aligned} \tag{6}$$

Мы получим все a_i^q, исключая каждый раз по $q+1$ из этих уравнений. Для определения ориентации многообразия a_i^q предположим, что $q+1$ уравнений исключены, однако порядок оставшихся $n-q$ уравнений остался неизменным.

Предположив это, рассмотрим отношение a_i^q и a_j^{q-1} и попробуем определить число $\varepsilon_{i,j}^q$.

Прежде всего, чтобы a_i^{q-1} принадлежало к a_i^q, необходимо, чтобы a_j^{q-1} было определено $n-q$ уравнениями, определяющими a_i^q, к которым мы должны добавить $(n-q+1)$-е уравнение, взятое из числа уравнений (6). В противном случае число $\varepsilon_{i,j}^q$ будет равно нулю.

Итак, предположим, что a_j^{q-1} будет получено при исключении уравнений с номерами

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_q.$$

Предположим, что для получения a_i^q надо, *кроме того*, исключить β-е уравнение; тогда число $\varepsilon_{i,j}^q$, абсолютное значение которого будет всегда равно 1, будет иметь тот же знак, что и произведение

$$(\beta-\alpha_1)(\beta-\alpha_2)\ldots(\beta-\alpha_q).$$

Теперь легко проверить, что соотношение (5) имеет место.

В самом деле, рассмотрим многообразие a_k^{q-2}, полученное путем исключения уравнений с номерами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-1}$, и многообразие a_i^q, полученное путем исключения, кроме того, уравнений с номерами β и γ. (Ясно, что если a_i^q не получается путем исключения тех же уравнений, что и для a_k^{q-2}, плюс два других, то все произведения $\varepsilon_{i,j}^q\varepsilon_{j,k}^{q-1}$ были бы нулями.)

В этом случае все произведения еще будут нулями, за исключением двух

$$\varepsilon_{i,1}^q\varepsilon_{1,k}^{q-1} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{1,2}^q\varepsilon_{2,k}^{q-1},$$

которые будут соответствовать двум многообразиям a_1^{q-1} и a_2^{q-2}, полученным, соответственно, путем исключения уравнений с номерами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-1}, \beta$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-1}, \gamma$.

Тогда четыре числа

$$\varepsilon^q_{i,1}, \quad \varepsilon^{q-1}_{1,k}, \quad \varepsilon^q_{i,2}, \quad \varepsilon^{q-1}_{2,k}$$

будут соответственно иметь тот же знак, что и

$$\begin{gathered}(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha_1)(\gamma-\alpha_2)\ldots(\gamma-\alpha_{q-1}),\\ (\beta-\alpha_1)(\beta-\alpha_2)\ldots(\beta-\alpha_{q-1}),\\ (\beta-\gamma)(\beta-\alpha_1)(\beta-\alpha_2)\ldots(\beta-\alpha_{q-1}),\\ (\gamma-\alpha_1)(\gamma-\alpha_2)\ldots(\gamma-\alpha_{q-1}).\end{gathered}$$

Таким образом, подтверждается, что два произведения, не являющиеся нулями, равны и имеют противоположные знаки, что и требовалось доказать *.

§ 3. Приведенные числа Бетти

Постараемся теперь найти числа Бетти, относящиеся к полиэдру, но, избегая двусмысленности, о возможности которой я указывал выше, я буду определять эти числа *вторым способом*, т. е. условившись, что $P_q - 1$ будет числом замкнутых многообразий q измерений, которые можно найти в нашем полиэдре и которые являются *линейно независимыми*. Я понимаю под этим, что они не связаны никакой гомологией с целыми коэффициентами в смысле Analysis situs (стр. 470).

Однако сперва я хотел бы определить число $P'_q - 1$ многообразий q измерений, замкнутых и линейно независимых, которые можно найти в нашем полиэдре V, но, *ограничиваясь лишь теми, которые являются комбинациями многообразий* v_q.

Число P'_q я и буду тогда называть *приведенным числом Бетти*.

Многообразия q измерений, являющиеся комбинациями v_q, очевидно, могут быть представлены выражениями $\sum\limits_i \lambda_i a^q_i$, где λ_i — целые коэффициенты, а буквами a^q_i обозначаются различные многообразия v_q.

Каким будет, прежде всего, условие того, чтобы многообразие $\sum\limits_i \lambda_i a^q_i$ было замкнутым?

Для этого найдем, какими будут многообразия v_{q-1}, образующие границу этого многообразия. Для нахождения их достаточно будет заменить a^q_i его значением, данным конгруенцией (3).

Эта совокупность граничных многообразий будет, следовательно, представлена формулой

$$\sum_i \sum_j \lambda_i \varepsilon_{i,j} a^{q-1}_j.$$

---

* Полиэдр, определенный таким образом, так же как и любой полиэдр n измерений, ограниченный $n+1$ плоскими многообразиями, будет называться *обобщенным прямолинейным тетраэдром*. Я буду называть *обобщенным тетраэдром* каждое многообразие, гомеоморфное с обобщенным прямолинейным тетраэдром.

Для того чтобы многообразие $\sum\limits_i \lambda_i a_i^q$ было замкнутым, достаточно чтобы тождественно было

$$\sum_i \sum_j \lambda_i \varepsilon_{i,\,j}^q a_j^{q-1} = 0,$$

т. е., чтобы, каким бы ни было j,

$$\sum_i \lambda_i \varepsilon_{i,\,j}^q = 0.$$

Другими словами, многообразие $\sum\limits_i \lambda_i a_i^q$ будет замкнутым, если на основании конгруенций $(3,\ q)$ имеет место

$$\sum_i \lambda_i a_i^q \equiv 0. \qquad (7, q)$$

Я буду называть $(3, q)$ те из конгруенций (3), которые связывают a_i^q с a_j^{q-1}.

Найдем теперь гомологии, которые могут существовать между многообразиями a_i^q. Все эти гомологии можно получить, комбинируя те, которые можно получить следующим образом.

Рассмотрим конгруенцию

$$a_k^{q+1} \equiv \sum \varepsilon_{k,\,i}^{q+1} a_i^q, \qquad (8)$$

которая, по сделанному нами предположению, является конгруенцией $(3,\ q+1)$. Заменим знак $\equiv$ знаком $\sim$, а первый член — нулем. Тогда получим

$$\sum_i \varepsilon_{k,\,i}^{q+1} a_i^q \sim 0. \qquad (9, q)$$

Очевидно, эта гомология будет иметь место, так как по определению она, как и конгруенция (8), выражает, что a_i^q образуют полную границу a_k^{q+1}.

Позже мы докажем (§ 6), что других не будет.

Я обозначаю эту гомологию через $(9, q)$, чтобы отметить, что она имеет место между a_i^q.

Я утверждаю, что если гомология $(9, q)$ имеет место, то конгруенция

$$\sum_i \varepsilon_{k,\,i}^{q+1} a_i^q \equiv 0 \qquad (10, q)$$

будет следствием конгруенции $(3,\ q)$.

В самом деле, заменим a_i^q их значениями, данными в этих конгруенциях $(3, q)$; тогда

$$\sum_i \varepsilon_{k,\,i}^{q+1} a_i^q \equiv \sum_i \sum_j \varepsilon_{k,\,i}^{q+1} \varepsilon_{i,\,j}^q a_j^{q-1}.$$

Второй член тождественно равен нулю на основании соотношения (5).

Пусть теперь α_q будет числом многообразий a_i^q; пусть, далее, α'_q — число тех многообразий, которые остаются различными, если не считать различными многообразия, связанные гомологией вида $(9, q)$; пусть α''_q — число тех многообразий, которые остаются различными, если не рассматривать в качестве различных многообразия, связанные конгруенцией вида $(7, q)$.

Из этого определения следует:

1) что существует $\alpha_q - \alpha'_q$ различных гомологий вида $(9, q)$;

2) что существует $\alpha_q - \alpha''_q$ различных конгруенций вида $(7, q)$;

3) что $\alpha'_q \geqslant \alpha''_q$, ибо, если некоторые a_i^q связаны гомологией вида $(9, q)$, то они будут связаны также и соответствующей конгруенцией $(10, q)$.

Наконец, искомое число $P'_q - 1$ равно $\alpha'_q - \alpha''_q$, так как замкнутые многообразия вида $\sum_i \lambda_i a_i^q$, действительно различные, существуют в числе, равном числу конгруенций $(7, q)$, т. е. числу $\alpha_q - \alpha''_q$.

Число $P'_q - 1$ является числом тех многообразий, которые остаются различными, если не считать различными те, которые связаны гомологией $(9, q)$. Поскольку число этих гомологий $\alpha_q - \alpha'_q$, мы имеем

$$P'_q - 1 = (\alpha_q - \alpha''_q) - (\alpha_q - \alpha'_q) = \alpha'_q - \alpha''_q,$$

что и требовалось доказать.

Пусть $a_1^q, a_2^q, \ldots, a_i^q$ будут многообразия v_q, число которых равно i, и

$$a_1^q \equiv \sum \varepsilon_{1,j}^q a_j^{q-1},$$
$$a_2^q \equiv \sum \varepsilon_{2,j}^q a_j^{q-1},$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$a_i^q \equiv \sum \varepsilon_{i,j}^q a_j^{q-1}$$

соответствующие конгруенции (3). Образуем соответствующие гомологии

$$\sum \varepsilon_{1,j}^q a_j^{q-1} \sim 0, \quad \sum \varepsilon_{2,j}^q a_j^{q-1} \sim 0, \quad \ldots, \quad \sum \varepsilon_{i,j}^q a_j^{q-1} \sim 0.$$

Условием, необходимым и достаточным для того, чтобы эти гомологии были различными, является условие, чтобы между i многообразиями $a_1^q, a_2^q, \ldots, a_i^q$ не существовало никакой конгруенции вида

$$\lambda_1 a_1^q + \lambda_2 a_2^q + \ldots + \lambda_i a_i^q \equiv 0.$$

Число различных гомологий равно, следовательно, числу различных a_i^q с учетом конгруенций $(7, q)$. Итак,

$$\alpha_{q-1} - \alpha'_{q-1} = \alpha''_q \quad \text{или} \quad \alpha_{q-1} = \alpha'_{q-1} + \alpha''_q.$$

С другой стороны, мы имеем

$$\alpha'_0 = 1.$$

Если, действительно, можно перейти от какой-либо вершины a_1^0 к любой другой вершине a_i^0, следуя по ребрам (т. е. если полиэдр не распадается), то будет иметь место гомология

$$a_1^0 \sim a_i^0,$$

т. е. с точностью до гомологий будет лишь одна вершина.

Рассмотрим теперь конгруенцию (3bis)

$$P \equiv \sum a_i^p;$$

соответствующая гомология записывается так:

$$\sum a_i^p \sim 0$$

и не будет иной гомологии (9, p). Итак,

$$\alpha_p = \alpha'_p + 1.$$

Более того, так как полиэдр не распадается, то только одна из комбинаций $\sum \lambda_i a_i^p$ может быть замкнутой, т. е. сам полиэдр целиком, представленный суммой $\sum a_i^p$.

Следовательно, у нас будет только одна конгруенция вида (7, p)

$$\sum a_i^p \equiv 0.$$

Итак,

$$\alpha_p = \alpha''_p + 1, \quad \alpha'_p = \alpha''_p.$$

Следовательно, мы получим ряд уравнений:

$$\begin{aligned}
&\alpha'_0 = 0, & & \\
&\alpha_0 = \alpha'_0 + \alpha''_1, & &\alpha'_1 - \alpha''_1 = P'_1 - 1, \\
&\alpha_1 = \alpha'_1 + \alpha''_2, & &\alpha'_2 - \alpha''_2 = P'_2 - 1, \\
&\ldots\ldots\ldots, & &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\alpha_{p-1} = \alpha'_{p-1} + \alpha''_p, & &\alpha'_{p-1} - \alpha''_{p-1} = P'_{p-1} - 1, \\
&\alpha_p = \alpha'_p + 1, & &\alpha'_p - \alpha''_p = 0,
\end{aligned}$$

откуда легко выводится

$$\begin{aligned}
&\alpha_p - \alpha_{p-1} + \alpha_{p-2} - \ldots \pm \alpha_1 \mp \alpha_0 = \\
&= 1 - (P'_{p-1} - 1) + \ldots \mp (P'_2 - 1) \pm (P'_1 - 1) \mp 1,
\end{aligned}$$

что аналогично формуле

$$\alpha_p - \alpha_{p-1} + \alpha_{p-2} - \ldots \pm \alpha_1 \mp \alpha_0 =$$
$$= 1 - (P_{p-1} - 1) + \ldots \mp (P_2 - 1) \pm (P_1 - 1) \mp 1,$$

которую мы нашли в «Analysis situs», стр. 548.

§ 4. Подразделения полиэдров

Рассмотрим полиэдр p измерений V с его различными многообразиями

$$a_i^p,\ a_i^{p-1},\ \ldots,\ a_i^1,\ a_i^0.$$

Предположим, что каждое из многообразий a_i^p подразделяется на несколько других, которые я обозначу через b_i^p; пусть затем b_i^{p-1} — многообразия $p-1$ измерений, которые служат границами b_i^p; пусть b_i^{p-1} — многообразия $p-2$ измерений, которые служат границами b_i^{p-1}; и, наконец, b_i^0 — многообразия нулевой размерности (вершины), которые служат границами b_i^1 (ребер).

Таким образом будет получен новый полиэдр V', который будет производным полиэдра V в смысле, который я придал этому выражению на стр. 532 «Analysis situs».

Можно предположить, что если некоторое многообразие v_{q-1} является просто или многократно связным и служит границей двух многообразий b_j^q и b_k^q, то оно необязательно оказывается одним каким-нибудь из многообразий b_i^{q-1}, но само может быть подразделено на несколько многообразий b_i^{q-1}. В этом случае, возвращаясь к терминологии стр. 533 «Analysis situs», эти многообразия b_i^{q-1} будут *иррегулярными*, а многообразия b_i^{q-2}, которые отделяют их одни от других, будут *сингулярными*.

Установив это, постараемся классифицировать многообразия b_i^q.

Если одно многообразие b_i^q не лежит в одном из многообразий a_j^q, то оно лежит в одном из многообразий a_j^{q+1} или в одном из многообразий $a_j^{q+2}, \ldots$, или, по крайней мере, в одном из многообразий a_j^p.

Может ли оно одновременно лежать в двух многообразиях a_j^m и a_k^m?

В соответствии со способом, каким предполагается выполненным подразделение, когда лишь добавляются новые границы, а старые никогда не исключаются, это может произойти лишь, если два многообразия a_j^m и a_k^m являются смежными и имеют общую границу a_h^{m-1} и если b_i^q лежит в этой границе a_h^{m-1}.

Тогда я буду предполагать, что b_i^q лежит в a_j^h и не лежит ни в каком из многообразий a_k^m, где $m < h$. Многообразие a_j^h продолжает существо-

вать при $h \geqslant q$; кроме того, многообразие a_j^h является единственным, т. е. b_i^q не может составлять одновременно части двух различных многообразий a_k^h и a_j^h.

Если я условлюсь теперь относить к одному и тому же классу все многообразия b_i^q, которые входят в состав многообразия a_j^h, не составляя в то же время части никакого из многообразий a_k^m, где $m < h$, то каждое многообразие b_i^q войдет в состав одного и только одного класса.

Я смогу тогда представить b_i^q обозначением с четырьмя индексами

$$b_i^q = B(q, h, j, k),$$

где индекс q означает число измерений b_i^q; индексы h и j означают, что b_i^q составляет часть класса a_j^h; индекс k служит для отличия одних от других разных многообразий, относящихся к одному и тому же классу. Имеем $h \geqslant q$.

Следовательно, для определения полиэдра и его подразделений мы будем иметь:

1) конгруенции (3, q), соответствующие полиэдру V, которые я обозначу

$$a_i^q \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^q a_j^{q-1}; \qquad (3, q, i)$$

2) уравнения, которые отвечают подразделениям многообразия a_i^q

$$a_i^q = \sum_k B(q, q, i, k); \qquad (1, q, i)$$

3) конгруенции, аналогичные конгруенциям (3), но относящиеся к полиэдру V'; я обозначу их

$$B(q, h, j, k) \equiv \sum \zeta B(q-1, h', j', k'), \qquad (2, q, h, j, k).$$

Здесь ζ являются числами, равными ± 1 или 0; они зависят от семи индексов a, h, j, k, h', j', k', так что я буду обозначать их, когда в этом возникнет необходимость, в виде

$$\zeta(q, h, j, k, h', j', k').$$

Под знаком $\sum$ индексы h', j', k' могут принимать все значения. Заметим, однако, что $B(q-1)$, которые служат границей $B(q, h, j, k)$, должны, подобно $B(q, h, j, k)$, входить в состав a_j^h; однако они могут также входить в состав других многообразий $a_{j'}^{h'}$ меньшего числа измерений, но являющихся частью a_j^h. Итак, будем иметь

$$h' \leqslant h, \qquad h' \geqslant q-1.$$

Впрочем, если $h' = h$, то $j' = j$.

Для того чтобы соотношения (1), (2), (3) могли определить действительное подразделение, они должны удовлетворить некоторым условиям.

Соотношения (1, q, i), (3, q, i) дают

$$\sum_k B(q,\ q,\ i,\ k) \equiv \sum \varepsilon^q_{j,i} a^{q-1}_j. \qquad (\alpha)$$

Если я заменю в первом члене $B(q,\ q,\ i,\ k)$ на его значение, взятое из (2, q, q, i, k), а a^{q-1}_j его значением, взятым из (1, $q-1$, j), то оба члена должны стать тождественными. Таково первое условие, которое очевидно. Впрочем, оно не достаточно.

§ 5. Влияние подразделений на приведенные числа Бетти

Пусть $\sum \alpha B(q,\ h,\ j,\ k)$ является комбинацией многообразий b^q_i, представляющей замкнутое многообразие q измерений так, что, учитывая наши обозначения,

$$\sum \alpha B(q,\ h,\ j,\ k) \equiv 0 \quad (h \geqslant q). \qquad (1)$$

Среди многообразий b^q_i, которые входят в состав первого члена (1), объединим те, которые принадлежат к одному и тому же классу. Пусть

$$\mathrm{S}\, \alpha B(q,\ h,\ j,\ k)$$

— совокупность тех из них, которые принадлежат к классу a^h_j; знак суммирования S, следовательно, означает, что берутся лишь многообразия одного и того же класса, тогда как знак $\sum$ указывает на суммирование всех многообразий.

Тогда будем иметь

$$\mathrm{S}\, \alpha B(q,\ h,\ j,\ k) \equiv \sum \beta B(q-1,\ h',\ j',\ k'), \qquad (2)$$

т. е. что многообразие $q-1$ измерений

$$\sum \beta B(q-1,\ h',\ j',\ k')$$

образует полную границу многообразия q измерений

$$\mathrm{S}\, \alpha B(q,\ h,\ j,\ k).$$

Многообразия $a^{h'}_{j'}$ должны принадлежать к границе a^h_j или же совпадать с a^h_j; в самом деле, $B(q-1,\ h',\ j',\ k')$ принадлежит к $a^{h'}_{j'}$ и, с другой стороны, к одному из $B(q,\ h,\ j,\ k)$, которое само лежит в a^h_j, значит, если $a^{h'}_{j'}$ не входит в a^h_j, то $B(q-1,\ h',\ j',\ k')$ лежит в многообразии a^m_k —

общей части a_j^h и $a_{j'}^{h'}$ и будет иметь менее h' измерений. Но это противоречит тому определению, которое мы дали классам.

С другой стороны, $a_{j'}^{h'}$ не может совпасть с a_j^h

Пусть, в самом деле,

$$\underset{1}{\mathrm{S}}\ \alpha_1 B(q_1 h_1,\ j_1,\ k_1) = \sum \alpha B(q,\ h,\ j,\ k) - \mathrm{S}\,\alpha B(q, h, j, k)$$

— совокупность многообразий, которые входят в состав первого члена выражения (1) и не принадлежит к классу a_j^h; тогда, очевидно, будем иметь

$$\underset{1}{\mathrm{S}}\ \alpha_1 B(q, h_1,\ j_1,\ k_1) \equiv -\sum \beta B(q-1,\ h',\ j',\ k').$$

Итак, $B(q-1,\ h',\ j',\ k')$ одновременно должно входить в $a_{j'}^{h'}$ и в один из $B(q,\ h_1,\ j_1,\ k_1)$ и, следовательно, в один из $a_{j_1}^{h_1}$, *отличный от* a_j^h. Если же $a_{j'}^{h'}$ совпадет с a_j^h, то

$$B(q-1,\ h',\ j',\ k') = B(q-1,\ h,\ j,\ k)$$

должно принадлежать к многообразию a_k^m, общей части a_j^h и $a_{j_1}^{h_1}$. Одно из двух: или a_j^h не лежит в $a_{j_1}^{h_1}$, и тогда будем иметь опять $m < h$, что опять-таки противоречит определению классов, или же a_j^h входит в $a_{j_1}^{h_1}$, и тогда будет $h_1 > h$. Предположим, что выбран класс a_j^h, соответствующий наибольшему числу h. Тогда не может быть $h_1 > h$, и $a_{j'}^{h'}$ должно принадлежать к границе a_j^h.

Конгруенция (2) влечет за собой гомологию

$$\sum \beta B(q-1,\ h',\ j',\ k') \sim 0, \tag{3}$$

но, поскольку, с другой стороны, a_j^h *является просто связным*, а все многообразия $B(q-1,\ h',\ j',\ k')$ расположены на границе a_j^h, первый член (3), представляющий замкнутое многообразие $q-1$ измерений, расположенное на этой границе, образует полную границу некоторого многообразия q измерений

$$\sum \gamma B(q,\ h'',\ j'',\ k''),$$

также расположенного на границе a_j^h (исключением будет случай, когда $h = q$). Значит, будем иметь конгруенцию

$$\sum \beta B(q-1,\ h',\ j',\ k') \equiv \sum \gamma B(q,\ h'',\ j'',\ k''). \tag{4}$$

Впрочем, так как $B(q,\ h'',\ j'',\ k'')$ находится на границе a_j^h, оно одновременно будет находиться и на границе $a_{j''}^{h''}$, ибо если $B(q,\ h'',\ j'',\ k'')$

лежит одновременно в $a_{j''}^{h''}$ и в некотором многообразии $a_{j'}^{h'}$, входящем в состав границы $a_{j'}^{h}$, или же $a_{j''}^{h''}$ не входит в $a_{j'}^{h'}$, то B должно лежать в a_k^m, где $m < h''$, а мы уже видели, что это невозможно.

Итак, имеем

$$h'' < h.$$

Конгруенции (2) и (4) дают

$$\mathrm{S}\, \alpha B(q, h, j, k) \equiv \sum \gamma B(q, h'', j'', k''),$$

и поскольку все многообразия, включенные в эту конгруенцию, лежат в a_j^h или в его границе, а с другой стороны a_j^h является просто связным, то будем иметь гомологию

$$\mathrm{S}\, \alpha B(q, h, j, k) \sim \sum \gamma B(q, h'', j'', k'').$$

Итак, можно заменить в первом члене (1) совокупность членов $\mathrm{S}\, \alpha B(q, h, j, k)$ совокупностью членов

$$\sum \gamma B(q, h'', j'', k'').$$

Если мы поступим так же со всеми классами, соответствующими одному и тому же значению h, самому большому из всех, то мы заменим первый член (1) на

$$\sum \alpha_2 B(q, h_2, j_2, k_2),$$

где наибольшее значение h_2 будет меньшим, чем наибольшее значение h.

Кроме того, мы имеем гомологию

$$\sum \alpha B(q, h, j, k) \sim \sum \alpha_2 B(q, h_2, j_2, k_2).$$

Продолжая подобным образом, можно еще снизить наибольшее h, и мы остановимся только, когда получим $h = q$.

Наконец, можно заменить первый член (1) при помощи

$$\sum \alpha_0 B(q, q, j_0, k_0),$$

когда получим

$$\sum \alpha B(q, h, j, k) \sim \sum \alpha_0 B(q, q, j_0, k_0), \tag{5}$$

$$\sum \alpha_0 B(q, q, j_0, k_0) \equiv 0. \tag{6}$$

Установив это, возьмем в первом члене (6) конгруенции, принадлежащие к определенному классу $a_{j_0}^h$, скажем,

$$\mathrm{S}\, \alpha_0 B(q, q, j_0, k_0).$$

Будем иметь

$$\mathrm{S}\, \alpha_0 B(q, q, j_0, k_0) \equiv \sum \beta_0 B(q-1, h_0', j_0', k_0'). \tag{7}$$

Можно было бы обнаружить, как и выше, что $a_{j_0}^{h'_0}$ должно стать частью границы $a_{j_0}^q$, откуда $h'_0 < q$ (и, так как $h'_0 \geqslant q-1$, то получим $h'_0 = q-1$).

Пусть теперь

$$a_{j_0}^q = \sum B(q,\ q,\ j_0,\ k_0) \tag{8}$$

— уравнение $(1,\ q,\ j_0)$, которое определит подразделение многообразия $a_{j_0}^q$, и пусть $B(q,\ q,\ j_0,\ 1)$ и $B(q,\ q,\ j_0,\ 2)$ — два многообразия, входящие в состав второго члена (8); я утверждаю, что они должны входить в состав первого члена (6) с тем же коэффициентом α_0.

Предположим сперва, что эти два многообразия будут смежными; среди многообразий $q-1$ измерений, которые будут их общей границей, будет находиться по крайней мере одно, которое не войдет в состав границы $a_{j_0}^q$ и, следовательно, будет частью класса $a_{j_0}^q$.

Пусть $B(q-1,\ q,\ j_0,\ 1)$ — это многообразие; оно не будет принадлежать ни к какому другому из многообразий $B(q,\ q,\ j_0,\ k)$.

Пусть затем

$$\begin{aligned} &B(q,\ q,\ j_0,\ 1) \equiv \varepsilon b_i^{q-1}, \\ &B(q,\ q,\ j_0,\ 2) \equiv \varepsilon b_i^{q-1}, \\ &B(q,\ q,\ j_0,\ k) \equiv \varepsilon b_i^{q-1} \quad (k > 2) \end{aligned} \tag{9}$$

— конгруенции $(2,\ q,\ q,\ j_0,\ 1)$, $(2,\ q,\ q,\ j_0,\ 2)$, $(2,\ q,\ q,\ j_0,\ k)$, которые дают нам границы многообразий $B(q,\ q,\ j_0,\ 1)$. Посмотрим, с каким коэффициентом ε войдет в состав этих конгруенций многообразие $B(q-1,\ q,\ j_0,\ 1)$.

Согласно тому, что мы видели, в первом случае это будет коэффициент $+1$, во втором — коэффициент -1, а в остальных случаях коэффициент будет равен нулю.

Пусть тогда α_1 и α_2 — значения коэффициентов α_0, соответствующие двум многообразиям $B(q,\ q,\ j_0,\ 1)$ и $B(q,\ q,\ j_0,\ 2)$.

Комбинация конгруенций (9) даст нам конгруенцию

$$\mathrm{S}\, \alpha_0 B(q,\ q,\ j_0,\ k_0) \equiv \varepsilon b_i^{q-1}, \tag{10}$$

которая должна быть идентичной с (7), а коэффициент ε, с которым $B(q-1,\ q,\ j_0,\ 1)$ войдет во второй член (10), будет очевидно равен $\alpha_1 - \alpha_2$. Но $B(q-1,\ q,\ j_0,\ 1)$ не может фигурировать во втором члене (7), поскольку мы видели, что для второго члена мы должны будем иметь $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$.

Таким образом, два многообразия $B(q,\ q,\ j_0,\ 1)$ и $B(q,\ q,\ j_0,\ 2)$ должны иметь тот же самый коэффициент α_0, если они являются смежными. Это будет справедливо и в том случае, если они не смежны, так как при нераспадающемся $a^q{}_{j_0}$ можно перейти от одного из этих многообразий к другому при помощи ряда других аналогичных многообразий, каждое из которых является смежным с предшествующим.

Итак, коэффициент α_0 является одним и тем же для всех наших многообразий. Отсюда

$$\mathrm{S}\,\alpha_0 B(q, q, j_0, k_0) = \alpha_0 \sum B(q, q, j_0, k_0) = \alpha_0 a^q_{j_0}.$$

Конгруенция (6) и гомология (5) могут быть записаны в виде

$$\sum \alpha B(q, h, j, k) \sim \sum \alpha_0 a^q_{j_0} \qquad (5\text{bis})$$

$$\sum \alpha_0 a^q_{j_0} \equiv 0. \qquad (6\text{bis})$$

Если какие-либо числа конгруенций вида (1) различны, т. е. если никакая линейная комбинация их первых членов не будет гомологична нулю, то конгруенции (6bis) будут также различными, и наоборот.

Действительно, сравнение соотношений (1), (5bis) и (6bis) показывает, что если

$$\sum \alpha B(q, h, j, k) \sim 0,$$

то мы будем иметь также

$$\sum \alpha_0 a^q_{j_0} \sim 0,$$

и наоборот.

Отсюда следует, что если a^q_i и b^q_i являются просто связными, то приведенные числа Бетти будут теми же самыми для двух полиэдров V и V'.

Пусть теперь W будет каким-либо многообразием, замкнутым, q измерений, расположенным на V. Всегда можно построить полиэдр V', производный от V в смысле стр. 532 «Analysis situs» и такой, что W будет некоторой комбинацией b^q_i.

Следовательно, мы должны заключить, что если a^q_i являются просто связными, то приведенные числа Бетти, соответствующие полиэдру V, будут совпадать с числами Бетти в собственном смысле слова, *определенными по второму способу*.

§ 6. Возвращение к доказательствам § 3

Мы должны здесь вернуться к одному существенному вопросу предшествующих рассуждений. Выше я указал, что кроме гомологий (9, q), не было никаких других. Это не очевидно, это даже не всегда было бы и правильно, если бы мы не предположили, что a^q_i просто связные.

Докажем это сначала для полиэдра P в пространстве четырех измерений

Рассмотрим некоторое число многообразий v_2 или a^2_i, принадлежащих этому полиэдру. Я назову их его гранями, подобно тому, как a^3_i, a^1_i, a^0_i этого полиэдра P можно будет назвать его клетками, ребрами и вершинами.

Предположим, что между этими гранями a^2_i есть одна гомология

$$\sum a^2_i \sim 0.$$

Эта гомология означает, что существует такое многообразие V трех измерений, которое лежит в P и в качестве полной своей границы имеет $\sum a_i^2$.

Я утверждаю, что V *состоит из некоторого числа клеток* P.

Если, действительно, одна из точек какой-либо клетки принадлежит V, то же будет и со всеми другими точками этой клетки, так как нельзя перейти от первой точки ко второй, не встретившись с гранью, и, следовательно, не пересекая границу V и не выходя из V.

Итак, теорема очевидна, поскольку она касается полиэдров в пространстве четырех измерений и гомологий между их гранями.

Пусть теперь будет задана гомология между ребрами

$$\sum b_1 \sim 0,$$

где b_1 — некоторое число ребер a_i^1. Это означает, что существует многообразие двух измерений V, полной границей которого служит $\sum b_1$.

Я обозначу через $V(a_i^k)$ совокупность точек, общих для V и a_i^k.

$V(a_i^3)$ будут многообразия двух измерений, граница которых образована или некоторыми из ребер b_1, или же посредством $V(a_j^2)$, где a_j^2 являются гранями, служащими границей для клетки a_i^3. В самом деле, нельзя выйти из $V(a_i^3)$, не выходя из V через его границу, т. е. не пересекая одного из b_1, или же не выходя из a_i^3 через его границу, т. е. пересекая одну из граней a_j^2 и, поскольку мы остаемся на V, не пересекая ни одной из линий $V(a_j^2)$.

Полное многообразие V будет состоять из совокупности всех $V(a_i^3)$.

Рассмотрим теперь $V(a_i^2)$; здесь мы должны различать два случая.

1. Ни одно из ребер b_1 не принадлежит a_i^2. Тогда мы не сможем выйти из $V(a_i^2)$, не выходя из a_i^2, т. е. не пересекая ни одного из ребер a_i'; следовательно, граница $V(a_j^2)$ образована $V(a_j')$.

2. Одно (или несколько) ребро b_1 лежит в a_i^2; в этом случае оно будет также входить в состав и $V(a_i^2)$. Однако может оказаться, что $V(a_i^2)$, кроме ребра b_1, состоит и из других линий, границами которых будут точки $V(a_j')$ или точки, расположенные на b_1. Эти точки, расположенные на b_1, там, где другие линии, из которых состоит $V(a_i^2)$, оканчиваются на ребре b_1, будут названы мной *гнездовыми точками*.

Во всяком случае, $V(a_i^2)$ будет линией или совокупностью линий. Если бы, действительно, $V(a_i^2)$ было поверхностью, то a_i^2, или часть этой грани, лежала бы в V. Но я имею право деформировать V, если только я не меняю его границы $\sum b_1$; я всегда смогу с помощью бесконечно малой деформации избежать того, чтобы область a_i^2 стала частью V.

По той же причине я всегда могу предположить, что $V(a_i^1)$ сводится к одной или нескольким точкам, если только a_i' не одно из ребер b_1, в таком случае $V(a_i^1)$ само будет этим ребром.

Установив это, я могу теперь деформировать V:

1. Таким образом, чтобы все $V(a_i^1)$ [отличные от $V(b_1)$] стали вершинами.

Пусть a_j^0 будет одной из вершин a_i^1. Пусть затем M — одна из точек, из которых состоит $V(a_i^1)$; вокруг точки M и на V опишем небольшую замкнутую кривую C. Пусть K — бесконечно малая дуга, вырезанная на V этой кривой C. Построим вид муфты, бесконечно тонкой, окружающей ребро a_i^1 и проходящей через C. Через вершину a_j^0 я проведу произвольную поверхность S, которая пересечет муфту по очень малой замкнутой кривой C'. Пусть K' — часть поверхности S, ограниченной C; пусть H — поверхность муфты, заключенная между C и C'. Так получится нечто вроде барабана, боковой поверхностью которого будет H, а K и K' — обоими основаниями.

Рассмотрим тогда многообразие

$$V' = V - K + H + K'.$$

Это многообразие будет иметь ту же границу, что и V, но оно не пересечет a_i^1 в M, так как часть K, та, где находилась точка M, изымается из V. Наоборот, H не пересечет ребра a_i^1, а K' пересечет это ребро в a_j^0.

Поступая подобным образом со всеми точками пересечения V и a_j^1, приведем все эти точки к совпадению с a_j^0.

2. Так, чтобы все гнездовые точки стали вершинами.

Пусть, в самом деле, a_i^2 будет гранью, проходящей через ребро b_1; пересечение V и a_i^2 будет включать, кроме b_1, также и другие линии, пусть c — одна из этих линий, которая оканчивается на b_1, в одной из гнездовых точек D. Пусть a_j^0 и a_k^0 — две вершины b_1. Через b_1 я проведу поверхность S, составляющую часть P и не пересекающую a_i^2. Так как a_j^0 и a_k^0 находятся на границе V, то я соединю эти две точки линией L, расположенной на V и незначительно удаленной от b_1. Поскольку эта линия незначительно удалена от b_1, я могу провести через L другую поверхность S', которая не пройдет через b_1, но которая пересечет S, следуя линии L', мало отличающейся от b_1. Эти три линии L, b_1 и L', будут иметь одни и те же концы, a_j^0 и a_k^0.

Пусть V_1 — часть V, заключенная между L и b_1; пусть, затем, S_1 — часть S, заключенная между L' и b_1, и S_1' — часть S', заключенная между L и L'.

Я заменю V через

$$V' = V - V_1 + S_1 + S_1',$$

где V' имеет те же границы, что и V, но $V'(a_i^2)$ более не имеет гнездовых точек вне a_j^0 и a_k^0, ибо если линия, аналогичная c, примкнет к гнездовой точке, расположенной между a_j^0 и a_k^0, часть этой линии c, сосед-

ствующая с гнездовой точкой, должна будет находиться на S_1, что невозможно, так как S не пересекает a_i^2.

Итак, мы можем всегда предположить, что $V(a_i^2)$ являются линиями, концами которых служат вершины a_i^2.

Пусть теперь L — одна из линий, составляющих $V(a_i^2)$, концами которой служат две вершины a_j^0 и a_k^0 из a_i^2. Можно перейти от a_j^0 к a_k^0, следуя по периметру a_i^2; пусть $\sum a_m^1$ — совокупность ребер a_i^2, заключенных между a_j^0 и a_k^0. Так как грань a_i^2 предполагается просто связной, то линия L разделит ее на две части. Пусть Q — одна из этих частей, заключенная между L и $\sum a_m^1$.

Пусть, далее, a_p^3 и a_q^3 — две клетки, разделенные a_i^2. Через ребра $\sum a_m^1$ я проведу поверхность S, слегка отличную от грани a_i^2 и целиком расположенную в клетке a_p^3. Через те же ребра я проведу вторую поверхность S', слегка отличную от a_i^2 и расположенную в клетке a_q^3; эти две поверхности S и S' пересекут V, следуя двум линиям, L_1 и L_1', слегка отличающимся от L, концами которых будут a_j^0 и a_k^0. Пусть S_1 будет частью S, заключенной между $\sum a_m^1$ и L_1; пусть S_1' будет частью S', заключенной между $\sum a_m^1$ и L_1'; пусть V_1 будет частью V, заключенной между L_1 и L_1'; именно на V_1 и будет находиться L.

Пусть теперь

$$V' = V - V_1 + S_1 + S_1',$$

где V' имеет те же границы, что и V; V' более не проходит через L, но наоборот, проходит через ребра $\sum a_m^1$.

Действуя таким же образом для всех линий, подобных L, мы увидим, что всегда можно предположить, что все $V(a_i^2)$ сведены к комбинациям ребер.

Так как границы $V(a_i^3)$ состоят или из b_1, или из $V(a_j^2)$, то очевидно, что границы $V(a_i^3)$ являются комбинациями ребер P и, что совершенно ясно, все ребра должны принадлежать a_i^3. Тогда, следовательно, $V(a_i^3)$ является поверхностью просто или многократно связной, ограниченной одной или несколькими замкнутыми линиями, которые, сами по себе, являются комбинациями ребер a_i^3.

Так как клетка a_i^3 является просто связной, эти замкнутые линии разделят ее поверхность на некоторое число областей, и так как эти замкнутые линии являются комбинациями ребер a_i^3, эти области будут комбинациями граней a_i^3.

Всегда можно найти такую комбинацию этих областей, которая будет иметь те же границы, что и $V(a_i^3)$. Предположим, например, что граница $V(a_i^3)$ состоит из трех замкнутых линий L, L_1 и L_2; линия L разделит поверхность a_i^3 на две области R и R'; линии L_1 и L_2 разделят ту же поверхность на две области R_1 и R_1' или R_2 и R_2'. Я предполагаю, что пробегая L в определенном направлении, будем иметь слева $V(a_i^3)$,

а справа — R и R'; я полагаю также, что пробегая L_1 и L_2 в подходящем направлении, слева будем иметь $V(a_i^3)$ и R_1 или $V(a_i^3)$ и R_2.

Тогда многообразие $R+R_1+R_2$ будет иметь ту же границу, что и $V(a_i^3)$; тогда можно будет заменить $V(a_i^3)$ на $R+R_1+R_2$.

Поступая таким же образом со всеми $V(a_i^3)$, мы заменим V другим многообразием, которое будет иметь ту же границу $\sum b_1$ и которое будет комбинацией граней P.

Таким образом, теорема доказана в том, что касается полиэдров в пространстве четырех измерений и гомологий между ребрами.

Она так же доказывается и для любого полиэдра.

§ 7. Взаимный полиэдр

Пусть P будет полиэдром в пространстве четырех измерений; этот полиэдр будет разделен на некоторое число многообразий v_3, которые я назову его *клетками* и которые обозначу через a_i^3. Эти клетки будут отделяться одни от других многообразиями v_2 или a_i^2, которые я назову *гранями*; эти грани будут иметь в качестве своих границ многообразия v_1 и a_i^1, которые я назову *ребрами*, концы ребер представят собой точки v_0 и a_i^0, которые я назову *вершинами*.

Совершенно понятно, что я предполагаю и клетки, и грани просто связными.

Отметим внутри каждой клетки a_i^3 точку $P(a_i^3)$; внутри каждой грани a_i^2 точку $P(a_i^2)$; на каждом ребре a_i^1 точку $P(a_i^1)$; каждое ребро будет, таким образом, разделено на две части точкой $P(a_i^1)$.

Соединим линией точку $P(a_i^2)$ с каждой из вершин грани a_i^2 и с каждой из точек $P(a_j^1)$, соответствующих различным ребрам a_j^1 грани a_i^2. Все эти линии должны быть проведены на грани a_i^2. Эта грань будет, таким образом, разделена на треугольники, и число этих треугольников будет равным двойному числу ребер a_i^2. Сделаем то же самое для всех других граней.

Рассмотрим теперь клетку a_i^3; разложим на треугольники T все грани a_j^2 этой клетки так, как мы сейчас скажем. Построим криволинейные треугольники, общей вершиной которых будет точка $P(a_i^3)$, а основаниями — разные стороны разных треугольников T. Клетка a_i^3 будет тем самым разложена на тетраэдры, у которых $P(a_i^3)$ будет общей вершиной, а основаниями — различные треугольники T.

Будем различать шесть видов линий (которые будут ребрами наших тетраэдров).

К первому виду относятся те, которые соединяют вершину a_i^0 с точкой $P(a_j^1)$; каждое ребро будет, таким образом, образовано двумя линиями первого вида.

Ко второму виду относятся те, которые соединяют точку $P(a_i^3)$ с точкой $P(a_j^2)$.

Линии третьего вида соединяют точку $P(a_i^2)$ с вершиной a_j^0.

Линии четвертого вида соединяют точку $P(a_i^1)$ с точкой $P(a_j^2)$.

Линии пятого вида соединяют точку $P(a_i^3)$ с точкой $P(a_j^1)$.

Линии шестого вида соединяют точку $P(a_i^3)$ с вершиной a_j^0.

Линии второго вида можно соединять попарно двумя способами:

1. Линия, которую я буду называть линией b_i^1, будет образована двумя линиями второго вида, соединяющими некоторую точку $P(a_i^2)$ с двумя точками $P(a_j^3)$ и $P(a_k^3)$, соответственно двум отделам a_j^3 и a_k^3, разделенным гранью a_i^2. Таким образом, будет столько же линий b_i^1, сколько граней a_i^2.

2. То, что я назову линией c, будет образовано двумя линиями второго вида, соединяющими одну точку $P(a_i^3)$ с двумя точками $P(a_i^2)$ и $P(a_k^2)$, соответственно двум граням a_i^2 и a_k^2 клетки a_i^3.

Нам надо теперь определить поверхности, которые я назову поверхностями b_i^2.

Пусть заданы какое-либо ребро a_i^1 и точка $P(a_i^1)$. Предположим, что грани, проходящие через a_i^1, будут соответственно

$$a_1^2,\ a_2^2,\ \ldots,\ a_q^2$$

и что клетки, к которым принадлежит a_i^1, будут соответственно

$$a_1^3,\ a_2^3,\ \ldots,\ a_j^3$$

таким образом, что a_1^2 отделяет a_1^3 от a_2^3, a_2^2 отделяет a_2^3 от $a_3^3 \ldots$, и, наконец, a_q^2 отделяет a_q^3 от a_1^3. Условимся, для большей симметрии, обозначать клетку a_1^3 безразлично через a_1^3 или через a_{q+1}^3.

Разложим каждую клетку на тетраэдры и рассмотрим, в частности, тетраэдры, имеющие вершиной точку $P(a_i^1)$. Рассмотрим $2q$ криволинейных треугольников

$$P(a_i^1)\,P(a_k^3)\,P(a_k^2),\quad P(a_i^1)\,P(a_{k+1}^3)\,P(a_k^2)\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ q).$$

Совокупность этих $2q$ треугольников образует некоторый многоугольник, который я обозначу через b_i^2 и который будет иметь своей границей совокупность линий

$$b_1^1,\ b_2^1,\ \ldots,\ b_q^1.$$

Определим теперь объемы b_i^3; объем b_i^3 будет совокупностью тетраэдров, которые имеют точку a_i^0 вершиной; этот объем будет трехразмерным полиэдром, просто связным, границей которого будет совокупность поверхностей b_k^2, соответствующих ребрам a_k^1, сходящимся к точке a_i^0.

Объемы b_i^3 составят новый полиэдр P^1, который я назову *полиэдром, взаимным* для P и который будет иметь в качестве своих клеток b_i^3,

в качестве граней — b_i^2, в качестве ребер — b_i^1, в качестве вершин — $b_i^0 = P(a_i^0)$.

Каждой клетке b_i^3 из P' будет соответствовать вершина a_i^0 из P.

Каждой грани b_i^2 из P' будет соответствовать ребро a_i^1 из P.

Каждому ребру b_i^1 из P' будет соответствовать грань a_i^2 из P.

Каждой вершине b_i^0 из P' будет соответствовать клетка a_i^3 из P.

Более того, в смысле § 2, то же самое соотношение будет, например, между ребром b_i^1 и гранью b_j^2, что и между гранью a_i^2 и ребром a_j^1.

Если записать характеристические конгруенции многогранника P в виде

$$a_i^3 \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^3 \; a_i^2, \quad a_i^2 \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^2 \; a_i', \quad a_i^1 \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^1 \; a_j^0,$$

то для многогранника P' будем соответственно иметь

$$b_i^3 \equiv \sum_j \varepsilon_{1,j}^1 \; b_j^2, \quad b_i^2 \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^2 \; b_j^1, \quad b_i^1 \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^3 \; b_j^0.$$

Рассмотрим теперь линию c, образованную двумя линиями второго вида, соединяющими одну и ту же точку $P(a_i^3)$ с двумя точками $P(a_j^2)$ и $P(a_k^2)$.

Пусть a_m^0 и a_p^0 — две вершины, обе соответственно принадлежащие клетке a_i^2. Пусть d и d' — две линии третьего вида, соединяющие $P(a_j^2)$ с a_m^0 и $P(a_k^2)$ с a_p^0.

Так как a_m^0 и a_p^0 принадлежат к одной и той же клетке a_i^3, то можно перейти от одной из этих вершин к другой, следуя по ломаной линии, образованной ребрами a_q^1, принадлежащими к a_i^3.

Пусть $\sum a_q^1$ будет этой ломаной линией, концами которой будут a_m^0 и a_p^0. Совокупность линий $c - d - \sum a_q^1 + d'$ будет замкнутой линией, что я смогу выразить при помощи конгруенции

$$c \equiv d + \sum a_q^1 - d'.$$

Так как a_i^3 является просто связным, то эта замкнутая линия будет границей многообразия двух измерений, внутреннего по отношению к a_i^3, что можно выразить при помощи гомологии

$$c \sim d + \sum a_q^1 - d'.$$

Обратно, пусть $\sum a_q'$ будет ломаной линией, образованной ребрами, которые все принадлежат к a_i^3 и концами которой служат вершины a_m^0 и a_p^0; эти две вершины соответственно принадлежат к двум граням a_j^2 и a_k^2; обе из них входят в a_i^3. Пусть даны три линии

$$c = P(a_j^2)\,P(a_i^3) + P(a_i^3)\,P(a_k^2), \quad d = P(a_j^2)\,a_m^0, \quad d' = P(a_k^2)\,a_p^0.$$

Снова будем иметь

$$c \sim d + \sum a_q^1 - d'.$$

Пусть теперь a_i^0 — вершина, принадлежащая двум граням a_j^2 и a_k^2. Пусть даны две линии третьего вида

$$d_j = P(a_j^2)\, a_i^0, \quad d_k = P(a_k^2)\, a_i^0.$$

Мы можем провести линию L, бесконечно мало отклоняющуюся от вершины a_i^0 и идущую от точки a_j^3 к точке a_k^2.

Предположим, для определенности, что эта линия пересекает три клетки и что она последовательно встречает грань a_j^2, клетку a_j^3, грань a_m^2, клетку a_m^3, грань a_p^3, клетку a_p^2 и, наконец, грань a_k^2.

Построим три линии

$$c_j = P(a_j^2)\, P(a_j^3) + P(a_j^3)\, P(a_m^2),$$
$$c_m = P(a_m^2)\, P(a_m^3) + P(a_m^3)\, P(a_p^2),$$
$$c_p = P(a_p^2)\, P(a_p^3) + P(a_p^3)\, P(a_k^2)$$

и две линии третьего вида

$$d_m = P(a_m^2)\, a_i^0, \quad d_p = P(a_p^2)\, a_i^0.$$

Будем иметь

$$c_j \equiv d_j - d_m, \quad c_m \equiv d_m - d_p, \quad c_p \equiv d_p - d_k$$

и так как три клетки a_j^3, a_m^3, a_p^3 являются просто связными, то

$$c_j \sim d_j - d_m, \quad c_m \sim d_m - d_p, \quad c_p \sim d_p - d_k,$$

и, наконец,

$$c_j + c_m + c_p \sim d_j - d_k.$$

Следовательно, всегда можно найти ломаную линию, образованную из линий c и гомологичную $d_j - d_k$, где d_j и d_k — линии третьего вида, сходящиеся к одной и той же вершине.

Пусть теперь

$$\sum b_i^1 \equiv 0 \qquad (1)$$

— конгруенция между ребрами b_i^1 многогранника P'.

Ломаная линия $\sum b_i^1$, очевидно, образована некоторым числом пар линий второго вида; пробегая по этой ломаной линии, мы встретим последовательно q граней

$$a_1^2,\ a_2^2,\ \ldots,\ a_q^2,$$

пока не вернемся к грани a_1^2, которую я буду обозначать также a_{q+1}^2, и встретим q клеток

$$a_1^3, \quad a_2^3, \quad \ldots, \quad a_p^3,$$

пока не придем к клетке a_1^3, которую я также обозначу a_{q+1}, так что грань a_k^2 отделит клетку a_k^3 от клетки a_{k+1}^3.

Наша конгруенция записывается тогда

$$\sum [P(a_k^3) P(a_k^2) + P(a_k^2) P(a_{k+1}^3)] \equiv 0,$$

или, что то же,

$$\sum [P(a_{k-1}^2) P(a_k^2) + P(a_k^3) P(a_k^2)] \equiv 0.$$

Пусть теперь a_k^0 — одна из вершин грани a_k^2, принадлежащая, следовательно, одновременно к клеткам a_k^2 и a_{k+1}^3.

Пусть d_k — линия третьего вида $P(a_k^2)\, a_k^0$; мы увидим, что существует ломаная линия A_k, образованная ребрами, принадлежащими к клетке a_k^3, и такая, что имеется гомология

$$P(a_{k-1}^2) P(a_k^3) + P(a_k^3) P(a_k^2) \sim d_{k-1} + A_k - d_k.$$

При сложении всех этих гомологий первый член сводится к выражению

$$\sum [P(a_{k-1}^2) P(a_k^3) + P(a_k^3) P(a_k^2)] = \sum b_i^1;$$

линии третьего вида d_k пропадают и остается

$$\sum b_i^1 \sim \sum A_k$$

и, следовательно,

$$\sum b_i^1 \equiv \sum A_k \equiv 0.$$

Итак, каждой конгруенции $\sum b_i^1 \equiv 0$ между ребрами P' соответствует конгруенция $\sum A_k \equiv 0$ между ребрами P, причем такая, что

$$\sum b_i^1 \sim \sum A_k.$$

Если же $\sum b_i^1 \sim 0$, то и $\sum A_k \sim 0$, и наоборот.

Пусть теперь

$$\sum A_k \equiv 0 \tag{2}$$

— конгруенция между ребрами P; предположим, что A_k будет ломаной линией, образованной ребрами, принадлежащими к клетке a_k^3.

Первый член конгруенции (2) будет состоять из q подобных ломаных линий

$$A_1, \; A_2, \; \ldots, \; A_q,$$

и я буду обозначать безразлично A_1 через A_1 или A_{q+1} и A_q через A_0 или A_q.

Пусть a_{k-1}^0 и a_k^0 будут два конца линии A_k; вершина a_k^0 будет одновременно принадлежать клеткам a_k^3 и a_{k+1}^3; пусть $a_k'^2$ — грань a_k^3 и a_{k+1}^2 — грань a_{k+1}^3, которым принадлежит a_k^0.

Пусть даны линии третьего вида

$$d'_k = P(a_k^2)\,a_k^0, \quad d_{k+1} = P(a_{k+1}^2)\,a_k^0;$$

с другой стороны

$$c_k = P(a_k^2)\,P(a_k^3) + P(a_k^3)\,P(a_k^2).$$

Мы уже видели, что

$$A_k \sim -d_k + c_k + d'_k.$$

С другой стороны, линии d_{k+1} и d'_k сходятся к одной вершине a_k^0. Мы видели, кроме того, что можно найти такую комбинацию C_k линий c, чтобы для нее

$$C_k \sim d'_k - d_{k-1}.$$

Складывая все эти гомологии, найдем

$$\sum A_k \sim \sum c_k + \sum C_k,$$

и, следовательно,

$$\sum c_k + \sum C_k \equiv 0.$$

Первый член этой последней конгруенции является комбинацией линий c или, что то же, комбинацией ребер b_i^1 многогранника P', так что можно записать

$$\sum c_k + \sum C_k = \sum b_i^1,$$

откуда

$$\sum A_k \sim \sum b_i^1.$$

Резюмируем: каждой конгруенции между ребрами P соответствует конгруенция между ребрами P', и обратно, и для того, чтобы первый член одного из условий был гомологичен нулю, необходимо и достаточно, чтобы то же было и со вторым.

Другими словами, число различных конгруенций между ребрами будет одним и тем же для P и для P', причем конгруенции не считаются различными, если линейная комбинация первых членов этих конгруенций гомологична нулю.

Еще иначе, приведенное число Бетти относительно ребер P равно приведенному числу Бетти относительно ребер P'.

Можно было бы прийти к тому же результату, заметив, что можно построить полиэдр, являющийся одновременно производным полиэдра P и производным от взаимного полиэдра P', и применяя теорему § 5.

Несколько ниже, в § 10, мы увидим, что это предложение можно представить и в другой форме.

С другой стороны, это даст возможность проще, чем в § 5, доказать равенство приведенных и собственных чисел Бетти.

Действительно, определение полиэдра P' содержит некоторый произвол: его вершины b_i^0 должны быть внутри клеток a_i^3 полиэдра P. При этом условии всегда можно подобрать полиэдр P' так, чтобы *любая* замкнутая линия была комбинацией из b_i^1.

§ 8. Доказательство основной теоремы

Пусть N_1 будет число ребер нашего полиэдра P, N_2 — число его граней, N_3 — число клеток. Образуем таблицу, пользуясь следующими правилами.

Таблица будет иметь N_2+N_3 столбцов, из которых N_2 будут называться столбцами первого вида и N_3 — второго вида; она будет иметь также N_2+N_1 строк, N_2 — первого и N_1 — второго вида. Таблица будет включать следующие элементы:

1. Для элемента i-й строки первого вида и j-го столбца первого вида я буду писать 1, если $i=j$, и 0, если $i\neq j$.

2. Все элементы, принадлежащие к строке второго вида и к столбцу второго вида, будут нулями.

3. Элемент i-го столбца первого вида и j-й строки второго вида будет равен $\varepsilon_{i,j}^2$, где $\varepsilon_{i,j}^2$ — число, соответствующее отношению между гранью a_i^2 и ребром a_j^1.

4. Элемент i-й строки первого вида и j-го столбца второго вида будет равен $\varepsilon_{i,j}^3$, т. е. числу, соответствующему отношению между клеткой a_j^3 и гранью a_j^2.

Наша таблица, если, например, имеются две клетки, четыре грани и три ребра, будет иметь следующий вид:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 1 & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 1 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0
\end{array} \qquad (1)$$

Я не пишу здесь индексов при ε в целях упрощения записи.

Теперь я укажу операции, которые позволено применять к этой таблице:

1) добавить один столбец к другому *того же вида* или вычесть его;

2) добавить одну строку к другой *того же вида* или вычесть ее;

3) поменять местами два столбца одного вида, переменив все знаки одного из них;

4) поменять местами две строки одного вида, переменив все знаки одной из них.

Все эти преобразования, при которых элементы таблицы остаются целыми числами, называются *арифметическими преобразованиями* таблицы.

Можно воспользоваться ими для упрощения той части таблицы, которая принадлежит столбцам первого вида и строкам второго вида, а также столбцам второго вида и строкам первого вида.

В соответствии с общеизвестными теоремами арифметики, мы можем довести подобное упрощение до следующего. После того как приведение будет закончено, элемент i-го столбца первого вида и j-й строки второго вида

1) будет нулем, если $i > j$;

2) будет равен целому H_i, которое может быть нулем при $i=j$;

3) будет опять нулем, если $i < j$ и если H_i и H_j — взаимно простые числа;

4) наконец, будет нулем, если $j > N_2$.

То же самое будет и с элементом i-й строки первого вида и j-го столбца второго вида.

Приведение можно было бы провести еще дальше, при допущении пятой операции: умножения всех элементов одной строки и одного столбца на одно и то же число, целое или не целое, но отличное от нуля.

Соответствующие преобразования будут называться *алгебраическими преобразованиями* таблицы.

Тогда можно было бы предположить, что элемент i-го столбца первого вида и j-й строки второго вида (так же, как и элемент i-й строки первого вида и j-го столбца второго вида) равен нулю, если $i \neq j$. Если $i=j$, то он может быть равен 0 или 1. Если это так, то я буду называть таблицу *приведенной*.

После пятой операции элементы, принадлежащие строкам и столбцам первого вида, могут перестать быть целыми числами; более того, детерминант, образованный этими строками и столбцами, может и не оставаться равным 1, однако он останется отличным от нуля.

Таблица (1) относится к граням полиэдра P и к их отношениям с клетками и ребрами. Мы могли бы составить и другую, совершенно подобную первой, относящуюся к ребрам полиэдра P и к их отношениям с гранями и вершинами.

Мы могли бы также рассмотреть полиэдр P', определенный несколько выше, и построить две таблицы, одну относительно граней P', а другую относительно его ребер.

Сравним таблицу (1), относящуюся к граням P, с таблицей (1bis), относящейся к ребрам P'.

Из того, что было сказано, следует, что эти две таблицы можно было бы вывести одну из другой, заменив строки столбцами, и наоборот.

Установив это, рассмотрим таблицу (1), относящуюся к граням P, и исследуем, как из этой таблицы можно было бы вывести число Бетти P_2 многогранника P.

Установим сперва, можно ли из нее вывести конгруенции между гранями и ребрами?

Рассмотрим какой-либо столбец первого вида, например i-й столбец. Умножим элементы этого столбца и k-й строки первого вида на a_k^2 и сложим их. Затем приравняем полученную сумму другой, полученной при умножении элементов того же столбца и j-й строки второго вида на a_j^1. Тогда получим конгруенцию

$$a_i^2 \equiv \sum \varepsilon_{i,j}^2 a_j^1,$$

которая, очевидно, является одной из конгруенций (3) § 2. Все прочие конгруенции представляют из себя лишь комбинации.

Как теперь можно было бы найти гомологии между гранями?

Рассмотрим для этого, например, i-й столбец второго вида; умножим элементы k-й строки и этого столбца на a_k^2, сложим и приравняем нулю; получим

$$\sum \varepsilon_{i,k}^3 a_k^2 \sim 0,$$

что, конечно, является одной из гомологий (5) § 2, причем все остальные будут лишь комбинациями.

Что же произойдет, если к нашей таблице (1) *применить какое-либо алгебраическое преобразование?*

Перед преобразованием каждый столбец первого вида соответствует грани, каждый столбец второго вида — клетке, каждая строка первого вида — грани, каждая строка второго вида — ребру.

Умножая элементы каждой строки первого вида на соответствующую грань, элементы каждой строки второго вида на соответствующее ребро и складывая их, мы получим, как мы уже видели, столько же конгруенций и гомологий, сколько имеется столбцов.

Предположим теперь, что производится вторая операция, т. е. что преобразование состоит в прибавлении строки первого вида, соответствующей a_i^2, к строке первого вида, соответствующей a_k^2. Условимся говорить, что новой k-й строке (той, к которой была добавлена i-я строка) все еще соответствует многообразие a_k^2; но что новой i-й строке (которая, кстати, не изменилась) соответствует многообразие $a_i^2 - a_k^2$.

Если произвести пятую операцию над k-й строкой первого вида, умножив ее элементы на постоянное m, то мы условимся говорить, что новой k-й строке соответствует многообразие $\frac{1}{m} a_k^2$ (обозначение, имеющее только символическое значение, причем $\frac{1}{m}$ не должно быть целым) [19].

Что касается четвертой операции, то она является всего лишь комбинацией из нескольких операций, аналогичных второй.

Таким образом, мы определили многообразие, соответствующее каждой из строк первого вида нашей таблицы, полученное после того, как к ним применялись какие-либо комбинации 2-й, 4-й и 5-й операций.

Подобным образом мы определим многообразия, соответствующие различным строкам второго вида, после того как к ним будет применена некоторая комбинация из 2-й, 4-й и 5-й операций.

Благодаря этим условиям, для получения конгруенций и гомологий достаточно сложить и приравнять нулю элементы каждой строки после того, как они умножены на соответствующие многообразия, и в строках второго вида будет переменен знак произведений, полученных таким образом.

Если теперь применить к столбцам таблицы 1-ю, 3-ю и 5-ю операции, то это будет заключаться в комбинировании между собой конгруенций, и также в комбинировании между собой гомологий, или в умножении одной конгруенции и одной гомологии на постоянный множитель.

Отсюда вытекает следующий результат.

Для того чтобы вывести конгруенции из преобразованной таблицы, необходимо выполнить следующее: умножить каждую строку первого вида на соответствующее ей многообразие в силу нашего соглашения и сложить их; затем сделать то же самое со строками второго вида. Остается приравнять оба полученных таким образом результата и получить столько конгруенций, сколько имеется столбцов первого вида; все остальные возможные конгруенции будут лишь их комбинациями.

Для того чтобы подобным образом вывести гомологии, необходимо: умножить каждую строку первого вида на соответствующее многообразие, сложить и приравнять нулю. Таким образом получится столько гомологий, сколько столбцов второго вида; все прочие возможные гомологии будут лишь комбинациями.

Следует отметить, что полученные таким образом конгруенции и гомологии могут не иметь иного значения, кроме символического, так как коэффициенты могут быть дробными.

И действительно, с одной стороны, элементы преобразованной таблицы могут оказаться не целыми; с другой стороны, многообразие, соответствующее одной строке, может, как я уже отметил выше, не иметь само по себе никакого значения, кроме символического.

Но поскольку коэффициенты, будут ли они целыми или нет, являются всегда соизмеримыми, достаточно умножить конгруенцию или гомологию на подходящее целое число, чтобы вывести отсюда конгруенцию или гомологию с целыми коэффициентами, имеющую свое самостоятельное значение.

Предположим теперь, что произведено приведение таблицы так, как я указывал это выше.

Сколько будет тогда различных гомологий?

Среди N_3 столбцов второго вида будет $N_3—N'_2$ таких, все элементы которых будут нулями, и N_2 таких, у которых один элемент будет равен 1, а все прочие — нулю. $N_3—N'_2$ первых не дадут нам ни одной гомологии; каждая из N'_2 других даст одну, и эти N'_2 гомологий, очевидно, все будут различными.

Следовательно, имеется N'_2 различных гомологий.

Сколько же существует различных конгруенций между гранями и ребрами?

Их будет, очевидно, N_2 соответственно N_2 столбцам первого вида, и конгруенции эти будут различными, так как детерминант, образованный строками и столбцами первого вида, не равен нулю.

Рассмотрим теперь на приведенной таблице N_1 строк второго вида. Среди них будет $N_1—N''_2$ таких, элементы которых являются нулями, и N''_2 таких, у которых один элемент равен 1, а все остальные — нули. Среди N_2 конгруенций будут, следовательно, N''_2, содержащих хотя бы одно ребро, и $N_2—N'_2$, не содержащих ни одного ребра. Итак, существует $N_2—N''_2$ конгруенций *только между гранями* и все они будут различными.

Итак, *только между гранями* будет $N_2—N'_2—N''_2$ конгруенций, которые останутся различными, если не считать за различные те, которые можно вывести одни из других при помощи гомологий.

Следовательно, число Бетти, относящееся к граням P, равно

$$N_2 - N'_2 - N''_2 + 1.$$

Найдем теперь число Бетти относительно ребер P'.

Очевидно, мы найдем его, если будем действовать так, как только что над таблицей (1bis), относящейся к ребрам P'.

Но от одной таблицы можно перейти к другой при помощи замены строк столбцами и наоборот. Следовательно, числами, играющими относительно (1bis) ту же роль, какую N_2, N'_2, N''_2 играют относительно (1), будут соответственно N_2, N''_2, N'_2.

Значит, число Бетти относительно ребер P' будет опять-таки

$$N_2 - N'_2 - N''_2 + 1.$$

Итак, числа Бетти, относящиеся одно — к граням P, а другое — к ребрам P', равны между собой.

Но мы уже видели, что числа Бетти относительно ребер P и ребер P' равны, так же, как и числа Бетти относительно граней P и граней P'.

Следовательно, число Бетти относительно граней P равно числу Бетти относительно ребер P.

Итак, наша фундаментальная теорема доказана по отношению к полиэдру P, т. е. по отношению к полиэдрам в пространстве четырех измерений.

Это доказательство, без сомнения, можно распространить на любой полиэдр.

§ 9. Различные замечания

Фундаментальная теорема установлена, таким образом, с помощью доказательства, существенно отличающегося от того, которое приведено на стр. 489 «Analysis situs».

Но это не могло бы удовлетворить нас. Следует постараться вновь рассмотреть промежуточные предложения и доказать, в частности, следующее.

Условием, необходимым и достаточным для того чтобы можно было найти многообразие V, для которого $\sum N(V, V_i) \neq 0$, является отсутствие гомологии $\sum V_i \sim 0$.

Рассмотрим два многообразия, первое V_1 одного измерения, состоящее из ребер P', второе V_2 двух измерений, состоящее из граней P, причем

$$V_1 = \sum \alpha_i b_i^1, \quad V_2 = \sum \alpha_i' a_i^2,$$

где ребро b_i^1 соответствует грани a_i^2, в соответствии с условиями § 7.

Ребро b_i^1 пересекает грань a_i^2 и не пересекает никакой другой грани, так что если мы вернемся к обозначениям «Analysis situs» стр. 485, то будем иметь

$$N(V_1, V_2) = \sum \alpha_i \alpha_i'.$$

В дальнейшем будем предполагать, что многообразия V_1 и V_2 являются замкнутыми, что выражается конгруенциями

$$\sum \alpha_i b_i^1 \equiv 0, \quad \sum \alpha_i' a_i^2 \equiv 0. \tag{1}$$

Проверим сперва справедливость

$$\sum \alpha_i \alpha_i' = 0$$

в случае существования одной из двух гомологий

$$\sum \alpha_i b_i^1 \sim 0, \quad \sum \alpha_i' a_i^2 \sim 0. \tag{2}$$

Действительно, если мы имеем, например, вторую гомологию (2), то тогда

$$\alpha_i' = \sum_{j=1}^{j=N_3} \zeta_j \varepsilon_{i,j}^3,$$

где ζ_j — коэффициент, не зависящий от j.

С другой стороны, первая из конгруенций (1) может быть выведена из одной из следующих:

$$b_i^1 \equiv \sum b_j^0 \varepsilon_{j,i}^3, \tag{3}$$

откуда

$$\sum b_i \alpha_i^1 \equiv \sum \sum \alpha_i b_j^0 \varepsilon_{j,i}^3.$$

Приравнивая нулю коэффициент при b_j^0, получим последовательно

$$\sum \alpha_i \varepsilon_{j,i}^3 = 0, \quad \sum\sum \alpha_i \zeta_j \varepsilon_{j,i}^3 = 0, \quad \sum \alpha_i \alpha_i' = 0,$$

что и следовало доказать.

Подобное рассуждение можно было бы провести и с первой гомологией (2).

Я утверждаю теперь, что если вторая гомология (2) не имеет места, то можно выбрать α_i так, чтобы V_1 оставалось замкнутым и все же $\sum \alpha_i \alpha_i'$ не равнялась нулю.

Действительно, сказать, что вторая гомология (2) не имеет места, означает, что нельзя найти такого числа ζ_j, чтобы имелось

$$\alpha_i' = \sum \zeta_j \varepsilon_{j,i}^3. \tag{4}$$

Сказать, что V_1 остается замкнутым, означает, что α_i подчинены условиям

$$\sum \alpha_i \varepsilon_{j,i}^3 = 0. \tag{5}$$

И совершенно ясно, что если α_i' не удовлетворяют равенствам вида (4), то линейное уравнение $\sum \alpha_i \alpha_i' = 0$ будет отличаться от уравнений (5). Следовательно, всегда можно найти числа α_i, которые удовлетворят уравнениям (5), но не будут удовлетворять $\sum \alpha_i \alpha_i' = 0$.

Заметим тут же, что мы не потеряли общности, предположив, что многообразия V_1 и V_2 являются комбинациями b_i^1 и a_i^2, каким бы ни было многообразие V, подразделение которого образует полиэдры P и P'. Какими бы ни были многообразия V_1 и V_2, мы всегда можем подразделить V так, что образуются два взаимных полиэдра P и P'; при этом V_1 будет комбинацией ребер второго, а V_2 — комбинацией граней первого.

Следовало бы посмотреть, как таблица (1) § 8 и аналогичные таблицы дадут нам возможность определить числа Бетти так, как их определял сам Бетти, а не числа Бетти, определенные по второму способу, т. е. так, как мы рассматривали их до настоящего времени.

Рассмотрим, например, таблицу, аналогичную таблице (1), но относящуюся к ребрам многогранника P и к их соотношениям с гранями и вершинами. В частности, рассмотрим столбцы второго вида и строки первого вида, где фигурируют числа $\varepsilon_{i,j}^2$. Пусть T будет полученной таким образом частичной таблицей. С помощью этой таблицы можно образовать конгруенции

$$a_i^2 \equiv \sum \varepsilon_{i,j}^2 a_j^1,$$

откуда выводятся гомологии

$$\sum \varepsilon_{i,j}^2 a_j^1 \sim 0. \tag{6}$$

Итак, для того чтобы узнать, являются ли некоторые замкнутые линии, образованные комбинациями ребер a_j^1, различными *в смысле первого определения*, т. е. *в смысле Бетти*, надо определить, связаны ли они гомологией, полученной в результате комбинации гомологий (6) с помощью сложения, вычитания или умножения, но *не деления*.

Предположим, что к таблице применены некоторые из преобразований, которые я в § 8 назвал арифметическими.

Пусть $\zeta_{i,j}^2$ будет число, которое в преобразованной таблице находится в j-й строке первого вида и в i-м столбце второго вида. Пусть c_j будет многообразие, соответствующее j-й строке первого вида преобразованной в соответствии с условиями § 8 таблицы. В соответствии с тем, что мы видели в § 8, указанное многообразие является не чем иным, как комбинацией ребер a_j^1.

Тогда будем иметь гомологии

$$\sum \zeta_{i,j}^2 c_j \sim 0. \tag{6bis}$$

Эти гомологии являются комбинациями гомологий (6), которые можно получить *без деления*, и обратно, можно вывести гомологии (6) из гомологий (6bis) *без деления*; это является следствием арифметического характера преобразований.

Итак, когда хотят увериться в том, различны ли две замкнутые линии в смысле Бетти, вместо гомологий (6) можно воспользоваться гомологиями (6bis).

Можно предположить, что таблица приведена посредством арифметических преобразований, как я объяснил в § 8, и, следовательно, что $\zeta_{i,j}^2$ нуль: 1) если $i > j$; 2) если $j > N_2$.

Таблица, сведенная к столбцам второго вида и к строкам первого вида, примет, например, следующий вид:

a	0	0	0	0
e	b	0	0	0
f	g	c	0	0
h	k	l	d	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Я предположил здесь, что имеется шесть строк и пять столбцов. Я предположил также, что одно из чисел $\zeta_{i,j}^2$ равно нулю, и, таким образом, одна из колонок преобразованной таблицы будет целиком состоять из нулей. Можно добавить, что, если d равно 1, то числа h, k, l, фигурирующие в той же строке, будут нулями.

Итак, если d не равно 1, то оба определения чисел Бетти не совпадают, так как существует гомология $dc_4 \sim 0$, из которой нельзя вывести гомологию $c_4 \sim 0$ иначе, чем делением. Если $d=1$, то $h=k=l=0$ и если c не равно 1, то будет существовать гомология $cc_3 \sim 0$, и оба определения не совпадут, и так далее.

Резюмируя, можно сказать, что для того чтобы оба определения совпали, необходимо и достаточно, чтобы произведение $abcd$ было равно 1.

Чтобы интерпретировать этот результат, вернемся к исходной таблице. Произведение $abcd$ будет общим наибольшим делителем всех детерминантов, полученных при удалении $N_2—N_3$ строк из таблицы T, если только эти детерминанты все не обратятся в нули (в этом случае в преобразованной таблице не будет столбцов, исключительно составленных из нулей). Если детерминанты все окажутся нулями, то можно будет образовать другие, исключая из таблицы T один столбец и $N_2—N_3+1$ строк; произведение $abcd$ будет общим наибольшим делителем всех этих детерминантов, если только они не все будут нулями, и так далее.

Таким образом мы приходим к следующему правилу.

Пусть Δ_p будет общий наибольший делитель детерминантов, полученных в результате исключения из таблицы T p строк и $N_2—N_3+p$ столбцов. Необходимым и достаточным условием того, чтобы совпали оба определения чисел Бетти, будет равенство единице первого из Δ_p, который не становится равным нулю (общий наибольший делитель нескольких чисел, равных нулю, по определению равен нулю).

Предположим, что многообразие $V_1 = \sum \alpha_i b_i^1$, рассмотренное в начале этого параграфа, не может быть границей многообразия двух измерений, но удовлетворяет гомологии $V_1 \sim 0$. Другими словами, гомология $V_1 \sim 0$ может быть выведена из гомологий (6) с помощью деления, но никогда без деления. В этом случае, тем не менее, будет

$$N(V_1,\ V_2) = \sum \alpha_i \alpha_i' = 0.$$

§ 10. Арифметическое доказательство одной из теорем § 7

Вот один из способов образования гомологий, который может оказаться полезным.

Пусть b_i^0 — вершина полиэдра P', расположенного внутри некоторой клетки a_i^3 многогранника P. С другой стороны, пусть a_k^0 — вершина P, принадлежащая к клетке a_i^3. Соединим b_i^0 и a_k^0 с помощью линии, которую я обозначу через $b_i^0 a_k^0$.

Пусть теперь b_i^1 будет ребро P'; его концами будут b_j^0 и b_h^0. Таким образом, одна из конгруенций (3) (см. § 2), относящихся к P', будет

$$b_i^1 \equiv b_j^0 - b_h^0.$$

Пусть, с другой стороны, a_i^2 — грань P, соответствующая ребру b_i^1 P' и a_k^0 — одна из вершин a_i^2; будем тогда иметь гомологию

$$b_i^1 \sim a_k^0 b_j^0 - a_k^0 b_h^0. \qquad (1)$$

Пусть a_i^1 — ребро P, двумя концами которого служат a_j^0 и a_k^0 так, что одна из конгруенций (3), относящихся к P, будет

$$a_i^1 \equiv a_j^0 - a_h^0.$$

Пусть a_k^3 — одна из клеток P, к которым принадлежат a_i^1, и b_k^0 — соответствующая вершина P'; тогда будем иметь гомологию

$$a_i^1 \sim b_k^0 a_j^0 - b_k^0 a_h^0. \qquad (2)$$

Я утверждаю теперь, что все гомологии между a_i^1 можно вывести из гомологий (2).

Действительно, пусть a_i^2 — любая грань P и пусть

$$a_i^2 \equiv \sum \varepsilon_{i,j}^2 a_j^1$$

— соответствующая ей конгруенция вида (3); отсюда выводится гомология

$$\sum \varepsilon_{i,j}^2 a_j^1 \sim 0, \qquad (3)$$

а мы уже видели в § 6, что все гомологии между ребрами P являются комбинациями тех, которые получаются подобным образом.

Пусть теперь a_j^1 — одно из ребер P, фигурирующих в гомологии (3), и пусть

$$a_j^1 \equiv a_h^0 - a_l^0.$$

Пусть, кроме того, a_k^3 — одна из клеток, в которой лежат a_1^2. Тогда будем иметь гомологию

$$a_i^1 \sim b_k^0 a_h^0 - b_k^0 a_l^0. \qquad (2\text{bis})$$

Если мы сложим гомологии (2bis), имеющие вид (2), после того как умножим их на $\varepsilon_{i,j}^2$, то все составляющие второго члена исчезнут вследствие соотношений (5) § 2; и мы опять вернемся к гомологии (3).

Это и следовало доказать.

Подобным образом можно доказать, что все гомологии между b_i^1 можно вывести из гомологий (1).

Выше, в § 7, мы видели, что, имея конгруенцию

$$\sum a_i^1 \equiv 0,$$

можно найти другую конгруенцию между ребрами P'

$$\sum b_j^1 \equiv 0,$$

и таким образом, что получится гомология

$$\sum a_i^1 \sim \sum b_j^1. \tag{4}$$

Я утверждаю теперь, что гомология (4) может быть выведена из гомологий (1) и (2).

Действительно, разобьем первый член конгруенции $\sum a_i^1 \equiv 0$ на определенное число групп таким образом, чтобы ребра одной и той же группы принадлежали одной клетке a_k^3. Пусть $\sum a_j^1$ — одна из этих групп; будем иметь конгруенцию

$$\sum a_j^1 \equiv a_m^0 - a_p^0, \tag{5}$$

где a_m^0 и a_p^0 — два конца линии, образованной совокупностью ребер этой группы. Я предполагаю, что все эти ребра принадлежат к телу a_k^3. Пусть

$$a_j^1 \equiv a_h^0 - a_l^0$$

будет одним из этих ребер; тогда получим гомологию

$$a_j^1 \sim b_k^0 a_h^0 - b_k^0 a_l^0; \tag{2ter}$$

складывая все эти гомологии, найдем

$$\sum a_j^1 \sim b_k^0 a_m^0 - b_k^0 a_p^0. \tag{6}$$

Сложим, с одной стороны, все гомологии (6), а с другой — все конгруенции (5), соответствующие различным группам. Сложение конгруенций (5) должно дать конгруенцию $\sum a_i^1 \equiv 0$; отсюда следует, что если вершина a_m^0 входит в одну из конгруенций (5) со знаком плюс, то она должна входить в другую со знаком минус. Итак, сложение гомологий (6) даст

$$\sum a_j^1 \sim \sum (b_k^0 a_m^0 - b_q^0 a_m^0). \tag{7}$$

Записывая это соотношение, я предполагаю, что a_m^0 входит в состав двух из конгруенций (5), один раз со знаком плюс в конгруенцию, соответствующую клетке a_k^3, и один раз со знаком минус в конгруенцию, соответствующую телу a_q^3.

Заметим теперь, что b_k^0 и b_q^0 являются двумя вершинами P' и что эти две вершины принадлежат телу b_m^3. Тогда можно найти линию, образованную ребрами P', принадлежащую этой клетке b_m^3 и идущую от b_k^0 к b_q^0. Пусть $\sum b_s^1$ будет этой линией; тогда

$$\sum b_s^1 \equiv b_k^0 - b_o^0. \tag{5bis}$$

Точно так же, как из конгруенции (5) и гомологий (2ter), имеющих вид (2), мы вывели гомологию (6), из конгруенции (5bis) и из гомологий вида (1) мы можем вывести гомологию

$$\sum b_s^1 \sim a_m^0 b_k^0 - a_m^0 b_q^0. \tag{6bis}$$

Каждой составляющей второго члена (7) соответствует гомология (6bis). Складывая их, найдем

$$\sum\sum b_s^1 \sim \sum (a_m^0 b_k^0 - a_m^0 b_q^0), \tag{7bis}$$

откуда

$$\sum a_j^1 + \sum\sum b_s^1 \sim 0 \tag{8}$$

гомология вида (4), которая, очевидно, выводится из гомологий (1) и (2).

Это и следовало доказать.

Можно спросить, почему я считал необходимым вернуться к теореме, уже доказанной в § 7. Это станет понятным, если отдать себе отчет в геометрической, так сказать, природе доказательства § 7. Настоящее же доказательство, наоборот, имеет арифметический характер; оно основывается лишь на свойствах схем, определенных в § 2, и на таблицах, построенных в § 8, и оно сохраняет свое значение даже тогда, когда этим схемам и таблицам не соответствует никакой полиэдр.

В самом деле, что мы предположили? То, что если α_0^p, α_1^p, α_2^p являются числами вершин, ребер и граней, принадлежащих одной и той же клетке, и если β_0^p, β_1^p, β_2^p являются числами клеток, граней и ребер, имеющих одну и ту же вершину, то

$$\alpha_0^p - \alpha_1^p + \alpha_2^p = \beta_0^p - \beta_1^p - \beta_2^p = 2$$

и, кроме того, две любые вершины a_i^0 и a_k^0 связаны между собой гомологией

$$a_i^0 \sim a_k^0. \tag{9}$$

Но всегда можно установить, принадлежит ли вершина к грани, применяя к таблице § 8 чисто арифметические правила, и подобным образом можно установить, имеет ли место гомология, подобная (9).

§ 11. Возможность подразделения [20]

Все изложенное выше предполагает, что любое многообразие можно подразделить на просто связные многообразия так, что можно построить полиэдр P p измерений, для которого многообразия $a_i^p, a_i^{p-1}, \ldots, a_i^2, a_i^1, a_i^0$ являются просто связными. Например, каждое многообразие трех измерений можно разделить на просто связные клетки, отделяющиеся одни от других с помощью просто связных граней.

Вот это нам и остается доказать, и я сейчас приведу соответствующее доказательство. Предварительно я хочу уточнить; я покажу, что всякое многообразие p измерений может быть подразделено таким образом, что получится полиэдр P, для которого все многообразия a_i^p, $a_i^{p-1}, \ldots, a_i^2$, a_i^1, a_i^0 будут обобщенными тетраэдрами.

Я предполагаю, что теорема уже доказана для многообразия $p-1$ измерений и хочу распространить его на многообразие p измерений.

Представим определение нашего многообразия в следующем виде, включающем оба определения, данных в «Analysis situs».

Пусть даны уравнения и неравенства:

$$\begin{aligned} &x_i = \theta_i(y_1, y_2, \ldots, y_q) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ &f_k(y_1, y_2, \ldots, y_q) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q-p), \\ &\varphi_h(y_1, y_2, \ldots, y_q) > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Эти уравнения и неравенства определят многообразие v, которое будет ограниченным и, вообще говоря, незамкнутым. Можно написать аналогичные системы уравнений и неравенств, подобно определяющие частичные многообразия, которые я обозначу $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

Два из этих многообразий будут называться смежными, если они имеют общую часть; я могу предположить, что можно перейти от какой-либо точки одного из этих многообразий к любой точке другого из них, не выходя из совокупности этих многообразий. Эта совокупность образует многообразие, которое я назову V и которое и требовалось определить.

Я предполагаю, что это многообразие V является двусторонним.

Это, очевидно, самый общий возможный способ определения многообразия.

Рассмотрим частичное многообразие v_1, определенное уравнениями (1).

В соответствии с теоремой о неявных функциях, можно удовлетворить уравнениям

$$f_k = 0,$$

полагая

$$y_j = \psi_j(z_1, z_2, \ldots, z_p),$$

где ψ являются голоморфными функциями z; однако ряды ψ могут и не сходиться для всех точек многообразия v_1.

Условиями сходимости служат определенные неравенства

$$\eta_k(z_1, z_2, \ldots, z_p) > 0.$$

Если заменить y функциями z, то соотношения

$$x_i = \theta_i \quad \varphi_h > 0$$

примут вид

$$x_i = \theta'_i(z_1, z_2, \ldots, z_p),$$
$$\varphi'_h(z_1, z_2, \ldots, z_p) > 0.$$

Тогда совокупность соотношений

$$x_i = \theta'_i, \quad \varphi'_h > 0, \quad \eta_k > 0 \tag{1bis}$$

определит одно определенное многообразие v'_1 таким образом, что совокупность многообразий, аналогичных v'_1, воспроизведет многообразие v_1.

Таким образом, мы пришли ко второму определению «Analysis situs».

После этого зададим в v'_1 многообразие v''_1, удовлетворяющее следующим условиям: оно целиком содержится в v'_1; оно включает все точки v'_1, которые не являются для него общими с одним из смежных многообразий; следовательно, полная граница v''_1 будет целиком содержаться в части, общей v'_1 и смежным многообразиям.

Таким образом, каждому из многообразий v'_1, v'_2, ..., совокупность которых составляет V, будет соответствовать многообразие v''_1, v''_2, ..., удовлетворяющее только что высказанным условиям, и очевидно, что можно сделать так, чтобы каждая точка V принадлежала одному из многообразий v'' и только одному, если только она не окажется на границе одного из многообразий v''; в последнем случае она должна принадлежать также и границе по меньшей мере еще одного многообразия v''.

Многообразие V, подразделенное таким образом на многообразия v'', составляет полиэдр P в смысле, приданном этому слову в § 2. Но этот полиэдр еще не соответствует нашему требованию, так как мы не можем знать, являются ли многообразия v'' обобщенными тетраэдрами или даже просто связны ли они.

Рассмотрим многообразие v''_1 и пусть

$$z_1 = 0, \; z_2 = 0, \quad \ldots, \quad z_p = 0$$

— некоторая точка *внутри этого многообразия*; рассмотрим многообразие одного измерения

$$z_1 = \alpha_1 t, \quad z_2 = \alpha_2 t, \quad \ldots, \quad z_p = \alpha_p t,$$

где α — константы, и будем изменять t от 0 до $+\infty$. Это многообразие я буду называть *лучом-вектором*.

Каждый луч-вектор встретит полную границу v''_1 в нечетном числе точек; действительно, если следовать за этим вектором, изменяя t от 0 до $+\infty$, то придется выйти из многообразия v''_1. Можно затем вернуться обратно и выйти из него несколько раз, но в конце концов всегда придется выйти, чтобы более не возвращаться.

Может случиться, что некоторый луч-вектор встретит границу v''_1 в угловой точке. Лучи-векторы, которые удовлетворят этому условию, будут называться *особыми лучами*.

Совокупность особых лучей образует одно или несколько многообразий $p-1$ измерений, которые я назову *особыми конусами*.

Пересечения особых конусов с границей v_1'' образуют одно или несколько многообразий $p-2$ измерений, которые я обозначу U; эти многообразия U разделят границу v_1'' на области, которые я обозначу R.

Никакая область R не может пересечься лучом-вектором более, чем в одной точке, но, в соответствии с изложенным, могут произойти два случая: если следовать за этим лучом-вектором при возрастании t от 0 до ∞, то в момент встречи с R можно или выходить из v_1'', или возвращаться внутрь. Если первый случай, например, имеет место для одного из векторов, пересекающих R, то он будет иметь место для всех векторов, пересекающих R.

Это приводит к различению областей R: они могут быть областями первого вида, которые лучи-векторы встречают, выходя из v_1'', и областями второго вида, которые лучи-векторы встречают, возвращаясь в v_1''.

Так как области R являются многообразиями $p-1$ измерений, то они могут, в соответствии с предположением, сделанным вначале, быть подразделенными на обобщенные тетраэдры.

Предположим, для определенности, что некоторый луч-вектор пересекает три раза границу v_1'' и что он встречает последовательно области R_1, R_2, R_3; R_1 и R_3 будут первого вида, а R_2 — второго вида.

Подразделим R_1 и R_3 на обобщенные тетраэдры $p-1$ измерений.

Если T_1 есть одно из подразделений R_1, проведем все лучи-векторы, которые проходят через различные точки T_1, и сохраним части этих лучей-векторов, заключенные между точкой $z_i=0$ и областью R_1 (части, внутренние по отношению к v_1''); совокупность этих векторов образует обобщенный тетраэдр p измерений, имеющий в качестве вершины точку $z_i=0$, а основанием — обобщенный тетраэдр $p-1$ измерений T_1.

Пусть теперь T_3 — одно из подразделений R_3; опять проведем все лучи-векторы, которые проходят через различные точки T_3, и сохраним части этих лучей-векторов, содержащиеся между R_2 и R_3 (части, внутренние относительно v_1''). Эта совокупность образует многообразие $p-1$ измерений, которое можно будет назвать *усеченным обобщенным тетраэдром*, двумя основаниями которого являются T_3 и обобщенный тетраэдр $p-1$ измерений, который я обозначу T_2 и который составляет часть R_2. Иными словами, это — разность двух обобщенных тетраэдров, у которых есть общая вершина $z_i=0$ и два основания T_3 и T_2.

Этот усеченный обобщенный тетраэдр в свою очередь может быть разделен на p обобщенных тетраэдров так же, как в классической теореме усеченную трехгранную пирамиду можно разделить на три трехгранных пирамиды.

Окончательно v_1'' будет разделено на обобщенные тетраэдры.

Существует, однако, одно затруднение: так же, как и v_1'', можно подразделить и другие аналогичные многообразия v_2'', v_3'', ... Рассмотрим подразделение v_1'' на обобщенные тетраэдры T и подразделение v_2'' на

обобщенные тетраэдры T_2. Общая граница v_1'' и v_2'' окажется разделенной, с одной стороны, на обобщенные тетраэдры $p-1$ измерений τ_1, которые будут служить гранями T_1, и, с другой стороны, на обобщенные тетраэдры $p-1$ измерений τ_2, которые будут гранями T_2; *однако не очевидно, что оба эти подразделения совпадут.*

Рассмотрим тогда общую часть одного из τ_1 и одного из τ_2; я могу, в соответствии с принятым ранее предположением, разделить ее на обобщенные тетраэдры $p-1$ измерений σ. Таким образом, каждый из тетраэдров τ_1 и каждый из тетраэдров τ_2 будет разделен на тетраэдры σ.

Пусть теперь τ_1' будет одним из многообразий q измерений, *принадлежащим* к τ_1 (я пользуюсь здесь словом принадлежать в том же смысле, как и когда говорю, что грани, ребра, вершины обычного тетраэдра принадлежат этому тетраэдру или, как когда я говорил в § 2, что многообразия a_i^q принадлежат многограннику P). Пусть, подобным образом, τ_2' будет одним из многообразий q измерений, принадлежащим к τ_2. Эти два многообразия τ_1' и τ_2' будут обобщенными тетраэдрами, так как, в соответствии с определением обобщенного тетраэдра, каждое многообразие, *принадлежащее* к обобщенному тетраэдру, само является обобщенным тетраэдром. Тогда τ_1' и τ_2' окажутся подразделенными на обобщенные тетраэдры q измерений σ, которые *будут принадлежать* к тетраэдрам $p-1$ измерений σ.

Такая строгость может удовлетворить нас; наши многообразия v_1'', ... разделятся на обобщенные тетраэдры p измерений T^p, их границы — на тетраэдры $p-1$ измерений T^{p-1}, ...; однако эти тетраэдры T^{p-1} не будут теми, которые принадлежат к тетраэдрам T^p, эти последние будут лишь их подразделениями.

Но мы можем пойти и дальше.

Рассмотрим один из тетраэдров p измерений T^p, на которые подразделено v_1''. Я напоминаю, что они были получены путем разделения усеченных обобщенных тетраэдров, речь о которых была выше. Следовательно, все вершины T^p находятся на границе v_1'' (исключение будет для тех тетраэдров, у которых одна из вершин находится в точке $z_i=0$, но для этих последних особенных затруднений нет).

Предположим, например, что точки, общие T^p и области, названной выше R_3, образуют обобщенный тетраэдр q измерений T^q, *принадлежащий* к T^p, и что точки, общие T^p и области R_2, образуют тетраэдр $p-q-1$ измерений T^{p-q-1}, принадлежащий к T^p.

Тетраэдры T^q и T^{p-q-1} аналогичны тетраэдрам τ_1', рассмотренным выше; следовательно, их можно разделить на тетраэдры, аналогичные тем, которые были обозначены через σ'; пусть S_1^q, S_2^q, ... будут тетраэдры, аналогичные σ', являющиеся подразделениями T^q; пусть S_1^{p-q-1}, S_2^{p-q-1}, ... будут тетраэдры, аналогичные σ', являющиеся подразделениями T^{p-q-1}. Я утверждаю, что можно подразделить T_k^p на тетраэдры p измерений таким образом, чтобы многообразия S_1^q, S_2^q, ..., S_1^{p-q-1}, S_2^{p-q-1}, ... принадлежали T^p.

Для доказательства предположим сперва, что T^p будет *прямолинейным тетраэдром* (см. конец § 2). Известно, что прямолинейный тетраэдр полностью определен, если известны его $p+1$ вершин. Тогда T^p является прямолинейным тетраэдром, вершинами которого служат вершины T^q и T^{p-q-1}.

Предположим, что T^q разлагается на g частичных тетраэдров

$$S_1^q, \; S_2^q, \ldots, \; S_g^q$$

и T^{p-q-1} — на h частичных тетраэдров

$$S_1^{p-q-1}, \; S_2^{p-q-1}, \ldots, \; S_h^{p-q-1}.$$

Тогда можно проверить, что T^p разлагается на gh частичных тетраэдров, вершинами которых служат вершины

$$S_i^q \text{ и } S_2^{p-q-1} \qquad (i=1, \; 2, \ldots, \; g; \quad k=1, \; 2, \ldots, \; h).$$

Если тетраэдр T^p не является прямолинейным, результат все еще справедлив, так как любой тетраэдр гомеоморфен прямолинейному тетраэдру.

Таким образом, наше многообразие подразделяется на тетраэдры p измерений, которые образуют полиэдр; любое многообразие, принадлежащее последнему, принадлежит одному из этих тетраэдров.

Итак, мы избавились от последних сомнений, которые могли оставаться относительно возможности подразделить многообразие V так, чтобы образовался многогранник P, для которого все a_i^q были бы просто связными.

ВТОРОЕ ДОПОЛНЕНИЕ К «ANALYSIS SITUS»*

Введение

Я опубликовал в «Journal de l'École Polytechnique» работу, озаглавленную «Analysis situs», и еще раз обратился к той же проблеме в мемуаре, носящем название «Дополнение к „Analysis situs"», который был опубликован в «Rendiconti del Circolo matematico di Palermo».

Однако вопрос далеко не исчерпан и мне без сомнения придется еще несколько раз возвращаться к нему. Теперь же я ограничусь некоторыми рассмотрениями, цель которых упростить, прояснить и дополнить полученные ранее результаты.

§ 1. Напоминание основных определений

Рассмотрим замкнутое многообразие p измерений. Мы допустим, что это многообразие было подразделено так, что образовался полиэдр P p измерений. Элементы этого полиэдра обозначаются a_i^p; они отделены друг от друга многообразиями $p-1$ измерений, которые обозначаются a_i^{p-1}; последние отделены один от другого многообразиями $p-2$ измерений и так далее до вершин полиэдра, которые обозначаются a_i^0.

Все эти многообразия просто связны, т. е. гомеоморфны гиперсфере.

Если полная граница многообразия a_i^q состоит из многообразий a_j^{q-1}, то я записываю конгруенцию

$$a_i^q \equiv \sum \varepsilon_{i,\, j}^q a_j^{q-1}, \tag{1}$$

где ε равны 0, +1 или —1 (Доп., § 2, стр. 553).

С другой стороны, мы записываем гомологию

$$\sum \varepsilon_{i,\, j}^q a_j^{q-1} \sim 0. \tag{2}$$

Мы будем комбинировать между собой конгруенции (1) и гомологии (2) с помощью сложения, вычитания, умножения и иногда деления.

Среди конгруенций между a_i^q и a_i^{q-1}, полученных комбинацией конгруенций вида (1), мы будем отличать те, которые содержат только a_i^q и в которых a_i^{q-1} отсутствуют.

---

* Proceedings of the London Mathematical Society, t. 32, p. 277—308 (14 june 1900).

Мы будем называть иногда a_i^0 вершинами, a_i^1 ребрами, a_i^2 гранями, a_i^3 клетками и a_i^4 гиперклетками.

Полиэдру P отвечает взаимный полиэдр P' (Доп., § 7), элементы которого будут называться b_i^p вместо a_i^p, b_i^{p-1} вместо a_i^{p-1}, ..., и, наконец, b_i^0 вместо a_i^0. Между двумя полиэдрами имеется соответствие, при котором b_i^{p-q} отвечает a_i^q. Оба полиэдра получаются подразделением одного и того же многообразия V.

Между элементами P' мы имеем конгруенции

$$b_i^q \equiv \sum \varepsilon_{j,\,i}^{p-q+1} b_j^{q-1}, \tag{1bis}$$

аналогичные конгруенциям (1); мы можем равным образом написать

$$b_i^q \equiv \sum \varepsilon'^q_{i,\,j}\, b_j^{q-1},$$

положив

$$\varepsilon_{j,\,i}^{p-q+1} = \varepsilon'^q_{i,\,j}.$$

Между элементами P и P' мы имеем еще другое соотношение.

Вспомним обозначение $N(V, V')$ (§ 9, стр. 485). Тогда мы имеем

$$N(a_k^q,\ b_i^{p-q}) = 0,$$

если i не равно k, и

$$N(a_i^q,\ b_i^{p-q}) = \pm 1.$$

Остается еще посмотреть, какой нужно взять знак: $+$ или $-$.

Чтобы выяснить это, рассмотрим два соответствующих элемента P и P', которые я обозначу a_i^q и b_i^{p-q}; рассмотрим, с другой стороны, два соответствующих элемента a_j^{q-1} и b_j^{p-q+1} таким образом, что a_j^{q-1} принадлежит a_i^q, а b_i^{p-q} принадлежит b_j^{p-q+1}.

Я всегда могу выбрать координаты так, чтобы уравнениями a_i^q были

$$F_1 = F_2 = \ldots = F_{p-q} = 0, \tag{3}$$

где F — функции координат $y_1, \ldots, y_p$, определяющих положение точки на многообразии V.

Пусть также

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \ldots = \Phi_{q-1} = 0 \tag{4}$$

— уравнения b_j^{p-q+1}, тогда можно допустить, что уравнения a_j^{q-1} получаются присоединением к уравнениям (1) уравнения $\psi = 0$ и что уравнения b_i^{p-q} получаются присоединением к (2) уравнения $\psi = 1$. Всегда можно добиться, чтобы та же функция ψ стояла в левых частях обоих этих уравнений.

Тогда среди неравенств, которые вместе с уравнениями (1) вполне определяют a_i^p, должно находиться неравенство

$$\psi > 0.$$

Точно так же среди неравенств, которые вместе с уравнениями (2) вполне

определяют b_j^{p-q+1}, должно находиться неравенство

$$\psi < 1.$$

Если мы желаем, чтобы $\varepsilon_{i,j}^q$ равнялось $+1$, нужно, в силу наших соглашений, чтобы уравнения a_j^{q-1} шли в следующем порядке:

$$F_1 = F_2 = \ldots = F_{p-q} = \psi = 0,$$

и если мы желаем в то же время, чтобы $\varepsilon'^{p-q+1}_{j,i} = +1$, нужно, чтобы уравнения b_i^{p-q} шли в таком порядке:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \ldots = \Phi_{q-1} = 1 - \psi = 0.$$

Число $N(a_i^q, b_i^{p-q})$ зависит от знака функционального детерминанта системы функций

$$F_1, F_2, \ldots, F_{p-q}, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{q-1}, 1-\psi,$$

а число $N(a_j^{q-1}, b_j^{p-q+1})$ зависит от знака функционального детермината системы функций

$$F_1, F_2, \ldots, F_{p-q}, \psi, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{q-1}.$$

Всегда можно допустить, что функции F, Φ и ψ были выбраны таким образом, что эти детерминанты не обращаются в нуль в рассматриваемой области. Мы видим тогда, что оба детерминанта имеют один и тот же знак, если число q четно, и противоположные знаки, если q нечетно.

В первом случае мы будем иметь

$$N(a_i^q, b_i^{p-q}) = N(a_j^{q-1}, b_j^{p-q+1}),$$

а во втором случае

$$N(a_i^q, b_i^{p-q}) = -N(a_j^{q-1}, b_j^{p-q+1}).$$

Так как мы всегда можем предположить, что

$$N(a_i^0, b_i^p) = +1,$$

то последовательно найдем

$$N(a_i^1, b_i^{p-1}) = -1,\quad N(a_i^2, b_i^{p-2}) = -1,\quad N(a_i^3, b_i^{p-3}) = +1,\quad N(a_i^4, b_i^{p-4}) = +1.$$

Требуется запомнить лишь, что число $N(a_i^q, b_i^{p-q})$ зависит только от q.

Установив это, образуем из чисел $\varepsilon_{i,j}^q$ таблицу, которую я обозначу T_q и в которой число $\varepsilon_{i,j}^q$ занимает i-ю строку и j-й столбец. В такой таблице будет столько строк, сколько имеется элементов a_i^q, и столько столбцов, сколько имеется элементов a_j^{q-1}.

Я обозначал прежде через α_q число элементов a_i^q, так что таблица T_q будет иметь α_q строк и α_{q-1} столбцов. В частности, таблица T_1 даст соотношение между ребрами и вершинами, таблица T_2 — между гранями и ребрами и т. д.

Через T'_q я обозначу таблицу, которая образована, исходя из P', так же, как T_q образована, исходя из P. Мы видим, что таблица T'_q получается из T_{p-q+1} взаимной перестановкой строк и столбцов.

Мы обозначили (Доп., § 3, стр. 559) через $\alpha_q - \alpha'_q$ число различных гомологий между a_i^q и через $\alpha_q - \alpha''_q$ — число различных конгруенций между a_i^q (в которых a_j^{q-1} отсутствуют), а через

$$P_q = \alpha'_q - \alpha''_q + 1$$

— число Бетти, отвечающее элементам α_i^q.

Через β_q, β'_q и β''_q мы обозначим числа, аналогичные числам α_q, α'_q и α''_q и относящиеся к полиэдру P' так, что

$$\beta_q = \alpha_{p-q}.$$

§ 2. Приведение таблиц

Рассмотрим таблицу T, образованную целыми числами, которые упорядочены некоторым образом в строки и столбцы. Таковы, например, наши таблицы T_q.

Допустим, что над этой таблицей мы можем проделывать следующие операции:

1) добавлять один столбец к другому или вычитать один столбец из другого;

2) переставлять два столбца и менять при этом у одного из них знак;

3) те же операции над строками.

Комбинируя эти операции, можно подвергнуть столбцы произвольной линейной подстановке, лишь бы коэффициенты этой подстановки были целыми, а детерминант равен $+1$. То же касается и строк.

Каков наиболее простой вид, к которому можно привести нашу таблицу? Это мы собираемся теперь выяснить.

Допустим сперва, для определенности, что таблица T имеет строк не больше, чем столбцов.

Л е м м а I. Пусть

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}$$

— таблица T, в которой для определенности я взял три строки и пять столбцов.

Я предполагаю, что пятнадцать чисел a, b и c взаимно просты, и утверждаю, что всегда можно найти три числа α_1, β_1, γ_1 так, что пять чисел

$$h_{1,i} = \alpha_1 a_i + \beta_1 b_i + \gamma_1 c_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

взаимно просты.

Это накладывает на числа α_1, β_1, γ_1 прежде всего такое условие: они должны быть взаимно простыми между собой. Если это условие выполнено, всегда можно найти шесть других чисел α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3 так, что детерминант

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1.$$

Положим тогда

$$h_{k,i} = \alpha_k a_i + \beta_k b_i + \gamma_k c_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5;\ k = 1,\ 2,\ 3).$$

Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Правило умножения детерминантов даст нам

$$\begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} \\ h_{3,1} & h_{3,2} & h_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta.$$

Это показывает, что наибольший общий делитель трех чисел $h_{1,1}$, $h_{1,2}$, $h_{1,3}$ и, значит, также пяти чисел $h_{1,i}$, делит Δ. Он должен также делить все детерминанты, полученные отбрасыванием двух столбцов в таблице и, значит, наибольший общий делитель M всех этих детерминантов. Пусть p — произвольный простой делитель M. Поскольку наши пятнадцать чисел a, b, c взаимно просты, одно из них по крайней мере, например c_5, не делится на p.

Если мы положим тогда

$$\alpha_1 \equiv 0, \qquad \beta_1 \equiv 0, \qquad \gamma_1 \equiv c_5^{p-2} \pmod{p}, \tag{1}$$

то получим

$$h_{1,5} \equiv c_5^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

так, что наибольший делитель чисел $h_{1,i}$ не будет делиться на p.

Систему сравнений, аналогичную (1), мы получим для каждого простого делителя M. Всем этим сравнениям можно удовлетворить сразу, поскольку они берутся по различным простым модулям.

Тогда наибольший общий делитель пяти чисел $h_{1,i}$ не будет делиться ни на какой из простых делителей M и, поскольку он должен делить M, он равен 1.

1-е следствие. Если строки таблицы подвергнуть линейной подстановке

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3, \end{matrix}$$

то, очевидно, элементами i-го столбца, которыми были

$$a_i, \quad b_i, \quad c_i,$$

станут

$$h_{1,i}, \quad h_{2,i}, \quad h_{3,i},$$

откуда получается такое следствие.

Если элементы таблицы взаимно просты, то таблицу можно привести к такому виду, чтобы элементы первой строки были взаимно простыми.

2-е следствие. *Если элементы таблицы имеют общим наибольшим делителем δ, то таблицу можно привести к такому виду, что элементы первой строки будут иметь общим наибольшим делителем δ.*

Теорема. *Пусть m — число столбцов и n — число строк ($m > n$), пусть M_0 — наибольший общий делитель всех детерминантов, полученных после отбрасывания из таблицы по $m-n$ произвольных столбцов, пусть M_1 — наибольший общий делитель всех детерминантов, полученных отбрасыванием из таблицы по $m-n+1$ столбцов и одной строки; пусть M_2 получен таким же образом, отбрасыванием по $m-n+2$ столбцов и двух строк и т. д.; наконец, пусть M_{n-1} получен отбрасыванием по $m-1$ столбцов и по $n-1$ строк, т. е. является общим наибольшим делителем всех элементов.*

Эти числа $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ не изменяются в результате наших операций, примененных как к строкам, так и к столбцам.

Само собой разумеется, что число M_k нужно считать нулем, если все соответствующие детерминанты нули.

Мы можем теперь сформулировать наше следствие таким образом.

3-е следствие. *Таблицу можно привести к такому виду, что общий наибольший делитель элементов первой строки будет M_{n-1}.*

Лемма II. *С помощью операций над столбцами таблицу можно привести к такому виду, что в первой строке первый элемент будет M_{n-1}, а остальные — нули.*

Действительно, мы подвергнем столбцы (которых, как и раньше, пять) линейной подстановке

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \beta_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \beta_5 \\ \gamma_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \gamma_5 \\ \delta_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \delta_5 \\ \zeta_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \zeta_5 \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

детерминант которой есть 1. Пусть

$$a_1,\ a_2\ a_3,\ a_4,\ a_5$$

— элементы первой строки. После уже проведенной редукции наибольший общий делитель этих пяти чисел стал M_{n-1}. Мы можем тогда выбрать подстановку (2) таким образом, чтобы

$$\sum \alpha_i a_i = M_{n-1}, \qquad \sum \beta_i a_i = \sum \gamma_i a_i = \sum \delta_i a_i = \sum \zeta_i a_i = 0.$$

Тогда после преобразования элементами первой строки будут

$$M_{n-1},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$$

Лемма III. *Я утверждаю теперь, что с помощью преобразования, проведенного только над строками, можно свести к нулю все элементы первого столбца, кроме первого элемента, который остается равным* M_{n-1}.

В самом деле, после уже проведенных упрощений элементы первого столбца (взятые в числе $n=3$) суть

$$M_{n-1},\ q_2 M_{n-1},\ q_3 M_{n-1},$$

где q_2 и q_3 — целые, поскольку, согласно нашим допущениям, все наши элементы делятся на M_{n-1}.

Тогда, если из второй строки вычесть первую строку, умноженную на q_2, и из третьей строки первую строку, умноженную на q_3, то первый столбец становится таким:

$$M_{n-1},\ 0,\ 0,$$

причем первая строка не меняется.

Если теперь выбросить из таблицы T первую строку и первый столбец, то останется таблица T' из $m-1$ столбцов и $n-1$ строк, относительно которой числа

$$\frac{M_0}{M_{n-1}},\ \frac{M_1}{M_{n-1}},\ \ldots$$

будут играть ту же роль, что числа M_0, M_1, ... по отношению к таблице T.

В частности, общий наибольший делитель элементов T' есть $\frac{M_{n-2}}{M_{n-1}}$.

Мы можем теперь продолжить приведение, но действуя только на последние $m-1$ столбцов и последние $n-1$ строк. Первая строка при этом не изменится, поскольку ее последние $m-1$ элементов нули, и также первый столбец, поскольку его последние $n-1$ элементов нули.

С таблицей T' мы можем действовать так же, как действовали с таблицей T; и после этого приведения:

1. Все элементы первой строки и первого столбца остаются нулями, кроме первого элемента в первом столбце и первой строке, который остается равным M_{n-1}.

2. Все элементы второй строки и все элементы второго столбца становятся нулевыми, кроме второго элемента во второй строке и во втором столбце, который становится равным $\frac{M_{n-2}}{M_{n-1}}$.

3. Если отбросить две первые строки и два первых столбца, то получится матрица T'' из $m-2$ столбцов и $n-2$ строк, по отношению к которой числа

$$\frac{M_0}{M_{n-2}}, \quad \frac{M_1}{M_{n-2}}, \quad \ldots, \quad \frac{M_{n-3}}{M_{n-2}}$$

играют ту же роль, что и числа M_0, $M_1, \ldots, M_{n-1}$ по отношению к таблице T. И так далее.

В результате элемент, принадлежащий i-й строке и j-му столбцу, становится нулем, если i не равно j, а элемент, принадлежащий i-й строке и j-му столбцу, становится равным $\frac{M_{n-i}}{M_{n-i+1}}$.

Все n чисел

$$M_{n-1}, \quad \frac{M_{n-2}}{M_{n-1}}, \quad \frac{M_{n-3}}{M_{n-2}}, \quad \ldots, \quad \frac{M_1}{M_2}, \quad \frac{M_0}{M_1}$$

могут быть названы *инвариантами* таблицы T.

Можно отметить:

1) что каждый из инвариантов делит следующий;

2) что некоторые из инвариантов могут быть нулями, но если один из них нуль, то это же верно и для последующих.

Если бы таблица T имела больше строк, чем столбцов, то редукция проводилась бы точно таким же образом, только пришлось бы поменять роли строк и столбцов.

Мы имели бы тогда, что $m<n$, число M_0 было бы наибольшим общим делителем детерминантов, полученных отбрасыванием $n-m$ строк, вообще, M_i был бы наибольшим общим делителем детерминантов, полученных отбрасыванием произвольных $n-m+i$ строк и i столбцов. Наконец, наибольший общий делитель элементов таблицы T был бы равен M_{m-1}.

Вообще, число инвариантов равно наименьшему из чисел n и m.

§ 3. Сравнение таблиц T_q и T'_q

Таблица T_q дает нам сведения о соотношениях между a_i^q и a_j^{q-1} в полиэдре P. Каждой строке этой таблицы соответствует конгруенция

$$a_i^q \equiv \sum \varepsilon_{i,j}^q a_j^{q-1} \tag{1}$$

между a_i^q и a_j^{q-1} и гомология

$$\sum \varepsilon_{i,j}^q a_j^{q-1} \sim 0 \tag{2}$$

между a_j^{q-1}.

Что теперь произойдет, если таблицу T_q подвергнуть операциям предыдущего параграфа? Каждой строке преобразованной таблицы будет отвечать линейная комбинация a_i^q, каждому столбцу — линейная комбинация a_j^{q-1}. Я уже объяснял (Доп., § 8, стр. 580), согласно каким правилам эти линейные комбинации должны браться. Вот как эти правила могут быть резюмированы.

Допустим, что для того чтобы перейти от таблицы T_q к преобразованной таблице, нужно применить к строкам некоторую линейную подстановку S, а к столбцам — подстановку σ. Пусть σ' — контрагредиентная для σ подстановка (это означает, что если даны два ряда переменных из α_{q-1} элементов x_i и y_i каждый и если σ применяется к первому ряду, а σ' — ко второму, то форма $\sum x_i y_i$ остается неизменной).

Допустим тогда, что S переводит a_i^q в

$$c_i^q = \sum_{j=1}^{\alpha_q} \lambda_{i,j} a_j^q$$

и что σ' переводит a_i^{q-1} в

$$d_i^{q-1} = \sum_{i=1}^{\alpha_{q-1}} \mu_{i,j} a_j^{q-1}.$$

Линейная комбинация c_i^q отвечает i-й строке, а линейная комбинация d_i^{q-1} i-му столбцу преобразованной таблицы.

В нашей приведенной таблице все элементы нули, кроме тех элементов, стоящих в i-й строке и i-м столбце, которые задаются, согласно предыдущему параграфу, формулой

$$\frac{M_{n-i}}{M_{n-i+1}}.$$

Я обозначаю для краткости через ω_i^q этот элемент в i-й строке и i-м столбце и принимаю, что этот элемент есть нуль, если i больше, чем меньшее из двух чисел α_q и α_{q-1} (число строк и число столбцов).

Тогда i-й строке приведенной таблицы будет отвечать конгруенция

$$c_i^q \equiv \omega_i^q d_i^{q-1} \tag{1bis}$$

и гомология

$$\omega_i^q d_i^{q-1} \sim 0. \tag{2bis}$$

Конгруенции и гомологии (1bis) и (2bis) могут быть выведены из конгруенций и гомологий (1) и (2) с помощью сложения, вычитания и умножения, *но без деления*, и также обратно.

Если $\alpha_{q-1} > \alpha_q$ и если $i > \alpha_q$, то ω_i^q есть нуль, так что конгруенция и гомология (1bis) и (2bis) сводятся к

$$c_i^q \equiv 0 \text{ и } 0 \sim 0.$$

Числа ω_i^q являются тем, что в предыдущем параграфе я назвал инвариантами таблицы T_q. Допустим, что *среди этих инвариантов* γ_q *отличны от нуля*. Конечно, мы будем иметь

$$\gamma_q \leqslant \alpha_q, \quad \gamma_q \leqslant \alpha_{q-1}.$$

В первые γ_q среди конгруенций (1bis) входят и c_i^q и d_i^{q-1}, поскольку ω_i^q не нуль. Напротив, последние $\alpha_q - \gamma_q$ этих конгруенций запишутся как

$$c_i^q \equiv 0$$

и не будут больше содержать a_i^{q-1}; ясно, что все эти конгруенции различны и что таким путем получатся все конгруенции между элементами a_i^q, в которых отсутствуют элементы a_i^{q-1}. Следовательно,

$$\alpha_q - \alpha_q'' = \alpha_q - \gamma_q, \quad \alpha_q'' = \gamma_q.$$

Теперь среди гомологий (2bis) $\alpha_q - \gamma_q$ последних сводятся к тождеству, но γ_q первых различны; мы имеем, следовательно,

$$\alpha_{q-1} - \alpha_{q-1}' = \gamma_q,$$

откуда число Бетти

$$P_q = \alpha_q - \gamma_{q+1} - \gamma_q + 1.$$

Сравним теперь таблицу T_q с соответствующей таблицей T_{p-q+1}, взятой по отношению к взаимному полиэдру P'. Эта таблица, которая получается из T_q перестановкой строк и столбцов, имеет $\beta_{p-q+1} = \alpha_{q-1}$ строк и $\beta_{p-q} = \alpha_q$ столбцов. Число γ_q одно и то же для обеих таблиц, так что

$$\beta_{p-q+1}'' = \gamma_q = \alpha_q'', \quad \beta_{p-q} - \beta_{p-q}' = \gamma_q, \quad \beta_{p-q}' = \beta_{p-q} - \gamma_q = \alpha_q - \alpha_q'',$$

откуда

$$\beta_{p-q+1}' = \alpha_{q-1} - \gamma_{q-1},$$

и для числа Бетти P_{p-q+1}' полиэдра P' получаем

$$P_{p-q+1}' = \beta_{p-q+1}' - \beta_{p-q+1}'' + 1 = \alpha_{q-1} - \gamma_{q-1} - \gamma_q + 1.$$

Мы выводим отсюда:

$$P_{p-q}' = P_q,$$

что, если вспомнить равенство чисел Бетти взаимных полиэдров P и P', показывает, что числа Бетти, равноотстоящие от двух крайних размерностей, равны.

Обратимся снова к гомологиям (2bis). Если допустить, что мы имеем право делить эти гомологии на числа, отличные от нуля, то γ_q первых гомологий дадут

$$d_i^{q-1} \sim 0 \qquad (i = 1,\ 2, \ldots, \gamma_q),$$

и самая общая гомология между a_j^{q-1} запишется как

$$\sum_{i=1}^{\gamma_q} \lambda_i d_i^{q-1} \sim 0, \tag{3}$$

где λ_i — произвольные целые. Если же, напротив, не допускать возможности деления гомологий, то самая общая гомология запишется как

$$\sum_{i=1}^{\gamma_q} \lambda_i \omega_i^q d_i^{q-1} \sim 0, \tag{4}$$

где λ_i — целые. Для того чтобы два определения чисел Бетти (Доп., § 1, стр. 549) совпадали, необходимо и достаточно, чтобы обе формулы (3) и (4) были согласованы, т. е. чтобы все инварианты ω_i^q, отличные от нуля, равнялись 1 (Доп., § 9, стр. 585).

Обратимся теперь к линейным комбинациям a_i^{q-1}, которые гомологичны нулю в силу гомологий (3), и зададим вопрос, какие среди этих комбинаций останутся различными, если, оставляя гомологии (3) в стороне, ограничиться гомологиями (4), не допуская возможности деления гомологий.

Сразу же видно, что число этих выражений, которые останутся различными, есть в точности произведение

$$\omega_1^q \omega_2^q \ldots \omega_{\gamma_q}^q.$$

Обращаясь же к обозначениям предыдущего параграфа, мы видим, что это произведение есть не что иное, как один из членов последовательности

$$M_0,\ M_1,\ M_2, \ldots,$$

а именно, первый член этой последовательности, отличный от нуля (Доп., § 9, стр. 585).

Из сказанного видно, как важно различать два вида многообразий:

Многообразиями первого вида, которые я назову *многообразиями без кручения*, будут те, для которых инварианты всех таблиц T_q равны все 0 или 1, для которых, тем самым, формулы (3) и (4) совпадают и оба определения чисел Бетти согласованы.

Многообразиями второго вида, которые я назову *многообразиями с кручением*, будут те, для которых некоторые из этих инвариантов не равны 0 или 1 и для которых, следовательно, два определения чисел Бетти не

согласованы. В этом случае мы будем всегда исходить, если противное не оговорено, из второго определения (Доп., § 1).

Это название оправдывается тем, что присутствие инвариантов, бóльших 0 и 1, вызвано, как мы увидим дальше, обстоятельством, которое можно уподобить настоящему скручиванию многообразия.

§ 4. Применение к некоторым примерам

Желая применить предшествующее к примерам, приведенным в «Analysis situs» (стр. 493 и дальше), я должен сначала указать на различие между несколькими видами полиэдров. Обычными полиэдрами или полиэдрами первого вида, будут те, для которых все a_i^q просто связны (гомеоморфны гиперсфере) и такие, что все элементы каждого a_i^q различны; например, в обычном пространстве тетраэдр будет полиэдром первого вида, так как он допускает четыре грани, которые есть треугольники и, следовательно, просто связные многоугольники (гомеоморфные кругам) и так как у каждого из этих треугольников три его стороны различны, так же как и три его вершины.

Полиэдрами второго вида будут те, у которых все a_i^q просто связны, но не все элементы этих a_i^q обязательно различны. Возьмем, например, в обычном пространстве тор, через точку A на поверхности этого тора проведем меридиан и параллель. Эти два разреза не разбивают поверхности тора на две области, но делают его просто связным. Полученная таким образом поверхность будет гомеоморфна прямоугольнику, два противоположных ребра которого будут соответствовать двум сторонам меридионального разреза, а два другие — двум сторонам разреза по параллели. Тем самым тор относится к полиэдрам, имеющим только одну грань, эта грань — четырехугольник и, значит, она просто связна; но четыре стороны этого четырехугольника не все различны: две совпадают с разрезом по меридиану и две — с разрезом по параллели. Точно так же четыре вершины не являются различными, поскольку они совпадают с точкой A. Полиэдр, определенный таким образом, есть полиэдр второго вида.

Наконец, полиэдрами третьего вида будут те, для которых не все a_i^q просто связны.

Свойства полиэдров первого вида в значительной степени распространяются на полиэдры второго вида. Отметим, однако, отличие. В полиэдре первого вида каждый a_j^{p-1} отделяет один от другого два элемента a_i^p и не принадлежит ни к какому третьему a_i^p. Следовательно, в каждом столбце таблицы T_p будут стоять числа $\varepsilon_{i,j}^p$, из которых одно равно $+1$, другое -1, а все остальные — нули.

В полиэдре второго вида это не так. Может случиться, что два из a_j^{p-1}, принадлежащих тому же самому a_i^p, не различны. В этом случае, пройдя через a_j^{p-1}, мы снова окажемся в том же a_i^p, где были до этого перехода. Так

обстоит дело, например в торе, который имел только одну грань; после перехода через меридиональный разрез, например, мы снова оказываемся все в той же единственной грани, где были до перехода. В таком случае получается, что элемент a_j^{p-1} принадлежит только одному a_i^p и, более того, он два раза примыкает к тому же самому a_i^p: один раз прямым образом, а другой — обратным, так как оба случая взаимно компенсируются и соответствующее число $\varepsilon_{i,j}^p$ равно нулю. В этом случае все числа $\varepsilon_{i,j}^p$, которые фигурируют в соответствующем столбце таблицы T_p, равны нулю.

В наших примерах (стр. 493 и дальше) замкнутые многообразия трех измерений, которые там рассматриваются, можно представлять себе как полиэдры второго вида. Каждый из этих полиэдров имеет единственную клетку, которая в первом, третьем и четвертом примерах является кубом, а в пятом октаэдром, но грани этой клетки склеены попарно.

1-й пример:

1-я грань	$ABDC=A'B'D'C'$,	1-е ребро	$AB=CD=A'B'=C'D'$;
2-я »	$ACC'A'=BDD'B'$,	2-е »	$AC=BD=A'C'=B'D'$;
3-я »	$CDD'C'=ABB'A'$,	3-е »	$AA'=BB'=CC'=DD'$.

Одна клетка и одна вершина.

Все три таблицы T_1, T_2, T_3 состоят только из нулей. Следовательно, все их инварианты — нули.

3-й пример:

1-я грань	$ABDC=B'D'C'A'$,	1-е ребро	$AB=B'D'=C'C$;
2-я »	$ABB'A'=C'CDD'$,	2-е »	$AC=DD'=B'A'$;
3-я »	$ACC'A'=DD'B'B$,	3-е »	$AA'=C'D'=DB$;
		4-е »	$CD=BB'=A'C'$;
1-я вершина	$A=B'=C'=D$	2-я вершина	$B=D'=A'=C$.

Таблица T_3
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Таблица T_2
$$\begin{vmatrix} +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Таблица T_1
$$\begin{vmatrix} +1 & -1 \\ +1 & -1 \\ +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{vmatrix}$$

Таблица T_3 имеет только один инвариант, равный нулю; таблица T_1 имеет два инварианта, равные 0 и 1; таблица T_2 — три, равные 1, 2 и 2.

4-й пример:

1-я грань	$ABDC=B'D'C'A'$,	1-е ребро	$AA'=CC'=BB'=DD'$;
2-я »	$ABB'A'=CDD'C'$,	2-е »	$AB=CD=B'D'=A'C'$;
3-я »	$ACC'A'=BDD'B'$,	3-е »	$AC=BD=D'C'=B'A'$.

Одна клетка и одна вершина.

Таблица T_3

$$|0\ \ 0\ \ 0|$$

Таблица T_2

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & -1 \end{vmatrix}$$

Таблица T_1

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Таблицы T_3 и T_1 имеют только по одному инварианту, равному нулю; таблица T_2 имеет три инварианта, которые равны 1, 2 и 0.

5-й пример:

1-я грань	$ABC = FED$,	1-е ребро	$AB = FE$,	1-я вершина	$A = F$;
2-я »	$ACE = FDB$,	2-е »	$AC = FD$,	2-я »	$B = E$;
3-я »	$ADB = FCE$,	3-е »	$AE = FB$;	3-я »	$C = D$;
4-я »	$AED = FBC$,	4-е »	$AD = FC$;		
		5-е »	$BC = ED$;		
		6-е »	$CE = DB$.		

Таблица T_3

$$|0\ \ 0\ \ 0\ \ 0|$$

Таблица T_2

$$\begin{vmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 \end{vmatrix}$$

Таблица T_1

$$\begin{vmatrix} +1 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & 0 \\ +1 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & -1 \\ 0 & -1 & +1 \end{vmatrix}$$

Инварианты таковы:

0 для T_3; 2, 1, 1 и 1 для T_2; 0, 1 и 1 для T_1.

Перейдем теперь к шестому примеру (стр. 507).

Как мы уже видели (§ 14, стр. 510), фундаментальные эквивалентности записываются следующим образом:

$$C_1 + C_2 \equiv C_2 + C_1,$$
$$C_1 + C_3 \equiv C_3 + \alpha C_1 + \gamma C_2,$$
$$C_2 + C_3 \equiv C_3 + \beta C_1 + \delta C_2.$$

Чтобы записать гомологии, которые выводятся из фундаментальных гомологий с помощью сложения и умножения, *но без деления*, достаточно позволить себе изменять порядок членов в каждом из двух членов в этих фундаментальных эквивалентностях. Это дает:

$$0 \sim 0; \quad (\alpha - 1) C_1 + \gamma C_2 \sim 0; \quad \beta C_1 + (\delta - 1) C_2 \sim 0.$$

Детерминант

$$(\alpha - 1)(\delta - 1) - \beta\gamma$$

равен

$$2 - \alpha - \delta.$$

Пусть, с другой стороны, μ — общий наибольший делитель четырех чисел

$$\alpha-1, \quad \delta-1, \quad \beta, \quad \gamma;$$

тогда изучение гомологий, которые мы только что выписали, показывает, что два инварианта таблицы T_2, которые отличны от 0 и 1, равны

$$\mu \quad \text{и} \quad \frac{2-\alpha-\delta}{\mu}$$

(число μ может, впрочем, равняться 1).

Что же касается инвариантов таблиц T_1 и T_3, то они все, как мы это увидим дальше, равны 0 или 1.

Пусть, например,

$$\alpha=-1, \quad \beta=1, \quad \gamma=-1, \quad \delta=0.$$

Тогда

$$\mu=1, \qquad 2-\alpha-\delta=3,$$

так что один из наших инвариантов равен 3, а другой 1.

Это, впрочем, можно получить и с помощью таблицы T_2. Пусть

$$(x+1,\ y,\ z), \qquad (x,\ y+1,\ z), \qquad (-x+y,\ -x,\ z+1)$$

— три подстановки группы G, которые я обозначу S_1, S_2 и S_3 и которые отвечают трем фундаментальным контурам C_1, C_2, C_3 (§ 13, стр. 507).

Можно считать, что изученное многообразие порождается кубом $ABCDA'B'C'D'$ (§ 10, стр. 493). Но грань $ABCD$ нужно разложить на два треугольника ABD и ACD так же, как грань $A'B'C'D'$ на два треугольника $D'A'B'$ и $C'D'A'$.

Легко видеть, что грань $ABB'A'$ переводится в грань $CDD'C'$ подстановкой S_2, грань $ACC'A'$ — в грань $BDD'B'$ подстановкой S_1, грань ABD — в $D'A'B'$ подстановкой $S_3S_1S_2$ и грань ACD — в $C'D'A'$ подстановкой S_3S_2.

Наш полиэдр имеет таким образом:

1) единственную клетку;

2) четыре грани, а именно:

1-я грань	$ABB'A'=CDD'C'$,
2-я »	$ACC'A'=BDD'B'$,
3-я »	$ABD=D'A'B'$,
4-я »	$ACD=C'D'A'$;

3) четыре ребра, а именно:

1-е ребро	$AA'=BB'=CC'=DD'$,
2-е »	$AB=CD=D'A'$,
3-е »	$AC=BD=C'D'=A'B'$,
4-е »	$AD=C'A'=D'B'$;

4) единственную вершину.

Таблицы T_1 и T_3 целиком состоят из нулей.

Таблица T_2 такова:

$$\begin{vmatrix} 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & +1 & -1 \end{vmatrix}$$

Инварианты этой таблицы равны 1, 1, 3, 0.

Перейдем теперь к примеру Хегора. Пусть x_1, x_2, y_1, y_2 — координаты точки в пространстве шести измерений; пусть

$$x = x_1 + x_2\sqrt{-1} = |x|\, e^{\xi\sqrt{-1}},$$

$$y = y_1 + y_2\sqrt{-1} = |y|\, e^{\eta\sqrt{-1}},$$

$$z = z_1 + z_2\sqrt{-1} = |z|\, e^{\zeta\sqrt{-1}}.$$

Уравнениями нашего многообразия будут

$$z^2 = xy, \qquad x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1,$$

откуда

$$|z^2| = |xy|, \qquad \zeta = \frac{\xi + \eta}{2}, \qquad |x^2 + y^2| = 1.$$

Чтобы получить многообразие все целиком, нужно проварьировать

1) $|x|$ от 0 до 1, что в то же время заставляет $|y|$ меняться от 1 до 0;

2) η от 0 до 2π;

3) $\xi + \eta$ от 0 до 4π.

Полиэдр, который при этом получается, имеет единственную клетку, определенную неравенствами $0 < |x| < 1$, $0 < \eta < 2\pi$, $0 < \xi + \eta < 4\pi$. Он имеет две грани, определенные следующими соотношениями:

1-я грань

$$\eta = 0, \qquad 0 < |x| < 1, \qquad 0 < \xi < 4\pi;$$

эта грань совпадает со следующей:

$$\eta = 2\pi, \qquad 0 < |x| < 1, \qquad -2\pi < \xi < 2\pi.$$

2-я грань

$$\xi + \eta = 0, \qquad 0 < |x| < 1, \qquad 0 < \eta < 2\pi;$$

эта грань совпадает со следующей:

$$\xi + \eta = 4\pi, \qquad 0 < |x| < 1, \qquad 0 < \eta < 2\pi.$$

Он имеет три ребра, определенные следующими соотношениями:
1-е ребро

$$\xi = \eta = 0, \quad 0 < |x| < 1;$$

это ребро совпадает со следующими тремя:

$$\xi = 0, \quad \eta = 2\pi, \quad 0 < |x| < 1;$$
$$\xi = -2\pi, \quad \eta = 2\pi, \quad 0 < |x| < 1;$$
$$\xi = \eta = 2\pi, \quad 0 < |x| < 1;$$

2-е ребро

$$x_1 = x_2 = 0, \quad 0 < \eta < 2\pi;$$

3-е ребро

$$y_1 = y_2 = 0, \quad -2\pi < \xi < 0,$$

совпадающее со следующими двумя:

$$y_1 = y_2 = 0, \quad 0 < \xi < 2\pi;$$
$$y_1 = y_2 = 0, \quad 2\pi < \xi < 4\pi.$$

Наконец, он имеет две вершины, а именно:
1-я вершина

$$x_1 = x_2 = 0, \quad \eta = 0,$$

совпадающая со следующей:

$$x_1 = x_2 = 0, \quad \eta = 2\pi;$$

2-я вершина

$$y_1 = y_2 = 0, \quad \xi = -2\pi,$$

совпадающая с тремя следующими:

$$y_1 = y_2 = 0, \quad \xi = 0;$$
$$y_1 = y_2 = 0, \quad \xi = 2\pi;$$
$$y_1 = y_2 = 0, \quad \xi = 4\pi.$$

Таблица T_3 целиком состоит из нулей; что касается таблиц T_1 и T_2, то они имеют такой вид:

$$T_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & +2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad T_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Сразу видно, что инварианты равны 0, 2 и 1 для T_2 и 0 и 1 для T_1.

§ 5. Распространение на общий случай одной теоремы предыдущего дополнения

Я хотел бы вернуться к одному из вопросов, излагавшихся в одном из предыдущих мемуаров (Доп., § 10). Там рассматривался лишь случай $p=3$, и я хотел бы теперь показать, каким образом те же рассуждения можно распространить на общий случай. Дело в следующем.

Пусть даны два взаимных полиэдра P и P'; рассмотрим, с одной стороны, элементы a_i^q из P и, с другой стороны, элементы b_i^q из P'. Я допускаю, что имеется конгруенция

$$\sum \lambda_i \quad a_i^q \equiv 0 \tag{1}$$

между a_i^q, и утверждаю, что этой конгруенции можно поставить в соответствие другую конгруенцию между b_i^q

$$\sum \mu_i b_i^q \equiv 0, \tag{2}$$

причем таким образом, что получится гомология

$$\sum \lambda_i a_i^q \sim \sum \mu_i b_i^q. \tag{3}$$

Обратно, всякой конгруенции вида (2) можно поставить в соответствие конгруенцию вида (1) так, что первые члены этих двух конгруенций связаны гомологией (3).

Такова теорема, которую нам предстоит доказать. Я дал простое ее доказательство в случае $p=3$ и теперь задача состоит только в том, чтобы распространить это доказательство на общий случай. Я сделаю сначала одно замечание.

Рассмотрим конгруенции

$$a_i^q \equiv \sum \varepsilon_{i,j}^q a_j^{q-1}. \tag{4}$$

Мы знаем, что комбинируя их линейно, можно исключить из них a_j^{q-1} и получать конгруенции вида

$$\sum \zeta_i a_i^q \equiv 0. \tag{5}$$

Число различных конгруенций вида (5) есть как раз то, что мы обозначали $\alpha_q - \alpha_q''$.

Допустим теперь, что мы рассматриваем различные элементы a_i^h полиэдра P, где число h, обозначающее размерность, должно быть больше q и может равняться $q+1$, $q+2$, ..., $p-1$ или p. Мы даем раз навсегда этому числу определенное значение.

Разобьем конгруенции (4) на группы, помещая в одну и ту же группу две из этих конгруенций, если оба соответствующих a_i^q принадлежат одному и тому же a_i^h. Ясно, что групп будет столько же, сколько

имеется элементов a_i^h, и что одна и та же конгруенция может оказаться в нескольких группах, поскольку один элемент a_i^q входит в несколько a_i^h.

Комбинируя линейно конгруенции (4) из той же группы, мы можем исключать a_j^{q-1} и получать конгруенции вида

$$\sum \zeta_i' a_i^q \equiv 0. \tag{5bis}$$

Конгруенции (5bis) составляют, очевидно, часть конгруенций (5), поскольку эта последняя система состоит из всех различных конгруенций такого вида, которые можно получить комбинацией конгруенций (4).

Напротив, в системе (5) могут иметься конгруенции, которые не входят в систему (5bis). И действительно, мы получили эту последнюю систему, налагая ограничения на способы комбинирования конгруенций (4), поскольку мы можем комбинировать лишь конгруенции той же группы.

Я утверждаю прежде всего, что конгруенция (5bis) влечет гомологию

$$\sum \zeta_i' a_i^q \sim 0. \tag{6}$$

Действительно, конгруенция (5 bis) есть конгруенция между элементами полиэдра a_i^h и, *поскольку, согласно условию, полиэдр просто связный*, эта конгруенция должна повлечь за собой соответствующую гомологию.

Обратно, если имеется гомология (6), то соответствующая конгруенция будет частью системы (5bis). Действительно, раз гомология (6) имеет место между элементами полиэдра a_i^h, то соответствующая конгруенция, которую она влечет, должна выводиться из фундаментальных конгруенций вида (4) *относительно полиэдра* a_i^h, т. е. принадлежащих к той же группе.

Отсюда получается, что число различных конгруенций системы (5bis) равно $\alpha_q - \alpha_q'$.

Система (5bis) остается, таким образом, всегда той же самой, каково бы ни было значение, приписанное числу h.

Мы видим в то же время, что это рассмотрение позволило бы найти число Бетти P_q только из таблицы T_q, если бы нам было еще известно, принадлежат ли две конгруенции (4) к одной и той же группе или нет.

Введем теперь понятие, которое можно рассматривать как обобщение понятия пирамиды. Пусть a_q — область, принадлежащая к плоскому пространству P_q q измерений. Пусть b_m — область, принадлежащая другому плоскому пространству P_m m измерений. Допустим, что эти два плоских пространства не имеют общих точек. Тогда через них можно провести плоское пространство П $q+m+1$ измерений, причем только одно.

Теперь соединим прямыми каждую точку области a_q с каждой точкой области b_m. Множество этих прямых порождает область, принадлежащую

пространству П и имеющую $q+m+1$ измерений, которую я обозначу через $a_q b_m$ и которую я могу назвать обобщенной прямолинейной пирамидой.

Если область a_q сводится в действительности к плоскому многоугольнику ($q=2$), а область b_m — к точке ($m=0$), то область $a_q b_m$ сводится к обычной пирамиде с основанием a_q и вершиной b_m.

Всякая фигура, гомеоморфная обобщенной прямолинейной пирамиде, может быть названа обобщенной пирамидой.

Теперь рассмотрим элемент a_i^q полиэдра P и элемент b_j^m взаимного полиэдра P'; этот элемент b_j^m отвечает элементу a_j^{p-m} полиэдра P.

Я допускаю, что элемент a_i^q входит в элемент a_j^{p-m}; мы будем тогда иметь

$$q < p - m; \quad p \geqslant q + m + 1.$$

Замечу, кроме того, что всякая точка из b_j^m войдет в один из тех a_k^p, в которые входит a_j^{p-m}, и тем самым в один из тех a_k^p, в которые входит a_i^q. Достаточно это показать для вершин b_j^m. Но если b_k^0 — одна из этих вершин, то она лежит внутри a_k^p и поскольку b_k^0 принадлежит b_j^m, мы имеем, согласно самому определению взаимных полиэдров, что a_j^{p-m} принадлежит a_k^p.

Теперь мы можем определить внутри каждого a_k^p систему линий L так, чтобы через две произвольные внутренние точки этого a_k^p была проведена одна и только одна линия L. Система линий L обладает, таким образом, качественно теми же свойствами, что и система прямых. Это вытекает из того, что a_k^p по предположению просто связно.

Соединим теперь каждую из точек b_j^m с каждой из точек a_i^q одной из линий L, расположенных в том из a_k^p, которому принадлежат одновременно и a_i^q и рассматриваемая точка b_j^m.

Множество этих линий порождает фигуру, которую я обозначу $a_i^q b_j^m$ и которая будет гомеоморфна обобщенной пирамиде $q+m+1 \leqslant p$ измерений.

Какова граница этого многообразия $a_i^q b_j^m$?

Допустим, что имеются конгруенции

$$a_i^q \equiv \sum \varepsilon_{i,h}^q a_h^{q-1}; \quad b_j^m \equiv \sum \varepsilon_{j,k}^{\prime m} b^{m-1}.$$

Граница $a_i^q b_j^m$ составится из обобщенных пирамид $a_h^{q-1} b_i^m$ и $a_i^q b_k^{m-1}$, и мы получим

$$a_i^q b_j^m \equiv \sum \varepsilon_{i,h}^q a_h^{q-1} b_j^m + \sum \varepsilon_{j,k}^{\prime m} a^q b_k^{m-1}. \tag{7}$$

Это было бы неверно, если бы мы имели $m=0$. В этом случае многообразие a_i^q имело бы в действительности $q=(q+m+1)-1$ измерений;

оно должно было бы само войти в полную границу $a_i^q b_j^m$, и конгруенция (7) превратилась бы в такую:

$$a_i^q b_j^0 \equiv \sum \varepsilon_{i,h}^q a_h^{q-2} b_j^0 - a_i^q \tag{7bis}$$

(члены с ε' исчезают); точно так же для $q=0$ мы имели бы

$$a_i^0 b_j^m \equiv \sum \varepsilon'^m_{j,k} a_i^0 b_k^{m-1} + b_j^m. \tag{7ter}$$

Из конгруенций (7), (7bis) и (7ter) вытекают гомологии:

$$\sum \varepsilon_{i,h}^q a_h^{q-1} b_j^m \sim -\sum \varepsilon'^m_{j,k} a_i^q b_k^{m-1}, \tag{8}$$

$$a_i^q \sim \sum \varepsilon_{i,h}^q a_h^{q-1} b_j^0, \tag{8bis}$$

$$b_j^m \sim -\sum \varepsilon'^m_{j,k} a_i^0 b_k^{m-1}. \tag{8ter}$$

В конгруенции (8bis) предполагается, что a_i^q входит в a_j^p, именно эта конгруенция входила в наши рассмотрения в предыдущем доказательстве (Доп., § 10, стр. 586, (2)).

Допустим теперь, что мы нашли конгруенцию вида

$$\sum \lambda_{i,j}\, a_i^q b_j^m \equiv 0. \tag{9}$$

Я утверждаю, что мы можем найти конгруенции такого же вида, но с числом q, увеличенным на единицу, и с числом m, уменьшенным на единицу, причем левые члены обеих конгруенций будут гомологичны.

Действительно, в силу (7), мы имеем тождественно

$$\sum \lambda_{i,j} a_i^q b_j^m \equiv \sum \lambda_{i,j} \varepsilon_{i,h}^q a_h^{q-1} b_j^m + \sum \lambda_{i,j} \sum{}'^m_{j,k} a_i^q b_k^{m-1}.$$

Значит, мы имеем (приравнивая во втором члене коэффициент при $a_h^{q-1} b_j^m$ нулю), что

$$\sum_i \lambda_{i,j} \varepsilon_{i,h}^q = 0.$$

Отсюда вытекает конгруенция

$$\sum_i \lambda_{i,j} a_i^q \equiv \sum_i \lambda_{i,j} \varepsilon_{i,h}^q a_h^{q-1} \equiv 0. \tag{10}$$

Все элементы a_i^q, которые входят в левый член конгруенции (10), принадлежат a_j^{p-m}; но a_j^{p-m}, по условию, *просто связно*; следовательно, всякая конгруенция между его членами влечет соответствующую гомологию, так что мы имеем

$$\sum_i \lambda_{i,j} a_i^q \sim 0,$$

откуда

$$\sum_i \lambda_{i,j} a_i^q \equiv \sum_\rho \mu_{\rho,j} a_\rho^{q+1},$$

где μ — целые коэффициенты, а элементы a^{q+1} принадлежат к a^{p-m}.

Но

$$\sum_\rho \mu_{\rho,j} a_\rho^{q+1} \equiv \sum_{\rho,i} \mu_{\rho,j} \varepsilon_{\rho,i}^{q+1} a_i^q.$$

Мы получаем, таким образом:

$$\lambda_i = \sum_\rho \mu_{\rho,j} \varepsilon_{\rho,i}^{q+2}.$$

Конгруенция (9) может быть тогда переписана в виде

$$\sum \mu_{\rho,i} \varepsilon_{\rho,i}^{q+1} a_i^q b_j^m \equiv 0$$

(суммирование идет по всем трем индексам ρ, i, j).

Но теперь мы можем образовать следующую гомологию, которая есть одна из гомологий (8):

$$\sum \varepsilon_{\rho,i}^{q+1} a_i^q b_j^m \sim -\sum \varepsilon_{j,k}'^{m} a_\rho^{q+1} b_k^{m-1}.$$

Тогда

$$\sum \lambda_{i,j} a_i^q b_j^m \sim -\sum \mu_{\rho,j} \varepsilon_{k,j}'^{m} a_\rho^{q+1} b_k^{m-1},$$

что и доказывает высказанное утверждение.

Случай $m=0$, конечно, оставляется при этом рассуждении в стороне и должен быть рассмотрен отдельно.

В этом случае гомология (11) должна быть заменена следующей, которая есть одна из гомологий (8bis):

$$\sum \varepsilon_{\rho,i}^{q+1} a_i^q b_j^0 \sim a_\rho^{q+1}, \qquad \text{(11bis)}$$

откуда

$$\sum \lambda_{i,j} a_i^q b_j^0 \sim \sum \mu_{\rho,j} a_\rho^{q+1}.$$

Значит, конгруенция

$$\sum \lambda_{i,j} a_i^q b_j^0 \equiv 0$$

будет отвечать конгруенции

$$\sum \mu_{\rho,j} a_\rho^{q+1} \equiv 0, \qquad \text{(9bis)}$$

которая имеет вид (1), причем левые члены этих конгруенций гомологичны.

Пусть теперь

$$\sum \lambda_j b_j^q \equiv 0 \qquad (2)$$

— конгруенция вида (2); мы имеем из гомологии, аналогичной (8ter),

$$b_j^q \sim -\sum \varepsilon_{j,k}'^{q} a_i^0 b_k^{q-1},$$

если b_j^{p-1} есть один из элементов P', которому принадлежит b_i^q.

Мы имеем, таким образом, гомологию

$$\sum \lambda_j b_j^q \sim -\sum \lambda_j \varepsilon'^q_{j,k} a_i^0 b_k^{q-1},$$

так что нашей конгруенции (2) будет отвечать конгруенция

$$-\sum \lambda_j \varepsilon'^q_{j,k} a_i^0 b_k^{q-1} \equiv 0, \tag{12}$$

левый член которой гомологичен левому члену (2).

Таким образом, если нам дана конгруенция вида (2), то мы можем вывести из нее конгруенцию (12), которая имеет вид (9), где числа, которые мы обозначили выше через q и m, имеют соответственно значения 0 и $q-1$. Мы выведем из нее затем другую конгруенцию также вида (9), но эти числа будут иметь значения 1 и $q-2$, и т. д. В конце мы придем к конгруенции вида (9bis), т. е. к такой, где эти два числа имеют значения $q-1$ и 0; и, наконец, мы выведем из нее конгруенцию вида (1).

Левые члены всех этих конгруенций гомологичны друг другу.

Тем самым, теорема, высказанная в начале этого параграфа, доказана.

Чтобы получить из нее все следствия, которые она влечет за собой, мы сделаем такое замечание: следует различать несколько видов гомологий. Пусть v_q — произвольное многообразие q измерений, лежащее в нашем многообразии v, и v_{q-1} — его полная граница, что выражается конгруенцией

$$v_q \equiv v_{q-1}.$$

Мы выводим отсюда гомологию

$$v_{q-1} \sim 0.$$

Полученные таким образом гомологии считаются фундаментальными.

Комбинируя фундаментальные гомологии посредством сложения, вычитания и умножения, мы получим из них другие гомологии, которые назовем *гомологиями без деления*. Наконец, комбинируя их посредством сложения, умножения и деления, мы получим еще и другие гомологии, которые являются *гомологиями с делением*.

Так вот, *все гомологии, встреченные нами до сих пор в этом параграфе, являются гомологиями без деления.*

Заметив это, вернемся к таблицам T_q и T'_q и их инвариантам и, в частности, к тем из этих инвариантов, которые не равны ни 0, ни 1 и которые мы назовем *коэффициентами кручения.*

Допустим, что мы имеем следующие гомологии:

$$\sum k\lambda_i a_i^q \sim 0, \tag{13}$$

где λ_i являются взаимно простыми целыми числами, и что (13) является гомологией без деления, но что гомология

$$\sum \lambda_i a_i^q \sim 0 \tag{14}$$

может быть получена только с делением. Согласно тому, что мы видели в одном из предыдущих параграфов, это означает, что k есть один из коэффициентов кручения таблицы T_q.

Мы получим конгруенции

$$\sum \lambda_i a_i^q \equiv 0. \tag{14 bis}$$

Из (14 bis) мы сможем способом, описанным в этом параграфе, вывести конгруенцию между b_i^q, которую я запишу как

$$\sum \mu_i b_i^q \equiv 0. \tag{14 ter}$$

При этом, согласно теореме, которую мы только что установили,

$$\sum \lambda_i a_i^q \sim \sum \mu_i b_i^q.$$

Это — гомология без деления, причем отсюда немедленно получается, точно так же без деления, что

$$\sum k\lambda_i a_i^q \sim \sum k\mu_i b_i^q$$

и что без деления нельзя получить гомологии

$$\sum k\mu_i b_i^q \sim 0,$$

так как иначе мы могли бы получить без деления

$$\sum k\lambda_i a_i^q \sim 0,$$

что противоречит допущению.

Это значит, что k является также коэффициентом кручения таблицы T'_q.

Таким образом, коэффициенты кручения двух таблиц T_q и T'_q равны (доказательство легко доводится до конца) и если заметить, что таблицы T_q и T'_q имеют одни и те же инварианты, то мы можем заключить, что *таблицы, равноотстоящие от концов, имеют одни и те же коэффициенты кручения.*

К тому же результату можно прийти еще и другим путем.

В одном из предыдущих мемуаров (§ 16) мы определили операцию, названную там присоединением. Я предполагал, что два элемента полиэдра, например a_i^q и a_j^q, отделены друг от друга элементом a_k^{q-1}, что это — единственный элемент $q-1$ измерений, общий для a_i^q и a_j^q, и, наконец, что a_k^{q-1} не принадлежит ни к какому третьему элементу q измерений, кроме a_i^q и a_j^q; таким образом, $\varepsilon_{i,k}^q = 1$, $\varepsilon_{j,k}^q = 1$, а все другие $\varepsilon_{h,k}^q$ — нули для любого индекса h, так же как и все произведения $\varepsilon_{i,h}^q \varepsilon_{j,h}^q$.

В этих предположениях можно присоединить один к другому элементы a_i^q и a_j^q, отбрасывая элемент a_k^{q-1}. Как отразится это присоединение на таблицах T_q? Таблица T_q теряет строку и столбец, таблица T_{q-1} теряет

строку. Один из инвариантов, равный 1 в T_q, исчезает, что же касается таблицы T_{q-1}, то она теряет инвариант, если строк в ней больше, чем столбцов. В этом случае инвариант, который она теряет, равен нулю. Все остальные инварианты этих таблиц не меняются и, значит, эти таблицы сохраняют свои коэффициенты кручения.

Но легко образовать полиэдр, подразделяющий сразу и P и P', причем от этого полиэдра можно вернуться как к P, так и к P' с помощью описанных правильных присоединений. Поскольку эти присоединения не меняют коэффициентов кручения, они должны быть у таблиц T_q и T'_q одинаковыми [21].

§ 6. Внутреннее кручение многообразий

Рассмотрим одну из таблиц T_q. Мы скажем, что последовательность попарно различных элементов этой таблицы, расположенных в некотором порядке, образует *цепь*, если каждый элемент с нечетным номером принадлежит той же строчке, что и следующий за ним элемент, и к тому же столбцу, что и предыдущий. Цепь *замкнута*, если последний элемент совпадает с первым. Ясно, что замкнутая цепь содержит всегда нечетное число элементов, но при этом четное число *различных* элементов. Например, элементы

$$\varepsilon^q_{1,1},\ \varepsilon^q_{1,2},\ \varepsilon^q_{2,2},\ \varepsilon^q_{2,3},\ \varepsilon^q_{3,3},\ \varepsilon^q_{3,1},\ \varepsilon^q_{1,1} \qquad (1)$$

образуют замкнутую цепь.

Поскольку все элементы таблицы T_q равны 0, $+1$ или -1, произведение различных элементов замкнутой цепи всегда также будет 0, $+1$ или -1.

Предположим, что элементы цепи (1) имеют следующие значения:

$$\varepsilon^q_{1,2}=\varepsilon^q_{2,3}=\varepsilon^q_{3,1}=1, \qquad \varepsilon^q_{1,1}=\varepsilon^q_{2,2}=\varepsilon^q_{3,3}=-1;$$

произведение элементов этой цепи равно -1. Рассмотрим тогда три многообразия a^q_1, a^q_2, a^q_3 и три многообразия a^{q-1}_1, a^{q-1}_2, a^{q-1}_3; отбрасывая многообразия a^{q-1}_1, a^{q-2}_2, a^{q-1}_3, мы присоединяем одно к другому три многообразия a^q_1, a^q_2, a^q_3 и полученное таким путем многообразие обозначаем

$$a^q_1+a^q_2+a^q_3;$$

оно является *двусторонним многообразием.*

Если, напротив, мы имеем

$$\varepsilon^q_{1,2}=\varepsilon^q_{2,3}=\varepsilon^q_{3,1}=1, \qquad \varepsilon^q_{2,2}=\varepsilon^q_{3,3}=-1, \qquad \varepsilon^q_{1,1}=1,$$

то еще можем устранить a^{q-1}_1, a^{q-1}_2, a^{q-1}_3 и получить присоединением многообразие $a^q_1+a^q_2+a^q_3$, но *это многообразие будет односторонним.*

Более общим образом, если все элементы цепи (1) равны $+1$ или -1, то мы устраняем сперва a_2^{q-1} и a_3^{q-1} и получаем через присоединение многообразие

$$a_1^q - \varepsilon_{1,2}^q \varepsilon_{2,2}^q a_2^q + \varepsilon_{1,2}^q \varepsilon_{2,2}^q \varepsilon_{1,3}^q \varepsilon_{2,3}^q a_3^q. \qquad (2)$$

Устраняя затем a_1^{q-1}, мы видим, что многообразие (2) оказывается теперь образованным замкнутой цепью элементов a_i^q в смысле § 8 (стр. 475) «Analysis situs» и что эта цепь двусторонняя или односторонняя, согласно тому, будет ли произведение различных элементов цепи (1) равно -1 или $+1$.

Мы скажем в первом случае, что цепь (1) двусторонняя, а во втором, что она односторонняя.

Итак, мы пришли к необходимости различать три категории цепей, образованных элементами таблицы T_q.

1. *Нулевые цепи*, т. е. те, произведение элементов которых равно нулю.

2. *Двусторонние цепи*.

Легко видеть, что это те цепи, произведение элементов которых равно $+1$, если число элементов кратно четырем, или же те, где это произведение равно -1, если число элементов цепи равно кратному четырех плюс два.

3. *Односторонние цепи*.

Это те цепи, где произведение равно -1 в случае, когда число элементов кратно четырем, и равно $+1$, если число элементов есть кратное четырех плюс два.

Установив это, мы скажем, что всякая таблица T_q (или, более общим образом, всякая таблица или всякий детерминант, все элементы которых есть 0, $+1$ или -1) является *двусторонней*, если она содержит только двусторонние и нулевые цепи.

Из этого определения получается, что таблица остается двусторонней, если изменить знаки у всех элементов некоторой строки или некоторого столбца или же если переставить две строки или два столбца.

Теорема. *Двусторонний детерминант может равняться* только 0, $+1$, или -1.

Действительно, всегда возможно, изменяя при необходимости все знаки в некоторых столбцах, сделать так, чтобы все элементы первой строки были либо 0, либо $+1$.

Предположим, например, что два первых элемента первой строки равны $+1$ и что я вычитаю второй столбец из первого, значение детерминанта остается прежним, и я утверждаю, что детерминант остается двусторонним. Рассмотрим, в самом деле, в исходном детерминанте цепь, первый и последний члены которой принадлежат второму столбцу, а все остальные — другим столбцам. Пусть a и c будут этот первый и последний элементы, пусть ξ — произведение всех прочих элементов цепи, пусть b и d — элементы первого столбца, которые стоят соответственно в тех же строках, что a и c.

Произведение элементов нашей цепи, которую я назову цепью (1), будет $ac\xi$, и мы будем иметь

$$ac\xi = 0 \text{ или } 1, \text{ если число элементов } \equiv 0 \pmod 4),$$
$$ac\xi = 0 \text{ или } -1, \text{ если число элементов } \equiv 2 \pmod 4).$$

Произведение цепи, которую я обозначу (2) и которая образована соответствующими элементами нового детерминанта, будет равно

$$(a-b)(c-d)\xi;$$

в самом деле, элементы цепи не меняются, за исключением элементов a и c, которые становятся равными $a-b$ и $c-d$.

Цепь, образованная в исходном детерминанте двумя элементами первой строки и элементами a и b, должна быть двусторонней или нулевой, так что мы должны получить

$$a-b=0, \text{ или } a=0, \text{ или } b=0.$$

Точно так же должно быть

$$c-d=0, \text{ или } c=0, \text{ или } d=0.$$

Если $(a-b)$ или $(c-d)$ равно нулю, то теорема доказана, поскольку тогда $(a-b)\ (c-d)\ \xi=0$.

Если $b=d=0$, то

$$(a-b)(c-d)\xi = ac\xi$$

и теорема доказана, поскольку два произведения для цепей (1) и (2) и число элементов в них равны, а цепь (1) двусторонняя или нулевая.

Если $a=c=0$, то

$$(a-b)(c-d)\xi = bd\xi.$$

Цепь (3), которая принадлежит к исходному детерминанту и состоит из тех же элементов, что и цепь (1), за исключением того, что a и c заменены на b и d, эта цепь (3) является двусторонней или нулевой, она имеет то же число элементов, что и (2), и ее произведение есть $bd\xi$, что равно произведению цепи (2). Значит, и в этом случае цепь (2) двусторонняя или нулевая.

Если $a=d=0$, то

$$(a-b)(c-d)\xi = -bc\xi.$$

На этот раз нужно рассмотреть в исходном детерминанте цепь (4), элементы которой будут двумя элементами первой строки, элементами b и c, и элементами цепи (1), из которой исключены a и c. Эта цепь (4) двусторонняя или нулевая.

Она содержит на два элемента больше, чем цепь (2).

Ее произведение равно $bc\xi$ и тем самым равно, но противоположно по знаку произведению (2).

Значит, цепь (2) двусторонняя или нулевая.

Если, наконец, $b=c=0$, то

$$(a-b)(c-d)\xi=-ad\xi$$

и мы точно так же, как и в предыдущем случае, докажем, что цепь (2) двусторонняя или нулевая.

Мы рассмотрели случай цепей, в которых два элемента принадлежат второму столбцу.

Результат останется тем же, каково бы ни было число элементов, принадлежащих второму столбцу; это число, впрочем, всегда должно быть четным.

Если оно равно нулю, то теорема очевидна, так как цепь нового детерминанта не отличается от цепи исходного.

Допустим, для определенности, что это число равно четырем. Пусть a, c, e, q — четыре элемента второго столбца, и представим себе, что в нашей цепи последовательно встречаются a, различные элементы ξ, принадлежащие другим столбцам, элементы c и e, различные элементы η, принадлежащие другим столбцам, и, наконец, g. Наша цепь будет замкнутой.

Цепь $a\xi ce\eta ge$ можно разложить на две замкнутые цепи: $a\xi ca$ и $e\eta ge$ и для того, чтобы она была двусторонней, достаточно, чтобы ее компоненты были таковыми. Таким образом, мы приходим к случаю цепей с двумя только элементами во втором столбце.

Я добавлю к этому, что все элементы нового детерминанта снова равны только 0, $+1$ или -1. Действительно, раз

$$a-b=0, \quad \text{или} \quad a=0, \quad \text{или} \quad b=0,$$

мы получаем, что

$$a-b=0, a \quad \text{или} \quad b$$

откуда

$$a-b=0, \quad 1 \quad \text{или} \quad -1.$$

Установив это все, вычтем теперь первый столбец из всех столбцов, где первый член равен $+1$. Детерминант сохранит свое значение, останется двусторонним и в то же время все элементы первой строки будут нулями, кроме первого, который будет равняться по-прежнему $+1$.

Это рассуждение применимо во всех случаях, кроме случая, когда все элементы первой строки нули. Но тогда и детерминант равен нулю и теорема очевидна.

Если теперь убрать первую строку и первый столбец, то мы получим новый детерминант, который будет равен первому и, как и первый, будет двусторонним. С этим детерминантом, имеющим одной строкой и одним

столбцом меньше первого, мы поступим так же и, в конце концов, мы приходим к детерминанту, имеющему только один элемент, равный 0, +1, или −1.

Значит, и наш детерминант равнялся 0, +1 или −1.

1-е следствие. *Если таблица T_q двусторонняя, то все ее инварианты равны* 0 *или* +1.

2-е следствие. Если все таблицы T_q полиэдра двусторонние, т. е., если из его элементов a_i^q нельзя составить одностороннего многообразия, то этот полиэдр не имеет коэффициентов кручения.

Мы видим, что коэффициенты кручения (благодаря которым приходится различать два определения чисел Бетти и также гомологии с делением и без деления) обязаны своим существованием тому факту, что элементы полиэдра могут порождать односторонние многообразия, т. е. что полиэдр, так сказать, скручен в себе самом.

Это оправдывает название коэффициента кручения и также многообразий с кручением или без кручения.

Если многообразие V, образованное элементами a_i^p полиэдра P, само не является односторонним, то две таблицы T_1 и T_p являются двусторонними.

Действительно, каждая строка в одной и каждый столбец в другой имеют только нулевые элементы, за исключением двух, равных +1 и −1. Если цепь не нулевая, то все элементы попарно равны и имеют противоположный знак. Она будет, таким образом, двусторонней.

Отсюда следует, что все инварианты двух крайних таблиц T_1 и T_p равны 0 или +1. Это объясняет, почему коэффициенты кручения не встречаются в полиэдрах в обычном пространстве: в самом деле, эти полиэдры имеют только таблицы T_1 и T_2.

Этот факт уже не будет верен, если V — одностороннее многообразие. Так, многообразие, рассмотренное в седьмом примере (§ 15, стр. 521), может быть подразделено как полиэдр, причем в соответствии с тем способом, как это было сделано, мы находим для таблицы T_2:

$$|2|, \quad \begin{vmatrix} +1, & +1 \\ +1, & -1 \end{vmatrix}, \ldots.$$

Чтобы не удлинять излишне эту работу, я ограничиваюсь лишь анонсацией теоремы, доказательство которой потребовало бы некоторых рассуждений.

Всякий полиэдр, у которого все числа Бетти равны +1 *и все таблицы двусторонние, является просто связным, т. е. он гомеоморфен сфере* [22].

О НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

(Третье дополнение к «Analysis situs»)*

Поставим себе целью изучить с точки зрения Analysis situs поверхность

$$z=\sqrt{F(x, y)}, \qquad (1)$$

где $F(x, y)$ — полином. Мы предполагаем, что точки кривой

$$F(x, y)=0$$

либо обыкновенные, где dF/dx не равно нулю или где $dF/dx=0$, но ни d^2F/dx^2, ни dF/dy не обращаются в нуль, либо двойные обыкновенные, где

$$\frac{dF}{dx}=\frac{dF}{dy}=0,$$

но где ни d^2F/dx^2, ни $d^2F/dx^2 \cdot d^2F/dy^2-(d^2F/dxdy)$ не обращаются в нуль.

Будем вначале рассматривать y как константу. Тогда уравнение (1) представляет алгебраическую кривую и координаты x и z точек этой кривой выражаются, как известно, как фуксовы функции одной и той же вспомогательной переменной u. Рассмотрим соответствующую фуксову группу и фуксов многоугольник, который ее порождает. Вообще говоря, фуксов многоугольник, отвечающий кривой рода p, имеет $4p$ сторон, и мы можем принять либо, что сопряжены между собой стороны рангов $4q+1$ и $4q+3$, так же как и стороны рангов $4q+2$ и $4q+4$ (это отвечает нормальным периодам абелевых функций), либо, что сопряжены диаметрально противоположные стороны.

Мы примем это последнее допущение.

Я напомню, кстати, что сумма углов многоугольника должна равняться 2π. Причем в частном случае кривой (1) мы находимся в так называемом *гиперэллиптическом* случае, когда соответствующие абелевы функции сводятся к гиперэллиптическим функциям.

В этом случае известно, что наш фуксов многоугольник допускает центр симметрии и разлагается на два многоугольника с $2p+1$ сторонами каждый, которые симметричны друг другу относительно этого центра.

---

* Bulletin de la Société mathématique de France, 1902, 30, p. 49—70.

Прежде чем идти дальше, я уточню, что я понимаю под словом *симметрия*. Мы стоим теперь на точке зрения неевклидовой геометрии, я имею в виду, что мы рассматриваем в качестве неевклидовых прямых круги, которые ортогонально пересекают фундаментальный круг. Мы говорим, что две фигуры симметричны по отношению к неевклидовой прямой, если можно перейти от одной к другой посредством инверсии (преобразование, определенное взаимными радиусами-векторами), которая не изменяет этой неевклидовой прямой; мы скажем, что две фигуры равны, если они симметричны одной и той же третьей фигуре относительно двух неевклидовых прямых или же если они обе равны какой-либо третьей фигуре. Наконец, мы скажем, что две фигуры симметричны по отношению к одному центру, если они обе симметричны одной и той же третьей фигуре относительно двух ортогональных прямых, проходящих через этот центр.

Так вот, мы считаем, что наш многоугольник R с $4p$ сторонами разложен на два многоугольника R' и R'' с $2p+1$ сторонами каждый, которые симметричны друг другу относительно некоторого центра.

Мы можем допустить, что полином $F(x, y)$ не делится ни на какой квадрат. Тогда уравнение относительно x

$$F(x, y)=0$$

будет иметь двойные корни лишь для некоторых особых значений y. Оно будет иметь $2p+2$ простых корней, которые я обозначу

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2p+1}.$$

При этом x_0 отвечает $2p+1$ вершинам многоугольника R', а $x_1, x_2, \ldots, x_{2p+1}$—серединам (все еще с неевклидовой точки зрения) $2p+1$ сторон.

В плоскости x мы проведем $2p+1$ разрезов

$$C_1, C_2, \ldots, C_{2p+1},$$

идущих из точки x_0 в точки $x_1, x_2, \ldots, x_{2p+1}$, причем так, что двум сторонам разреза C_i в многоугольнике R' будут отвечать две половины его i-й стороны.

В случае $p=1$ (т. е. когда уравнение $F=0$ имеет четвертую степень по x) многоугольник R сводится к параллелограмму, многоугольники R' и R'' — к двум прямолинейным треугольникам, а фуксовы функции — к эллиптическим функциям.

Что произойдет теперь, если мы заставим y изменяться так, чтобы в конце эта переменная вернулась к своему исходному значению?

Наша фуксова группа будет меняться непрерывным образом, так же как и фуксов многоугольник R. Когда y закончит обход, фуксова группа снова станет той же самой, точки x_i, вообще говоря, подвергнутся перестановке, а многоугольник R окажется другим многоугольником R_1, эквивалентным R, что означает, что с его помощью порождается та же группа.

Возьмем, например, случай $p=1$. Многоугольник R есть параллелограмм, стороны которого ω и ω' представляют по величине и направлению два периода некоторой эллиптической функции. Когда y закончит обход, наш параллелограмм станет параллелограммом R_1, стороны которого по величине и направлению представляют периоды той же эллиптической функции. Но периоды эти, вообще говоря, уже не будут ω и ω', но будут двумя эквивалентными периодами

$$\alpha\omega+\beta\omega', \quad \gamma\omega+\delta\omega',$$

где α, β, γ, δ — четыре целых, для которых $\alpha\delta-\beta\gamma=1$.

Это приводит нас к первому соприкосновению с Analysis situs. Пусть $p=1$; пусть значения y берутся на некотором замкнутом контуре K, x имеет произвольное комплексное значение, а z получается тогда из уравнения (1). Множество всех этих точек x, y, z составит некоторое замкнутое многообразие V трех измерений. Каковы свойства этого многообразия с точки зрения Analysis situs?

Каждой точке этого многообразия я поставлю в соответствие три действительных переменных ξ, η, ζ, определенных следующим образом: ζ — функция, зависящая только от y, она увеличивается на 1, когда y полностью обходит свой контур. Что же касается ξ и η, то это будут линейные функции от действительной и мнимой частей эллиптического интеграла u, определенного уравнением (1). Эти линейные функции таковы, что ξ и η переходят в $\xi+1$, η, когда этот эллиптический интеграл возрастает на ω, и в ζ, $\eta+1$, когда он возрастает на ω' (так что $u=\xi\omega+\eta\omega'$). При таких соглашениях мы получаем ту же точку многообразия V, когда ξ, η, ζ заменяются на

$$\xi+1, \quad \eta, \quad \zeta,$$

$$\text{или на } \xi, \quad \eta+1, \quad \zeta,$$

$$\text{или на } \delta\xi-\gamma\eta, \quad -\beta\xi+\alpha\eta, \quad \zeta+1,$$

так как если ξ_1 и η_1 — значения, в которые перейдут ξ и η, когда ζ заменится на $\zeta+1$, то мы будем иметь

$$u=\xi\omega+\eta\omega'$$

и, с другой стороны,

$$u=\xi_1(\alpha\omega+\beta\omega')+\eta_1(\gamma\omega+\delta\omega'),$$

или же более общим образом, когда ξ, η, ζ подвергаются какой-либо из подстановок, принадлежащей всей группе G, порожденной этими тремя преобразованиями.

Мы узнаем здесь группу, рассмотренную в «Analysis situs», стр. 499, пример 6. Многообразие V, таким образом, гомеоморфно многообразию

этого примера, и оно допускает группу G в качестве фундаментальной группы (ср. «Analysis situs», стр. 501).

Будем по-прежнему считать, что многообразие V определяется указанным способом, но больше не предполагаем, что $p=1$. Тогда R есть фуксов криволинейный многоугольник. Мы все еще вводим три переменные ξ, η, ζ. Последняя переменная ζ будет определяться так же, как и выше. Что же касается ξ и η, то это будут теперь однозначные функции от ζ и от действительной и мнимой частей переменной u; при этом каждому комплексному значению u будет отвечать ровно одна система значений ξ и η, и обратно. Каждому значению ζ будет отвечать фуксова группа и фуксов многоугольник R, связанный с этой группой. Эта группа будет порождаться $2p$ подстановками

$$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_{2p}.$$

Подстановка S_k заменяет ξ и η на

$$\varphi_k(\xi,\ \eta,\ \zeta),\qquad \psi_k(\xi,\ \eta,\ \zeta),$$

и мы снова попадаем в ту же точку многообразия V, когда заменяем ξ, η, ζ на

$$\varphi_k(\xi,\ \eta,\ \zeta),\qquad \psi_k(\xi,\ \eta,\ \zeta),\ \zeta.$$

Мы, впрочем, можем определить функции ξ и η так, чтобы φ_k и ψ_k не зависели от ζ.

Действительно, обратимся к фигуре, образованной фуксовым многоугольником $R=R'+R''$ и многоугольниками, полученными из него различными подстановками фуксовой группы. Все эти многоугольники заполняют область фундаментального круга. Полученная таким образом фигура будет непрерывным образом деформироваться, если ζ меняется непрерывно, но она останется при этом гомеоморфной самой себе. Поэтому мы сможем каждой точке M_0 этой фигуры в ее начальном положении поставить в соответствие одну и только одну точку M этой же фигуры в произвольном из ее последующих положений, причем так, что:

1) M смещается непрерывно, если непрерывно меняется координата ζ;

2) если M_0 — вершина R, то M остается вершиной, а если M_0 лежит на стороне R, то и M остается на стороне R;

3) если две точки M_0 и M'_0 конгруентны (т. е. получаются одна из другой подстановками фуксовой группы), то и точки M и M' равным образом конгруентны.

Я допускаю тогда, что значения двух вспомогательных переменных ξ и η — те же самые для обеих точек M и M_0; я допускаю, например, что они равны координатам точки M_0.

При этих условиях φ_k и ψ_k не зависят от ζ. Если y проделывает полный обход, то ζ увеличивается на 1 , и многоугольник R, постепенно деформи-

руясь, становится многоугольником R_1, эквивалентным R. Точка M перейдет в точку M_1 с координатами

$$\theta(\xi, \eta), \quad \theta_1(\xi, \eta).$$

Мы видим, что возвращаемся в ту же точку V, когда ξ, η, ζ заменяются значениями

$$\theta(\xi, \eta), \quad \theta_1(\xi, \eta), \zeta+1$$

или, более общим образом, когда ξ, η, ζ подвергаются одной из подстановок группы G, порождаемой $2p+1$ подстановками, которые заменяют ξ, η, ζ на

$$\varphi_k, \psi_k, \quad \zeta \quad (k=1, 2, \ldots, 2p)$$

или на

$$\theta, \theta_1, \zeta+1.$$

Эта группа G будет, следовательно, фундаментальной группой многообразия V.

Мы заметим, сперва, что эта группа не является простой. Мы можем обозначить через G' группу, порождаемую $2p$ подстановками $(\varphi_k, \psi_k, \zeta)$, и через Σ — подстановку $(\theta, \theta_1, \zeta+1)$. Я утверждаю, что G' есть инвариантная подгруппа G. Достаточно показать, что G' перестановочна с Σ. Действительно, Σ переводит многоугольник R в эквивалентный многоугольник и поэтому не изменяет фуксовой группы. Но фуксова группа есть не что иное, как группа, порождаемая $2p$ подстановками $(\xi, \eta; \varphi_k, \psi_k)$. Мы видим, что эта группа перестановочна с подстановкой $(\xi, \eta; \theta, \theta_1)$, и сделанное утверждение немедленно выводится отсюда.

Рассмотрим теперь многообразие V, построенное следующим образом.

Представим переменную y на комплексной сфере. Будем различать на этой сфере обычные точки, для которых уравнение $F(x, y)$ не имеет кратных корней, и особые точки, для которых это уравнение имеет кратные корни.

Пусть O — неособая точка и $A_1, A_2, \ldots, A_q$ — особые. Соединим O с каждой из этих точек разрезами $OA_1, OA_2, \ldots, OA_q$ без взаимных пересечений. С другой стороны, возьмем с центром в каждой из этих особых точек круг очень малого радиуса, который мы назовем *кругом запрета*. Многообразие V получается, если мы дадим y произвольное значение, не попадающее ни в один из кругов запрета; дадим x произвольное комплексное значение и тогда возьмем для z одно из двух значений, определенных уравнением (1). Каждому значению y будет отвечать фуксов многоугольник; этот многоугольник вполне определен, если y меняется, не проходя через разрезы OA, так как только в случае, когда y делает полный обход одной из особых точек A, многоугольник R может перейти в эквивалентный многоугольник.

Многоугольник R вместе со своими образами относительно фуксовой группы образует фигуру, которая меняется непрерывно вместе с y, но при этом остается все время гомеоморфной самой себе. Пусть тогда y_0 — начальное значение y, R_0 — соответствующий многоугольник R, точка M_0 берется в плоскости R_0. Мы можем тогда поставить в соответствие точке M_0 точку M в плоскости R таким образом, что координаты M являются непрерывными и взаимно однозначными функциями координат M_0, причем M — вершина R или лежит на стороне R, если M_0 — вершина R_0 или лежит на стороне R_0, и точки M и M' конгруентны, если M_0 и M'_0 конгруентны.

Мы можем затем поставить в соответствие точке M две вспомогательные переменные ξ и η, которые являются не чем иным, как координатами M_0. При этих условиях фуксова группа будет состоять из $2p$ подстановок

$$S_1, \ S_2, \ \ldots, \ S_{2p}$$

таких, что S_k переводит ξ и η в $\varphi_k(\xi, \eta)$, $\psi_k(\xi, \eta)$, *где функции* φ_k *и* ψ_k *не зависят от* y.

Когда y обходит особую точку A_i, многоугольник R переходит в эквивалентный многоугольник R_1. Отсюда получается, что ξ и η переходят в

$$\theta_i(\xi, \eta), \ \theta'_i(\xi, \eta),$$

где θ_i и θ'_i — взаимно однозначные и непрерывные функции от ξ и η такие, что когда точка ξ, η является вершиной или лежит на стороне R_0, точка θ_i, θ'_i оказывается в вершине или на стороне многоугольника R_1^0, аналогичного R_1 и эквивалентного R_0.

Возьмем теперь вторую фуксову группу, которую я обозначу Г, так что y есть фуксова функция вспомогательной переменной $\zeta+i\zeta'$, допускающая эту группу Г. Соответствующий фуксов многоугольник P будет принадлежать второму семейству (т. е. все его вершины будут лежать на фундаментальной окружности и все углы будут нулями) и он будет рода 0. Различные его вершины отвечают значениям A_1, A_2, . . ., A_q переменной y.

Особым точкам A_1, A_2, . . ., A_q будут отвечать q подстановок

$$\Sigma_1, \ \Sigma_2, \ \ldots, \ \Sigma_q,$$

которые порождают группу Г, причем подстановка Σ_i переводит ζ и ζ' в

$$\chi_i(\zeta, \zeta'), \ \chi'_i(\zeta, \zeta').$$

Отсюда вытекает, что мы попадаем в ту же самую точку многообразия V, когда четыре переменные ξ, η, ζ, ζ' подвергаются подстановкам группы G

порожденной с помощью $2p+q$ подстановок, которые переводят эти переменные в

$$\varphi_k(\xi, \eta),\ \psi_k(\xi, \eta),\ \zeta,\ \zeta' \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2p);$$
$$\theta_i(\xi, \eta),\ \theta'_i(\xi, \eta),\ \chi_i(\zeta, \zeta'),\ \chi'_i(\zeta, \zeta') \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ q).$$

Первые $2p$ из этих подстановок порождают группу G' (которая просто будет фуксовой группой, примененной к переменным ξ и η и оставляющей неизменными переменные ζ и ζ'). Поскольку эта фуксова группа перестановочна с подстановками Σ_i, мы можем заключить, как и выше, что G' есть инвариантная подгруппа G.

Эту группу G можно рассматривать как фундаментальную группу многообразия V при условии, однако, что не допускается, чтобы y заходил в круги запрета.

Действительно, пусть N — точка пространства четырех измерений, координатами которого будут ξ, η, ζ, ζ'. Каждой точке N будет отвечать точка V, но каждой точке V будет отвечать бесконечный набор точек N, и я скажу, что эти точки N конгруентны между собой.

Согласно определениям, данным в «Analysis situs» (ср. стр. 502), каждой подстановке фундаментальной группы V будет отвечать замкнутый контур K, проведенный на V, причем начальная точка контура будет некоторой точкой, раз навсегда выбранной на V (это та точка, которую в «Analysis situs» я обозначал M_0).

Пусть N_0 будет одной из точек N, отвечающих этой фиксированной точке V. Контуру K будет тогда отвечать в пространстве (ξ, η, ζ, ζ') кривая $N_0BN'_0$, ведущая из точки N_0 в некоторую конгруентную точку N'_0.

Ясно далее, что две кривые $N_0BN'_0$, $N_0CN'_0$, имеющие те же концы, приводят к той же подстановке фундаментальной группы. Для этого нам достаточно заметить, что замкнутый контур $N_0BN'_0CN_0$ ограничивает двумерную площадку, так как тогда и соответствующий замкнутый контур в V будет также ограничивать двумерную площадку и он может быть сведен непрерывной деформацией в точку.

Таким образом, достаточно показать, что область в пространстве четырех измерений, где может перемещаться точка N, просто связна. Что же это за область? Прежде всего точка ξ, η может пробегать весь фундаментальный круг, который является просто связной областью. Что же касается точки ζ, ζ', то она может пробегать как многоугольник P, так и все многоугольники, получающиеся из него с помощью фуксовой группы Γ. Тогда она пробегала бы весь фундаментальный круг целиком, если бы не нужно было учитывать круги запрета. Так как y не допускается в эти круги, мы должны выбросить из P маленькие области в окрестности каждой вершины и так же поступить для многоугольников, полученных из P преобразованиями группы. Значит, нам нужно выбросить из фундаментального круга бесконечное число малых кругов, которые все лежат один вне другого и все касаются границы этого круга. Остающаяся область

все еще просто связна и, значит, область, где может перемещаться точка $(\xi, \eta, \zeta, \zeta')$, т. е. точка N, также просто связна, что и требовалось доказать.

Таким образом, точке N_0' (или, если угодно, подстановке группы G, которая переводит N_0 в N_0') отвечает подстановка фундаментальной группы и притом только одна. Отсюда вытекает, что фундаментальная группа гомоморфна G, но мы не знаем еще, не будет ли при этом гомоморфизме нарушаться взаимная однозначность?

Это могло бы случиться, если бы имелись точки N_0' (отличные от N_0) такие, что соответствующая подстановка фундаментальной группы сводится к тождественной подстановке, т. е. такой, что замкнутый контур, проведенный на V и отвечающий кривой N_0BN_0', ограничивает двумерную площадку и может быть сведен к нулю непрерывной деформацией.

Мы должны таким образом выяснить, может ли случиться, что когда мы описываем на V бесконечно малый контур, точка N претерпевает подстановку из G, не сводящуюся к тождественной. Когда на V описывается бесконечно малый контур, переменная y также описывает в своей плоскости бесконечно малый контур. Этот контур не может обходить никакой из особых точек A_i, поскольку каждая из них лежит внутри круга запрета, очень малого, но конечного, куда y не может проникнуть. В таком случае мы можем, подвергая контур бесконечно малой деформации, добиться того, чтобы y оставался постоянным, в то время как x пробегает в своей плоскости бесконечно малый контур. Если этот контур не обходит никакой особой точки x_k, то точка N, координаты которой равны ξ, η, ζ, ζ', возвращается к своему исходному положению и не подвергается никакой подстановке из G, отличной от тождественной. Если контур обходит особую точку, причем только одну, то переменная z изменяет знак и тогда цикл на V не замкнут. Наконец, не может случиться, что контур обходит две сингулярные точки, поскольку он бесконечно мал, а две особые точки могут быть бесконечно близкими, только если y подходит к одной из точек A_i, но к этим точкам приближаться нельзя из-за кругов запрета.

В итоге мы получаем, что когда на V мы описываем бесконечно малый замкнутый цикл, подстановка, которой подвергается N, всегда сводится к тождественной. Таким образом, изоморфизм G и фундаментальной группы является взаимно однозначным. Другими словами, поскольку мы имеем в виду форму фундаментальной группы, эта группа не отличается от G.

Мы видели, какую роль в предшествующем рассуждении играли круги запрета. Удалим теперь эти круги запрета и допустим, что x и y могут принимать произвольные комплексные значения и, таким образом, V есть многообразие, определенное уравнением (1).

Прежде всего, фундаментальная группа все еще гомоморфна G, мне нечего менять в этой части рассуждения. Но остается выяснить, не будет ли нарушаться взаимная однозначность, и чтобы это узнать, я, как и выше,

посмотрю, что происходит, когда на V описывается бесконечно малый контур.

Если во время обхода этого цикла y не обходит особой точки A_i или не становится бесконечно близкой к A_i, то предыдущее рассуждение все еще остается в силе, и подстановка, которой подвергается N, тождественна.

Допустим теперь, что y описывает очень маленький контур, обходящий вокруг A_i. Тогда ζ и ζ' заменятся на χ_i и χ'_i и N подвергнется либо подстановке $(\theta_i, \theta'_i, \chi_i, \chi'_i)$, которую для краткости я обозначу T_i, либо этой же подстановке, за которой следует подстановка группы G'.

Уточним сказанное. Когда описывается цикл, точка x описывает в своей плоскости бесконечно малый контур. В то же время точки

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2p+1}$$

в результате изменения y опишут малые круги. Две из этих точек, которые я обозначу x_a и x_b, очень близки одна к другой, когда y близок к A_i. Другие точки x_k опишут замкнутые контуры, когда y обойдет A_i. Что же касается x_a и x_b, то может случиться, что они поменяются местами и тогда каждая из них опишет дугу; эти дуги вместе составят замкнутый контур. Может случиться и так, что они не поменяются местами, а каждая из них опишет замкнутый контур.

Если x не обойдет никакой особой точки x_k, то точка N подвергнется подстановке T_i, которой в фундаментальной группе должна будет отвечать тождественная подстановка.

Если x обойдет точку x_k, отличную от x_a и x_b, то z изменит знак и цикл не замкнут. Этот случай исключается.

Если x обходит точки x_a и x_b, то сумма аргументов $x-x_a$ и $x-x_b$ увеличивается на 2π или на 4π. Первый случай должен быть исключен, так как z меняет знак; изучим второй.

Вернемся к фуксову многоугольнику R и двум составляющим его многоугольникам R' и R''. На R' точке x_a будет отвечать некоторая точка u_a, которая будет серединой одной из сторон (с неевклидовой точки зрения). Пусть s_a — подстановка, которая переводит точку u плоскости R в точку, симметричную u по отношению к u_a (в неевклидовом смысле).

Пусть u'_a — точка, конгруентная u_a, которая получена из u_a подстановкой S фуксовой группы, и пусть s'_a — подстановка, которая переводит каждую точку в симметричную с ней по отношению к u'_a. Очевидно, мы имеем

$$s'_a = S^{-1} s_a S.$$

Рассмотрим теперь различные точки плоскости R, которые отвечают x_b. Среди этих точек я отмечу ту, которая стремится к u_a, когда y стремится к A_i без перехода через разрезы OA; я обозначу ее u_b. Через u'_b я обозначу точку, в которую подстановка S переводит u_b. Я определяю s_b и s'_b по отношению к u_b и u'_b так же, как s_a и s'_a определены по отношению к u_a и u'_a.

Ясно, что

$$s_a^2 = s_b^2 = s_a'^2 = s_b'^2 = 1,$$

что $s_a s_b$ и $s_b s_a$ принадлежат к фуксовой группе и что

$$s_b' = S^{-1} s_b S.$$

Отметим, что $s_a s_b$ и $s_b s_a$ взаимно обратны.

Теперь, если x обегает свой контур вокруг x_a и x_b, точка ξ, η подвергнется подстановке $s_a s_b$ (или же $s_b s_a$, в зависимости от направления обхода контура) или, более общим образом, одной из подстановок фуксовой группы.

Точка N, следовательно, подвергнется подстановке T_i и затем одной из подстановок S' группы G' или, что то же, одной из подстановок S'' группы G' и затем подстановке T_i.

Подстановке $T_i S' = S'' T_i$ группы G в фундаментальной группе также отвечает тождественная подстановка. Поскольку, как мы только что видели, подстановке T_i отвечает тождественная подстановка, мы должны заключить отсюда, что S' и S'' равным образом отвечает тождественная подстановка.

Может еще случиться, что когда мы опишем замкнутый цикл на V, точка y не обойдет вокруг A_i, хотя и останется очень близко от A_i. В этом случае ζ и ζ' вернутся к их исходным значениям и в то же время x опишет в своей плоскости замкнутый контур. Можно будет допустить, что этот контур окружает обе особые точки x_a и x_b, поскольку , когда y близок к A_i, эти две точки x_a и x_b близки друг к другу. Тогда точка u подвергается подстановке фуксовой группы, а точка N — подстановке S'' группы G', которой в фундаментальной группе должна все еще отвечать тождественная подстановка.

Таким образом, обращаясь вновь к нашей группе G, возникающей из подгруппы G' и подстановок T_i, мы видим, что всем подстановкам T_i и некоторым подстановкам из G' отвечает тождественная подстановка. Поэтому фундаментальная группа будет гомоморфна G' (и тем самым фуксовой группе), поскольку всем T_i отвечает тождественная подстановка, и этот гомоморфизм не будет, вообще говоря, взаимно однозначным, потому что некоторым подстановкам из G' будет, вообще говоря, отвечать тождественная подстановка.

Прежде чем идти дальше, отметим два случая, которые нужно различать. Может случиться, что особые точки x_a и x_b меняются местами, когда y обходит A_i, или же этого не происходит. В первом случае трудностей не возникает: часть многообразия (1), расположенная вблизи точки $y = A_i$, $x = x_a = x_b$ подобна части многообразия

$$z^2 = y - x^2$$

вблизи начала, и всякий замкнутый контур, который близок к этой

точке, сводится к одной точке деформацией, так что соответствующая подстановка фундаментальной группы может быть лишь тождественной. В этом случае и T_i, и S', и S'' отвечает тождественная подстановка, как это было только что объяснено.

Во втором случае поверхность (1) представляет коническую особенность, и часть многообразия (1) вблизи точки $y=A_i$, $x=x_a=x_b$ подобна части многообразия

$$z^2=y^2-x^2$$

вблизи начала.

Тогда можно сделать два одинаково законных соглашения: допустим, что замкнутый контур на V может быть сведен к одной точке, но не иначе, как с переходом через коническую точку. Можно допустить, что соответствующая подстановка фундаментальной группы все еще тождественна или, другими словами, можно считать коническую точку обычной точкой многообразия. В этом случае подстановкам T_i, S' и S'' отвечает еще тождественная подстановка.

Или же можно принять противоположное соглашение и считать коническую точку особой, через которую запрещено проходить. В этом случае подстановке T_i отвечает еще тождественная подстановка, но это уже неверно для S'. Отметим, что мы имеем здесь $S'=S''$.

Теперь возникает такой вопрос. Пикар доказал (ср.: Теория алгебраических функций двух переменных, т. 1, стр. 85 и дальше), что для алгебраической поверхности самой общей степени линейные циклы могут быть редуцированы к точкам, так что число Бетти равно 1.

Отсюда не следует сразу, что фундаментальная группа состоит лишь из тождественной подстановки. Действительно, Пикар доказал, что всякий линейный цикл *гомологичен* нулю, а для того чтобы доказать, что фундаментальная группа сводится к тождественной подстановке, нужно было бы показать, что всякий линейный цикл *эквивалентен* нулю. О различии между гомологиями и эквивалентностями см. «Analysis situs», стр. 502. Необходимо, следовательно, вернуться к вопросу с этой новой точки зрения.

Рассмотрим сперва случай, где $p=1$, т. е. случай, когда фуксов многоугольник сводится к параллелограмму. Тогда все подстановки G' и тем самым все подстановки фундаментальной группы перестановочны между собой.

Группа G' порождена двумя подстановками, которые я обозначу s и s_1. Пусть тогда дан произвольный цикл; этому циклу будет отвечать подстановка G', которую можно, например, записать как

$$s^\alpha s_1^{\alpha_1} s^\beta s_1^{\beta_1} s^\gamma s_1^{\gamma_1}.$$

Подстановки G' перестановочны, и, значит, та же подстановка может быть записана как

$$s^{\alpha+\beta+\gamma} s_1^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}.$$

Если, как это доказал Пикар, всякий цикл гомологичен нулю, то это означает, что среди возможных циклов имеются два, отвечающие подстановкам

$$s^a s_1^b, \quad s^c s_1^d$$

группы G' (где a, b, c, d — целые, детерминант которых отличен от нуля), которые возможно свести к нулю. Тогда в фундаментальной группе и $s^a s_1^b$, и $s^c s_1^d$ отвечала бы тождественная подстановка, что я запишу как

$$s^a s_1^b \equiv 1, \qquad s^c s_1^d \equiv 1.$$

Мы заключаем отсюда, вспоминая что s и s_1 перестановочны, что

$$s^\varepsilon \equiv 1, \qquad s_1^\varepsilon \equiv 1, \qquad \varepsilon = ad - bc.$$

Мы видим, что число подстановок в фундаментальной группе во всяком случае не может быть более чем конечным, более, чем ε^2.

Но можно пойти дальше даже и в случае, когда $p=1$. Возьмем для определенности $p=2$ и обозначим, скажем, через

$$a, \ b, \ c, \ d, \ e, \ f$$

шесть особых точек в плоскости x, которые мы до сих пор обозначали $x_0, \ldots, x_b$.

Пусть сперва $y=0$; соединим точку $x=0$ с точками a, b, c, d, e, f прямолинейными разрезами так, чтобы, обходя вокруг точки O, мы встречали эти разрезы в таком порядке:

$$Oa, \ Ob, \ Oc, \ Od, \ Pe, \ Of.$$

Заставим теперь y меняться непрерывным образом, но так, чтобы не проходить через разрезы OA_i одновременно; точки a, b, . . . будут перемещаться непрерывно, но не меняясь местами и не обходя одна вокруг другой; разрезы Oa, . . . также будут смещаться и даже перестанут быть прямыми, но все же они по-прежнему встречаются в том же самом порядке, когда мы обходим точку O.

При переходе через разрез Oa переменная u (аргумент фуксовых функций) подвергнется преобразованию, которое я обозначу a и которое будет в некотором роде симметрией, аналогичной симметрии s_a, определенной выше, стр. 631 (симметрия по отношению к u_a).

Я определю таким же образом преобразования b, c, d, e, f; ясно, что мы будем иметь:

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = f^2 = 1$$

и что это единственные соотношения, которые имеются между ними. Фуксова группа будет образована всеми возможными комбинациями из этих преобразований, *взятых в четном числе*.

Когда y стремится к A_i, две из особых точек, например a и d, сближаются, а когда y обходит вокруг A_i, эти две точки меняются местами

(в общем случае, когда точка $x=a$, $y=A_i$ не является двойной точкой поверхности; этот случай мы изучим в первую очередь).

Когда точка y близка к A_i (но не прошла через разрез OA_i), четыре разреза Oa, Ob, Oc, Od расположены так, как это показано сплошными линиями на рис. 1; после того как точка y сделала обход вокруг OA_i, разрезы Oa и Od деформировались и стали такими, как это показано пунктирными линиями на том же рисунке. Они меняются при этом ролями, и разрез, показанный сплошной линией Oma, стал теперь пунктирным разрезом $Om'd$, а разрез Ond стал $On'a$.

Проведем теперь в плоскости произвольный замкнутый контур, выходящий из произвольной заданной точки плоскости M_0. Если, скажем, этот контур последовательно проходит разрезы Oa, Oc, Oa, Ob, Of, Oe, то он соответствует подстановке $acabfe$.

Теперь рассмотрим замкнутый контур, проходящий через один из разрезов

$$Oma,\ Ob,\ Oc,\ Ond,\ Oe,\ Of \tag{1}$$

и только через один. Когда точка y один раз обойдет вокруг A_i, он превратится в контур, проходящий через один из разрезов

$$Om'd,\ Ob,\ Oc,\ On'a,\ Oe,\ Of \tag{2}$$

и только через один.

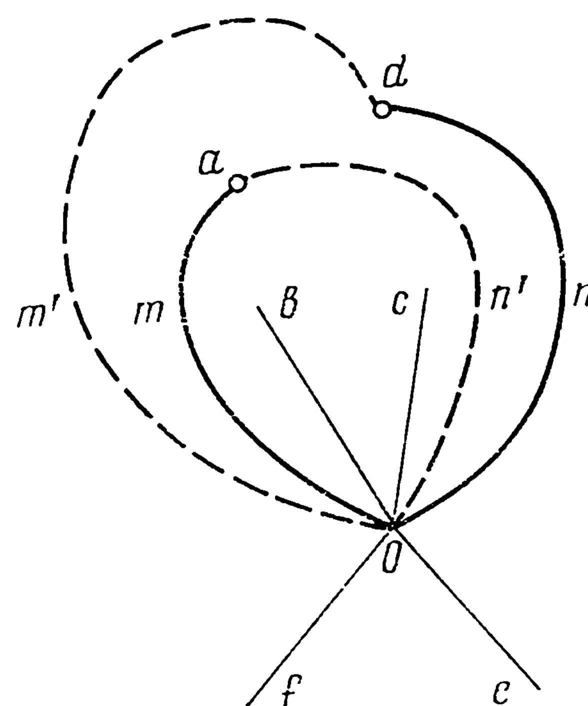


Рис. 1

Но легко усмотреть из чертежа, что контур, проходящий через один из разрезов (2), должен пройти в некотором порядке через некоторые из разрезов (1) и он будет эквивалентен, следовательно, некоторой комбинации подстановок a, b и c.

Например, допустим, что M_0 лежит вне $Om'dna$. Тогда цикл, который проходит через

$Om'd$,	пройдет	через	Ond	и отвечает	d,
Ob	«	«	Ond, Oma, Ob, Oma, Ond	«	$dabad$,
Oc	«	«	Ond, Oma, Oc, Oma, Ond	«	$dacad$,
$Om'a$	«	«	Ond, Oma, Ond	«	dad,
Oe	«	«	Oe	«	e,
Of	«	«	Of	«	f.

Следовательно, преобразование T_i изменит подстановки

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \tag{3}$$

соответственно на

$$d,\ dabad,\ dacad,\ dad,\ e,\ f. \tag{4}$$

Мы выписали выше соотношение

$$T_i S' = S'' T_i$$

и показали, что двум подстановкам S' и S'' из G' должна соответствовать одна и та же подстановка в фундаментальной группе, что мы запишем как

$$S' \equiv S''. \tag{5}$$

Так как S' является некоторой комбинацией подстановок (3) в четном числе, а S'' — соответствующей комбинацией подстановок (4), то для того, чтобы эквивалентность (5) имела место, достаточно, чтобы

$$a \equiv d,\ b \equiv dabad,\ c \equiv dacad,\ d \equiv dad.$$

Но все эти эквивалентности сводятся к

$$ad \equiv 1$$

или, что то же, к

$$a \equiv d.$$

Затем мы видели, что подстановка S''' из G' должна отвечать тождественной подстановке фундаментальной группы, что я запишу, как

$$S''' \equiv 1.$$

Заметим тут же, что S''' есть не что иное, как ad, так что мы снова приходим к той же эквивалентности

$$ad \equiv 1,$$

единственной, которая (вместе с $T_i \equiv 1$) может быть выведена из рассмотрения особой точки A_i.

Нам остается изучить случай, когда точка

$$x = a, \quad y = A_i$$

есть коническая точка поверхности $z = F(x, y)$.

Построим чертеж, аналогичный рисунку 1. Когда точка y обойдет вокруг A_i, сплошные разрезы Oma и Ond перейдут в пунктирные разрезы $Om'a$ и $On'd$ (рис. 2). Рассуждая, как и выше, и рассматривая различные циклы, которые выходят из точки M_0 и проходят через один из разрезов и только через один, мы видим, что цикл, который проходит через

$Om'a$	пройдет	через	Ond, Oma, Ond,
Ob	«	«	Ond, Oma, Ond, Oma, Ob, Oma, Ond, Oma, Ond,
Oc	«	«	Ond, Oma, Ond, Oma, Oc, Oma, Ond, Oma, Ond,
$On'd$	«	«	Ond, Oma, Ond, Oma, Ond,
Oe	«	«	Oe
Of	«	«	Of.

Эти циклы, следовательно, будут отвечать подстановкам

$$dad,\ dadabadad,\ dadacadad,\ dadad,\ e,\ f,$$

т. е. T_i преобразует подстановки

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$$

в подстановки

$$dad,\ dadabadad,\ dadacadad,\ dadad,\ e,\ f.$$

Если поступать с конической точкой, как с обычной точкой многообразия, то мы все еще будем иметь

$$S' \equiv S'', \qquad S''' \equiv 1.$$

Первое условие влечет

$$a \equiv dad, \qquad b \equiv dadabadad, \qquad c \equiv dadacadad, \qquad d \equiv dadad. \tag{6}$$

Второе дает просто, что

$$ad \equiv 1,$$

что, впрочем, влечет условия (6).

Будем теперь рассматривать коническую точку как такую, которую запрещено проходить. Тогда мы получим еще $S' \equiv S''$ и, значит, условия (6), но $S''' \equiv 1$, т. е. $ad \equiv 1$, больше не имеет места.

Условия (6) сводятся к одному

$$(ad)^2 \equiv 1.$$

Таким образом, если мы запретим пересечение конической точки, то не получим уже $ad \equiv 1$, но мы будем иметь $(ad)^2 \equiv 1$.

Значит цикл, который обходит обе точки a и d, не является границей многообразия двух измерений, которое лежит в V, в то время как этот же цикл, взятый два раза, составляет границу многообразия двух измерений, лежащего в V, во всяком случае, если допустить, что все эти многообразия одного и двух измерений не берутся слишком далеко от конической точки.

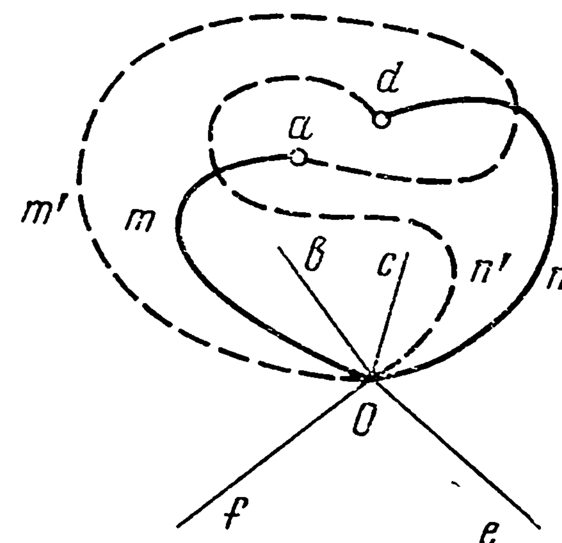


Рис. 2

Легко связать это с одним известным фактом. Мы уже заметили, что часть V вблизи конической точки гомеоморфна части многообразия $z^2=x^2-y^2$ или же $z^2=xy$ вблизи начала.

Обозначим через W многообразие четырех измерений $z^2=xy$, о котором предположим, что *из него удалена коническая точка*. Из того, что сказано выше, мы знаем, что на W имеется замкнутый цикл C размерности 1 такой, что эквивалентность

$$C \equiv 0$$

не имеет места, но верна эквивалентность

$$2C \equiv 0.$$

Рассмотрим тогда многообразие трех измерений

$$z^2 = xy, \ |x^2| + |y^2| = 1.$$

которое я обозначу W'. Это — многообразие, рассмотренное М. Хегором [ср.: Первое дополнение к «Analysis situs» (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1899, 13)].

Всякой точке x, y, z в W отвечает точка

$$\frac{x}{\sqrt{|x^2|+|y^2|}}, \quad \frac{y}{\sqrt{|x^2|+|y^2|}}, \quad \frac{z}{\sqrt{|x^2|+|y^2|}}.$$

Если точка W описывает цикл C, соответствующая точка W опишет цикл C', причем ясно, что если на W мы имеет $C \equiv 0$, то на W' мы имеем $C' \equiv 0$, и обратно. (Я напомню, что эквивалентность $C \equiv 0$ означает, что существует в W многообразие двух измерений, для которого C служит полной границей.)

Если же на W мы имеем $2C \equiv 0$ без того, чтобы $C \equiv 0$, то на W' будет иметься такой цикл C', что $2C' \equiv 0$, но неверно, что $C' \equiv 0$.

Теперь вспомним, что существование подобного цикла есть характеристическое свойство многообразия М. Хегора.

Ничего нет проще теперь, чем определить фундаментальную группу. Эта группа гомоморфна, причем не взаимно однозначно фуксовой группе, состоящей из всех комбинаций в *четном числе* подстановок a, b, c, d, e, f, которые мы считали связанными соотношениями

$$a^2=b^2=c^2=d^2=e^2=f^2=1, \ abcdef=1.$$

Но если две точки a и d могут поменяться местами, когда y обходит вокруг A_i, мы имеем $ad \equiv 1$, откуда

$$a \equiv d.$$

Я утверждаю, что то же соотношение будет выполнено, если a переходит в d, когда y описывает произвольный замкнутый контур, обходящий, скажем, не только одну, но две особые точки A_i и A_k. Если, например, a меняется местами с b, когда y обходит вокруг A_i, а b — с d, когда y обходит A_k (так что a становится на место d, когда y описывает контур, охватывающий обе эти точки), мы будем иметь

$$a \equiv b, \quad b \equiv d$$

и, следовательно,

$$a \equiv d,$$

что и требовалось доказать.

Если, таким образом, допустить, что точки a, b, c, d меняются между собой, то мы имеем

$$a \equiv b \equiv c \equiv d.$$

Если полином $F(x, y)$ неразложим, то корни уравнения

$$F(x, y)=0$$

(рассматриваемого как уравнение относительно x) все будут меняться между собой, когда y меняется произвольным образом.

Наши $2p+2$ особые точки (число которых равно шести: a, b, c, d, e, f, если $p=2$) все, таким образом, будут меняться друг с другом местами, и мы будем иметь

$$a \equiv b \equiv c \equiv d \equiv e \equiv f.$$

Произвольная подстановка фундаментальной группы, сводящаяся к четной комбинации a, b, c, d, e, f, сводится к четной степени a, т. е. к тождественной подстановке.

Таким образом, если полином F неразложим, фундаментальная группа сводится к одной подстановке, которая есть тождественная подстановка.

Если полином F разлагается на два сомножителя, $F=F_1F_2$, мы должны будем различать два типа особых точек: те, которые удовлетворяют уравнению $F_1=0$, и те, которые удовлетворяют уравнению $F_2=0$. Пусть, например, a, b, c, d удовлетворяют $F_1=0$, а e, f — $F_2=0$. Тогда

$$a \equiv b \equiv c \equiv d, \qquad e \equiv f.$$

Неверно, что $a \equiv e$ (если конические точки не рассматриваются как обычные), но мы будем иметь $(ae)^2 \equiv 1$, так что фундаментальная группа будет включать только две подстановки

$$1, \; ae.$$

Нужно еще выяснить, не уменьшается ли это число введением соотношения

$$abcdef=1. \tag{7}$$

Заметим, что нам нужно свести степень F к четной (при необходимости гомографической проекцией), поскольку число особых точек равно $2p+2$. Тогда нам приходится различать случай, когда оба полинома F_1 и F_2 имеют четную степень; тогда (7) сводится к тождеству, и фундаментальная группа не уменьшится, а также случай, когда F_1 и F_2 оба имеют нечетную степень; тогда соотношение (7) сводится к $ae \equiv 1$, и фундаментальная группа содержит теперь только одну подстановку.

Если F разлагается на три сомножителя: $F=F_1F_2F_3$, то пусть a будет одним из корней $F_1=0$, b — одним из корней F_2 и c — одним из корней F_3; мы будем иметь

$$a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv 1, \ (ab)^2 \equiv (bc)^2 \equiv (ac)^2 \equiv 1,$$

что показывает, что фундаментальная группа сводится к четырем подстановкам: 1, ab, bc, ac, причем это число подстановок может быть еще уменьшено, если два из сомножителей имеют нечетную степень.

Если, наконец, F разлагается в произведение из n сомножителей, $F=F_1F_2 \ldots F_n$, и если a_i — один из корней F_i, то

$$a_i^2 \equiv 1, \quad (a_ia_k)^2 \equiv 1 \quad (i, \ k=1, \ 2, \ \ldots, \ n). \tag{8}$$

Пусть тогда S — произвольная подстановка фундаментальной группы, она будет произведением из четного числа подстановок a_i. Но из соотношений (8) можно вывести, что

$$a_ia_k \equiv a_ka_i.$$

Таким образом, сомножители в S перестановочны и S записывается в виде

$$a_1^{\varepsilon_1}a_2^{\varepsilon_2} \ldots a_n^{\varepsilon_n} \quad (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n \equiv 0 \mod 2).$$

Далее, с помощью (8) можно редуцировать все ε к 0 и 1 так, что S сводится к произведению из k сомножителей $a_1, a_2, \ldots, a_k$, где все k сомножителей различны и k четно, а порядок их безразличен. Имеется 2^{n-1} возможных комбинаций. Фундаментальная группа состоит, следовательно, из 2^{n-1} подстановок. Но это число может быть еще уменьшено наполовину посредством соотношений (7), если два или больше сомножителей имеют нечетные степени.

О ЦИКЛАХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ
(Четвертое дополнение к «Analysis situs»)*

§ 1. Введение

Прекрасные работы Пикара по алгебраическим поверхностям давно уже сделали очевидной важность понятия циклов одного, двух или трех измерений. Мне пришло на мысль, что к этим вопросам можно было бы применить те принципы, которые я изложил в «Analysis situs» и в двух первых дополнениях к нему (Journal de l'École Polytechnique, tome du centenaire; Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, **13**; Proceedings of the London Mathematical Society, **32**), и я получил на этом пути определенные частные результаты, которые уже опубликовал в одной заметке в Comtes rendus и которые несколько дополняют результаты, полученные Пикаром.

Напомню, что если задано некоторое замкнутое многообразие p измерений V, то в нем можно брать другие многообразия, замкнутые или незамкнутые, с меньшим числом измерений; я обозначу через W_q многообразие q измерений, выбранное подобным образом в V.

Если $\sum W_q$ есть совокупность многообразий q измерений, а $\sum W_{q-1}$ — совокупность многообразий $q-1$ измерений, то конгруенция

$$\sum W_q \sum\equiv W_{q-1}$$

обозначает (по определению), что $\sum W_{q-1}$ образует полную границу совокупности многообразий $\sum W_q$. То же самое можно выразить, не вводя явным образом $\sum W_q$, а написав отношение

$$\sum W_{q-1} \sim 0,$$

которое я называю *гомологией*.

Тогда конгруенция

$$\sum W_q \equiv 0$$

будет обозначать, что многообразие $\sum W_q$ является замкнутым.

* Journal de mathématiques, 1902, 8, p. 169—214.

Если имеет место $\sum W_q \equiv 0$, без того, чтобы было $\sum W_q \sim 0$ (или $n \sum W_q \sim 0$, n — целое), то я скажу, что многообразие $\sum W_q$ образует цикл q измерений.

Пусть
$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$
— уравнение какой-либо алгебраической поверхности, которое определит многообразие V четырех измерений. Каждому значению y будет соответствовать риманова поверхность, имеющая, вообще говоря, род p. Я предполагаю, что род не уменьшается ни для $y=0$, ни для $y=\infty$, но что он уменьшается для q особых точек
$$y = A_1, \quad y = A_2, \quad \ldots, \quad y = A_q.$$

В плоскости y я проведу q сечений OA_1, OA_2, . . ., OA_q. Пусть S — одна из римановых поверхностей; если y будет изменяться *не пересекая сечений*, то поверхность S также будет изменяться, но оставаясь при этом гомеоморфной самой себе, и таким образом, чтобы различные римановы поверхности поточечно соответствовали друг другу взаимно однозначным и непрерывным образом.

Любая из этих поверхностей S подразделением может быть превращена в полиэдр P; пусть F будут его грани, B — ребра, C — вершины. Другая поверхность S' с заданным поточечным соответствием S также станет полиэдром P', грани, ребра и вершины которого будут соответствовать граням, ребрам и вершинам полиэдра P.

Предположим теперь, что y, выходя из точки, расположенной бесконечно близко от одного из сечений, описывает почти замкнутый контур и оканчивается в другой точке, расположенной бесконечно близко от начальной точки, *но с другой стороны сечения*. Поверхность S будет преобразована в иную поверхность, бесконечно мало отличающуюся от нее; однако точке первой поверхности будет соответствовать точка второй поверхности, значительно, вообще говоря, от нее отличающаяся.

Полиэдр P будет, таким образом, преобразован в полиэдр P', значительно от него отличающийся.

С другой стороны, различным точкам плоскости y, разрезанной нашими сечениями, мы можем сопоставить точки многоугольника Q с $2q$ сторонами $\alpha_i \beta_i$ и $\alpha_i \beta_{i+1}$, стороны $\alpha_i \beta_i$ и $\alpha_i \beta_{i+1}$ будут соответствовать двум сторонам сечения OA_i, точка α_i — точке A_i, точки β_i и β_{i+1} — нулю. Можно не добавлять, что я без различия буду писать β_1 или β_{q+1}, β_2 или β_{q+2} и т. д., стараясь сохранить симметрию обозначений.

Мы извлечем отсюда подразделение многообразия V, превращающее его в полиэдр H четырех измерений.

Каждой грани F_i полиэдра P будет соответствовать гиперклетка R, которую я также назову F_i. Каждому ребру B_i полиэдра P будет соот-

ветствовать клетка B_i полиэдра H; подобно этому, каждой стороне $\alpha_i\beta_i$ или $\alpha_i\beta_{i+1}$ многоугольника Q, взятой вместе с каждой из граней F_k полиэдра P, будет соответствовать клетка $\alpha_i\beta_i F_k$ или $\alpha_i\beta_{i+1}F_k$ полиэдра H.

Каждой вершине C_i полиэдра P соответствует грань C_i полиэдра H. Каждой вершине α_i или β_i многоугольника Q, взятой вместе с каждой из граней F_k полиэдра P, будет соответствовать грань $\alpha_i F_k$ или $\beta_i F_k$, принадлежащая H. Каждой стороне $\alpha_i\beta_i$ или $\alpha_i\beta_{i+1}$ многоугольника Q, взятой вместе с каждым из ребер B_k многогранника P, будет соответствовать грань $\alpha_i\beta_i B_k$ или $\alpha_i\beta_{i+1}B_k$, принадлежащая H.

Каждой вершине C_k из P, взятой вместе с каждой из сторон Q — $\alpha_i\beta_i$ или $\alpha_i\beta_{i+1}$ — будет соответствовать ребро H — $\alpha_i\beta_i C_k$ или $\alpha_i\beta_{i+1}C_k$. Каждой вершине α_i или β_i многоугольника Q, взятой вместе с каждым из ребер B_k многогранника P, будет соответствовать ребро H — $\alpha_i B_k$ или $\beta_i B_k$.

Наконец, каждой вершине Q — α_i или β_i — взятой вместе с каждой из вершин C_k многогранника P, будет соответствовать вершина H — $\alpha_i C_k$ или $\beta_i C_k$.

Однако следует сделать несколько замечаний. Прежде всего, для $y = A_i$ многогранник P вырождается таким образом, что некоторые из его граней исчезают. Если, например, грань F_k исчезает для $y = A_i$, то и соответствующая грань $\alpha_i F_k$ многогранника H более не существует.

Подобно этому, чего, однако, можно избежать, может случиться, что ребро B_k исчезает при $y = A_i$; в этом случае ребро $\alpha_i B_k$ не существует.

С другой стороны, дадим i некоторое определенное значение и заставим индекс k принимать все возможные значения. Рассмотрим, затем, с одной стороны, совокупность клеток $\alpha_i\beta_i F_k$, а с другой — совокупность клеток $\alpha_i\beta_{i+1}F_k$.

Эти две совокупности будут совпадать, хотя в общем случае клетка $\alpha_i\beta_i F_k$, рассматриваемая отдельно, не совпадает ни с клеткой $\alpha_i\beta_{i+1}F_k$, ни с какой-либо другой клеткой $\alpha_i\beta_{i+1}F_l$.

Может также случиться, что некоторые грани $\alpha_i\beta_i B$ будут совпадать с некоторыми гранями $\alpha_i\beta_{i+1}B$, или что некоторые ребра $\alpha_i\beta_i C$ будут совпадать с некоторыми ребрами $\alpha_i\beta_{i+1}C$.

С другой стороны, сравним различные грани $\beta_i F_k$; риманова поверхность S_0, соответствующая точке O, окажется разделенной на многогранники q различными способами, в зависимости от того, считается ли точка O соответствующей вершине β_1 или $\beta_2, \ldots, \beta_q$. Это те q способов подразделения, которые порождают грани βF. Итак, если m есть число граней P, то будем иметь тождества

$$\beta_i F_1 + \beta_i F_2 + \ldots + \beta_i F_m = \beta_j F_1 + \beta_j F_2 + \ldots + \beta_j F_m \tag{2}$$
$$(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ q).$$

Может случиться, что некоторые грани βF совпадают между собой. Но так будет не всегда. Может также случиться, что совпадают некоторые из ребер βB, или некоторые из вершин βC.

Наконец, вследствие вырождения P при $y=A_i$, может случиться, что совпадают некоторые грани $\alpha_i F$, или ребра $\alpha_i B$, или вершины $\alpha_i C$.

Резюмируя сказанное, видим, что наши частные многообразия, гиперклетки, клетки, грани, ребра или вершины, можно распределить на четыре категории в соответствии со следующей таблицей:

Тип	Категория			
Многообразия	1	$\alpha\beta$	α	β
Гиперклетка	F_k	—	—	—
Клетки	B_k	$\alpha_i\beta_i F_k$, $\alpha_i\beta_{i+1}F_k$	—	—
Грани	C_k	$\alpha_i\beta_i B_k$, $\alpha_i\beta_{i+1}B_k$	$\alpha_i F_k$	$\beta_i F_k$
Ребра	—	$\alpha_i\beta_i C_k$, $\alpha_i\beta_{i+1}C_k$	$\alpha_i B_k$	$\beta_i B_k$
Вершины	—	—	$\alpha_i C_k$	$\beta_i C_k$

Два многообразия, относящиеся к различным категориям, не могут совпадать. Два многообразия категории 1 всегда оказываются различными.

Два многообразия категории $\alpha\beta$ могут совпасть лишь в том случае, когда индекс i при α будет одним и тем же (без чего соответствующие значения y были бы различными на двух сечениях OA_i и OA_j); индекс при β, наоборот, должен быть различным; совпасть могут, например, $\alpha_i\beta_i F_k$ и $\alpha_i\beta_{i+1}F_h$, но не могут $\alpha_i\beta_i F_k$ и $\alpha_i\beta_i F_h$. Два многообразия категории α могут совпасть лишь в случае равенства индексов при α.

Прежде чем мы продолжим наши рассуждения, несколько изменим условия, чтобы избежать неудобств, которые могут возникнуть вследствие тождеств типа (2), имеющих место между двумя суммами граней, несмотря на то, что грани, взятые сами по себе, не будут попарно совпадать.

Пусть M будет какой-либо точкой сечения OA_i. Тогда соответствующая риманова поверхность S может быть представлена в виде полиэдра двумя способами, в зависимости от того, считается ли точка M лежащей на той или другой стороне сечения. Наложим друг на друга оба способа подразделения, одновременно рассматривая ребра, полученные в том и в другом случае. Мы получим этим путем определенный полиэдр, который я обозначу через P'; можно сделать так, что он остается гомеоморфным самому себе, в то время как точка M описывает все сечение OA_i (см. ниже, § 5).

Я обозначу через F'_k, B'_k, C'_k грани, ребра и вершины P'. Каждая из граней F первого способа подразделения разлагается на определенное число граней F'; то же самое будет и с каждой из граней F второго способа. Таким образом, каждая грань F' будет принадлежать одной из граней F первого способа, и притом только одной, и одной из граней F второго способа, и притом только одной.

Каждое из ребер B каждого из двух способов подразделения разлагается на определенное число ребер B'. Каждое ребро B' будет принадлежать по меньшей мере одному из ребер B одного из двух способов и, мо-

жет быть, одному ребру каждого способа; но ни в каком случае оно не будет принадлежать двум различным ребрам одного способа.

Наконец, вершины C' будут вершинами C обоих способов, к которым следует добавить точки пересечения ребер первого способа с ребрами второго.

Подобно этому, мы видели, что поверхность S_0, соответствующая точке O, оказывается представленной в виде полиэдра посредством q различных способов. Наложим друг на друга эти q способов подразделения; получим полиэдр P'', грани, ребра и вершины которого обозначаются через F''_k, B''_k, C''_k. Каждая из граней F, соответствующая одному из q способов, так же, как и каждая из граней F', соответствующих полиэдру P'_i, получаемому в случае принадлежности точки O сечению OA_i, разложится на некоторое число граней F''. Каждая грань F'' будет принадлежать одной из граней F' полиэдра P'_i, и только одной; одной из граней F каждого из q способов подразделения, и только одной.

Каждое из ребер B всех q способов и каждое из ребер B' различных полиэдров P'_i разложится на некоторое число ребер B''. Каждое ребро B'' будет принадлежать одному из ребер B одного из g способов и одному из ребер B' одного из полиэдров P'_i. Оно может одновременно принадлежать двум ребрам двух различных способов или двум ребрам B' двух различных полиэдров P', но никогда не будет принадлежать двум ребрам B одного и того же способа или двум ребрам B' одного и того же полиэдра.

Вершины C'' будут состоять из вершин q способов, к которым следует добавить точки пересечения ребер B, принадлежащих двум различным способам.

Что касается многообразий первой категории, то здесь менять нечего; перейдем к категории $\alpha\beta$. Каждая из клеток $\alpha_i\beta_iF_k$ или $\alpha_i\beta_{i+1}F_k$ окажется разложенной на частичные клетки $\alpha_i\beta_iF'_k$, $\alpha_i\beta_{i+1}F'_k$; подобно этому, каждая из граней $\alpha\beta B$ разложится на грани $\alpha\beta B'$. К ребрам $\alpha\beta C$ добавятся другие ребра, соответствующие, как мы это обнаружили несколько раньше, пересечениям двух ребер B, принадлежащих двум различным способам. Совокупность этих ребер составит то, что я назову ребрами $\alpha\beta C'$.

Ясно, что клетки $\alpha_i\beta_iF'_k$ совпадают с клетками $\alpha_i\beta_{i+1}F'_k$; то же относится и к граням $\alpha_i\beta_iB'_k$ и $\alpha_i\beta_{i+1}B'_k$, и к ребрам $\alpha_i\beta_iC'_k$ и $\alpha_i\beta_{i+1}C'_k$. Весьма существенно заметить, однако, что клетка $\alpha_i\beta_iF_k$ разлагается на частичные клетки $\alpha_i\beta_iF'$, которые, вообще говоря, не являются теми же, что частичные клетки, на которые разлагается клетка $\alpha_i\beta_{i+1}F_k$. Подобное замечание приложимо и к граням $\alpha_i\beta_iB_k$ и $\alpha_i\beta_{i+1}B_k$.

Перейдем к категории α. Когда точка M приходит в A, два способа разложения поверхности S на полиэдры P совпадают. С другой стороны, такой полиэдр, как я это уже указал, вырождается, так что некоторые из многообразий $\alpha_iF'_k$, $\alpha_i\beta'_k$, $\alpha_iC'_k$ могут исчезнуть, а некоторые совпадут.

Перейдем к категории β. Здесь мы видим частичные многообразия $\beta_iF''_l$, $\beta_iB''_k$, $\beta_iC''_k$.

Грани $\beta_1 F''_k$, $\beta_2 F''_k$, ..., $\beta_q F''_k$ совпадут; однако грань $\beta_1 F_k$ разложится на частичные грани $\beta F'''$, которые не являются, вообще говоря, теми же, что и те, на которые разложится грань $\beta_2 F_k$ или грань $\beta_3 F_k$ и т. д. То же относится и к ребрам.

Теперь я делаю, прежде всего, следующее замечание:

Многообразие категории α будет всегда гомологично сумме многообразий, принадлежащих другим категориям.

Пусть дана, например, грань $\alpha_i F'_k$; она принадлежит клетке $\alpha_i \beta_i F'_k$, которая включает, кроме того, грань $\beta_i F'_k$ и те из граней $\alpha_i \beta_i B'_h$, которые соответствуют ребрам B'_h, принадлежащим грани F'_k полиэдра P'. Итак, если имеется конгруенция (для этого полиэдра P')

$$F'_k \equiv \sum \varepsilon_q B'_q,$$

где ε_q — числа, равные $+1$, -1 или 0, то будет иметь место конгруенция

$$\alpha_i \beta_i F'_k \equiv \alpha_i F'_k - \beta_i F'_k + \sum \varepsilon_q \alpha_i \beta_i B'_k$$

и, следовательно, гомология

$$\alpha_i F'_k \sim \beta_i F'_k - \sum \varepsilon_q \alpha_i \beta_i B'_q.$$

Многообразия, которые входят в состав второго члена этой гомологии, принадлежат к категориям β и $\alpha\beta$, и теорема доказана; то же самое можно установить для $\alpha_i B'_k$ и $\alpha_i C'_k$.

§ 2. Циклы трех измерений

Я перехожу к разысканию гомологий и конгруенций между этими многообразиями. Начну со следующего замечания:

Всегда можно предположить, что наши конгруенции не содержат многообразия категории α.

Действительно, пусть

$$\sum \alpha_i A + H = 0$$

— конгруенция, где $\alpha_i A$ являются многообразиями p измерений категории α (соответственно многообразию A полиэдра P или P'), а H — комбинацией многообразий p измерений других категорий.

Тогда в нашем полиэдре P или P' получится конгруенция

$$A = \sum \varepsilon a,$$

где ε — целые, а a — многообразия, размерность которых на единицу меньше, чем A. Тогда будем иметь конгруенцию

$$\alpha_i \beta_i A \equiv \alpha_i A - \beta_i A + \sum \varepsilon \alpha_i \beta_i a,$$

откуда следует гомология

$$\alpha_i A \sim \beta_i A - \sum \varepsilon \alpha_i \beta_i a.$$

Комбинируя эту гомологию с конгруенцией

$$\sum \alpha_i A + H \equiv 0,$$

найдем конгруенцию

$$\sum \beta_i A - \sum \sum \varepsilon \alpha_i \beta_i a + H \equiv 0,$$

которая более не содержит многообразия категории α.

Это и требовалось доказать.

Чтобы получить гомологии между клетками, достаточно будет рассмотреть гомологии, выводимые из гиперклеток.

Предположим, что на полиэдре P существует конгруенция

$$F_k \equiv \sum \varepsilon_q B_q,$$

где ε равны $+1$, -1 или 0; для полиэдра четырех измерений будет существовать конгруенция

$$F_k \equiv \sum \varepsilon_q B_q + \sum \alpha_i \beta_i F_k - \sum \alpha_i \beta_{i+1} F_k$$

и, следовательно, гомология

$$\sum \varepsilon_q B_q \sim \sum \alpha_i \beta_{i+1} F_k - \sum \alpha_i \beta_i F_k. \qquad (1)$$

Напомним, впрочем, что $\alpha_i \beta_i F_k$, так же, как и $\alpha_i \beta_{i+1} F_k$, может быть заменено суммой нескольких частичных клеток $\alpha_i \beta_i F'$.

Отсюда вытекает первая конгруенция. Пусть $\sum \zeta_q B_q$ — любая комбинация клеток B_q, где ζ — целые. Я предполагаю, что в полиэдре P между соответствующими ребрами B_q имеется гомология

$$\sum \zeta_q B_q \sim 0,$$

что означает, что совокупность этих ребер (взятых каждое с коэффициентом ζ_q) образует на поверхности S замкнутый цикл, способный при помощи непрерывной деформации свестись к точке.

Тогда в полиэдре P будет существовать конгруенция

$$\sum \zeta_q B_q \equiv \sum \theta_k F_k,$$

где θ будут целыми; тогда в полиэдре четырех измерений будет конгруенция

$$\sum \theta_k F_k \equiv \sum \zeta_q B_q + \sum \theta_k \alpha_i \beta_i F_k - \sum \theta_k \alpha_i \beta_{i+1} F_k,$$

откуда следует гомология

$$\sum \zeta_q B_q \sim \sum \theta_k \alpha_i \beta_{i+1} F_k - \sum \theta_k \alpha_i \beta_i F_k.$$

Итак, если комбинация ребер B гомологична нулю в P, то соответствующая комбинация клеток B будет гомологична комбинации клеток категории $\alpha\beta$.

Попробуем теперь разыскать конгруенции между клетками.

Эти конгруенции имеют вид

$$\sum \zeta_q B_q + \sum \theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv 0, \tag{2}$$

где ζ и θ' — целые. *Я утверждаю, прежде всего, что в полиэдре P будет иметь место*

$$\sum \zeta_q B_q \equiv 0,$$

т. е. что совокупность ребер (под влиянием коэффициентов ζ*) должна образовать на поверхности S один или несколько циклов.*

Действительно, пусть в P имеет место конгруенция

$$B_q \equiv \sum \varepsilon_h C_h.$$

В нашем полиэдре четырех измерений мы будем иметь конгруенцию

$$B_q \equiv \sum \varepsilon_h C_h + H,$$

где H обозначает комбинацию граней, не относящихся к категории 1. С другой стороны, имеет место

$$\alpha_i \beta_i F'_k \equiv H,$$

где H имеет то же значение; отсюда выводим

$$\sum \zeta_q B_q + \sum \theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv \sum \zeta_q \varepsilon_h C_h + H,$$

где H имеет все то же значение.

Так как второй член должен тождественно равняться нулю, то, следовательно,

$$\sum \zeta_q \varepsilon_h C_h = 0.$$

Итак, в полиэдре P будет иметь место

$$\sum \zeta_q B_q \equiv \sum \zeta_q \varepsilon_h C_h = 0. \tag{3}$$

Это и следовало доказать.

Итак, на основании (2) должно иметь место

$$\sum \theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv \sum \zeta_q \alpha_i \beta_{i+1} B_q - \sum \zeta_q \alpha_i \beta_i B_q. \tag{4}$$

Пусть $S(M)$ — то, чем становится риманова поверхность S, когда точка y приходит в точку M на сечении OA_i. Пусть MF'_k — грань F'_k полиэдра P', соответствующая этому положению точки M; пусть MP — предел, к которому стремится полиэдр P, когда точка y приближается к M со стороны $\alpha_i\beta_i$ сечения. Пусть (MP) — предел, к которому стремится тот же полиэдр, когда точка y стремится к M со стороны $\alpha_i\beta_{i+1}$ сечения. Пусть MB_q и (MB_q) ребра B_q двух полиэдров MP и (MP).

Если теперь мы вернемся к конгруенции (4) и в каждом из входящих в нее многообразий сохраним лишь те точки, которые одновременно принадлежат $S(M)$, то получим новую конгруенцию

$$\sum \theta' MF'_k \equiv \sum \zeta_q (MB_q) - \sum \zeta_q MB_q. \tag{5}$$

Выражения $\sum\zeta_q(MB_q)$ и $\sum\zeta_q MB_q$ представляют два цикла, нанесенные на поверхности $S(M)$; пусть Ω'_i и Ω_i будут эти два цикла. Из конгруенции (5) можно вывести гомологию

$$\Omega'_i - \Omega_i \sim 0, \tag{6}$$

которая должна иметь место на поверхности $S(M)$.

Предположим, что y, выйдя из точки M стороны $\alpha_i\beta_i$ сечения, обходит особую точку A_i и возвращается в точку M с другой стороны сечения. Цикл $\sum\zeta_q B_q$, непрерывно деформируясь, будет иметь своим начальным положением $\sum\zeta_q MB_q = \Omega$, а конечным — $\sum\zeta_q(MB_q) = \Omega'_i$.

Значит, гомология выражает, что Ω_i гомологично преобразованному из него Ω'_i (с помощью преобразования, которое претерпевают циклы S, когда y обходит особую точку A_i). Цикл $\sum\zeta_q B_q$, следовательно, остается гомологичным самому себе при помощи этого преобразования, а также при помощи аналогичных преобразований, соответствующих другим особым точкам. Циклы, которые обладают этим свойством, можно было бы назвать *инвариантными циклами*. Позже мы вернемся к этому понятию. Мы видим, что каждой конгруенции вида (2) соответствует инвариантный цикл. *Я утверждаю, что, обратно, каждому инвариантному циклу соответствует конгруенция вида* (2).

Действительно, пусть $\sum\zeta_q B_q$ будет некоторый инвариантный цикл. На $S(M)$ будем иметь

$$\sum \zeta_q (MB_q) \sim \sum \zeta_q MB_q \tag{6}$$

и, следовательно, можно найти целые θ' такие, что

$$\sum \theta'_k MF'_k \equiv \sum \zeta_q (MB_q) - \sum \zeta_q MB_q. \tag{5}$$

Отсюда выводится конгруенция

$$\sum \theta'_k \alpha_i\beta_i F'_k \equiv \sum \zeta_q \alpha_i\beta_{i+1} B_q - \sum \zeta_q \alpha_i\beta_i B_q + \sum \theta'_k \alpha_i F'_k - \sum \theta'_k \beta_i F'_k.$$

Знак $\sum$ относится здесь к индексу k, индекс i постоянный; но отсюда можно вывести

$$\sum \zeta_q B_q + \sum\sum \theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv \sum\sum \theta'_k \alpha_i F'_k - \sum\sum \theta'_k \beta_i F'_k;$$

двойной знак $\sum$ относится теперь к обоим индексам i и k, так как, очевидно, имеем

$$\sum \zeta_q B_q \equiv \sum\sum \zeta_q \alpha_i \beta_i B_q - \sum\sum \zeta_q \alpha_i \beta_{i+1} B_q.$$

Нам остается доказать, что должно иметь место

$$\sum \theta'_k \alpha_i F'_k = 0, \quad \sum\sum \theta'_k \beta_i F'_k = 0.$$

Рассмотрим сперва то, что касается первого из этих равенств.

Вернемся к конгруенции (5) и заставим точку M стремиться к A_i; в пределе MF'_k сведется к $\alpha_i F'_k$, а Ω_i совпадет с Ω'_i и с $\sum \zeta_q \alpha_i B_q$; тогда конгруенция (5) примет вид

$$\sum \theta'_k \alpha_i F'_k \equiv 0. \tag{7}$$

Исследуем значение этой конгруенции. Предположим сперва, что для $y = A_i$ поверхность S не распадается, т. е. что кривая

$$f(x, A_i, z) = 0$$

будет неразложимой. Тогда конгруенция не сможет иметь места лишь при условии двух предположений: или существует тождество

$$\sum \theta'_k \alpha_i F'_k = 0,$$

я хочу сказать этим, что в первый член могут входить (с коэффициентом θ', отличным от нуля) лишь грани $\alpha_i F'_k$, которые исчезают вследствие вырождения полиэдра P'_i так, как я объяснил это выше; или же комбинация $\sum \theta'_k \alpha_i F'_k$ представит (один или несколько раз) целиком всю риманову поверхность и, таким образом,

$$\sum \theta'_k \alpha_i F'_k = nS.$$

Но для поверхности S, соответствующей точке M, мы можем записать

$$S = \sum MF'_k,$$

так как совокупность граней F'_k полиэдра P'_i должна покрыть целиком всю поверхность S.

Кроме того, имеет место

$$\sum MP'_k \equiv 0.$$

Этот даст нам конгруенцию

$$\sum MF'_k(\theta'_k - n) \equiv \Omega'_i - \Omega_i \tag{5bis}$$

и, с другой стороны, когда M входит в A_i,

$$\sum \alpha_i F'_k = S$$

и, следовательно,

$$\sum (\theta'_k - n)\,\alpha_i F'_k = 0.$$

Таким образом, второе предположение оказывается сведенным к первому; для этого достаточно будет изменить θ'_k на $\theta'_k - n$, что допустимо, так как конгруенция (5) оказывается при этом замененной на конгруенцию (5bis), имеющую тот же вид.

Предположим теперь, что кривая $F(x, A_i, z)$ распадается и, например, что соответствующая риманова поверхность распадается на две частичных поверхности S_1 и S_2.

Тогда конгруенция (7) могла бы иметь место, если только

$$\sum \theta'_k \alpha_i F'_k = n_1 S_1 + n_2 S_2,$$

где n_1 и n_2 — целые. Этого, во всяком случае, можно было бы опасаться, но многими способами можно убедиться, что так не будет.

Проще всего рассуждать следующим образом.

Будем исходить из римановой поверхности S_0, которая соответствует точке O; будем изменять непрерывным образом y от O к A_i, следуя по сечению OA_i. Тогда риманова поверхность S деформируется непрерывным образом, оставаясь гомеоморфной сама себе. Пусть $S(M)$ будет поверхность S, соответствующая точке M. Каждой точке $S(M)$ можно сопоставить точку S_0, так как от $S(M)$ к S_0 можно пройти путем непрерывной деформации. Рассмотрим на $S(M)$ два цикла Ω_i и Ω'_i; этим двум циклам на S_0 будут соответствовать два замкнутых цикла, которые я обозначу U_i и U'_i.

Когда точка M будет пробегать OA_i непрерывным движением, два цикла U_i и U'_i сместятся непрерывным движением по поверхности S_0. Когда M будет весьма близко от A_i, два цикла Ω_i и Ω'_i и, следовательно, два цикла U_i и U'_i окажутся очень близкими друг от друга. Когда точка M войдет в O, два цикла Ω_i и U_i станут идентичными и сведутся к

$$\sum \zeta_q \beta_i B_q = \Omega_i^0;$$

два цикла Ω'_i и U'_i станут идентичными и сведутся к

$$\sum \zeta_q \beta_{i+1} B_q = \Omega_{i+1}^0.$$

Предположим, что точка M изменяется от A_i до некоторой точки M_0 сечения OA_i; два цикла, U_i и U'_i, сперва совпадавшие, разойдутся и заметут при этом некоторую область R поверхности S_0; этой области будет на $S(M_0)$ соответствовать некоторая область, образованная определенным числом граней соответствующего полиэдра P'_i, так как она ограничена двумя циклами Ω_i и Ω'_i, образованными ребрами этого полиэдра. Мы можем написать конгруенцию

$$\sum \theta'_k M F'_k \equiv \Omega'_i - \Omega_i, \tag{5}$$

где $\sum \theta'_k M_0 F_k$ представит точно ту область, которую мы только что определили.

Так как эта область сводится к нулю при M, стремящемся к A_i, то мы будем во всех случаях иметь

$$\sum \theta'_k \alpha_i F'_k = 0. \tag{8}$$

Покажем теперь, что

$$\sum \sum \theta'_k \beta_i F'_k = 0$$

и изучим для этого сумму $\sum \theta'_k \beta_i F'_k$.

В соответствии с тем, что уже было сказано, эта сумма является той областью, которая была заметена на поверхности S_0 двумя циклами U_i и U'_i, когда точка M изменялась от A_i до O; она ограничена двумя циклами, Ω_i^0 и Ω_{i+1}^0.

Очевидно, будут иметь место конгруенции

$$\sum \theta'_k \beta_1 F'_k \equiv \Omega_2^0 - \Omega_1^0,$$
$$\sum \theta'_k \beta_2 F'_k \equiv \Omega_3^0 - \Omega_2^0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\sum \theta'_k \beta_q F'_k \equiv \Omega_1^0 - \Omega_q^0,$$

откуда, путем сложения, получим

$$\sum \sum \theta'_k \beta_i F'_k \equiv 0.$$

Эта конгруенция показывает нам, что комбинация $\sum \sum \theta'_k \beta_i F'_k$ сводится к нулю или к поверхности S_0, взятой некоторое число раз.

Выясним, может ли иметь место это последнее предположение. Допустим, что y описывает замкнутый контур, оставаясь бесконечно близко от сечений OA_i, проходя сперва по одной из сторон OA_1, затем по другой, затем по обеим сторонам OA_2 и так далее и, наконец, по двум сторонам OA_q. Рассмотрим некоторый цикл на соответствующей римановой поверхности; этот цикл сперва совпадет с Ω_1^0, когда y окажется в O с первой стороны от OA_1; когда пройдет по первой стороне OA_1, этот

цикл деформируется непрерывным образом; это и будет наш цикл Ω_1, а соответствующие точки на S_0 образуют цикл U_1. Когда точка y возвратится из A_i в O по второй стороне OA_1, этот цикл будет не чем иным, как нашим циклом Ω_1', и соответствующие точки на S_0 образуют цикл U_1'. Когда y окажется в O, этот цикл совпадет с Ω_2^0. Когда y пройдет по двум сторонам OA_2, цикл совместится сперва с Ω_2, затем с Ω_2', и соответствующие точки на S_0 образуют цикл U_2, затем цикл U_2' и так далее. Нам нужно определить, описывает ли этот подвижный цикл, который последовательно совпадает с U_1, U_1', U_2, U_2', . . . , U_q, U_q' и, в своем начальном положении, как и в конечном положении, с Ω_1^0, целиком поверхность S_0.

Чтобы разобраться в этом вопросе, посмотрим, почему деформируются циклы.

Рассмотрим уравнение

$$f(x, y, z)=0,$$

где y считается постоянным; особые точки переменной z как функции x задаются уравнением

$$\frac{df}{dz}=0.$$

Рассмотрим некоторый цикл, нанесенный на римановой поверхности. Этому циклу будет соответствовать на плоскости x какой-то контур, который охватит некоторое число этих особых точек. При изменении y последние будут перемещаться и если мы не хотим, чтобы цикл проходил через одну из них, то его надо деформировать так, чтобы он проходил возле этих подвижных особых точек. Какими бы ни были перемещения этих особых точек, если только никакие две из них ни в какой момент не совпадают, всегда есть возможность так непрерывно деформировать цикл, что он никогда не пройдет ни через одну из этих точек. Подобно этому можно было бы выбрать некоторое число фиксированных точек и так деформировать цикл, чтобы он никогда не проходил ни через одну из этих особых точек, ни через одну из фиксированных точек, если только особые точки никогда не совмещаются ни друг с другом, ни с фиксированными точками.

При изменяющемся y особые точки будут смещаться, и соответствующие точки на S_0 также будут смещаться. Они не смогут совпасть, если только y не попадет в одну из точек A_i, но мы постараемся изменять y так, чтобы y весьма близко подходило к ним, но никогда их не достигало. С другой стороны, эти точки опишут линии, и мы сможем найти на S_0 область ρ, которая не будет пересечена ни одной из этих линий. Точки этой области ρ и будут играть роль фиксированных точек, о которых только что шла речь. Итак, мы сможем деформировать наш цикл таким образом, чтобы он никогда не проходил ни через одну из особых точек и никогда не проникал ни в одну из областей ρ. Следовательно, он не может поро-

дить целиком поверхность S_0. Поэтому наше предположение следует отбросить, а следовательно, всегда будет иметь место тождество

$$\sum\sum \theta'_k \beta_i F'_k = 0. \tag{9}$$

Чтобы покончить с этим, заметим, *что не могут иметь места конгруенции только между клетками категории* $\alpha\beta$. Действительно, пусть

$$\sum \theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv 0$$

— подобная конгруенция; сперва мы найдем

$$\sum \theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv \sum \theta'_k \varepsilon'_h \alpha_i \beta_i B'_h + \sum \theta'_k \alpha_i F'_k - \sum \theta'_k \beta_i F'_k,$$

так что будем иметь

$$\sum \theta'_k \varepsilon'_h \alpha_i \beta_i B'_h = 0, \quad \sum \theta'_k \alpha_i F'_k = 0, \quad \sum \theta'_k \beta_i F'_k = 0$$

и, следовательно, в полиэдре P'_i [рассуждая подобно тому, как было сделано при выводе (5) из (4)], получим

$$\sum \theta'_k M F'_k \equiv 0.$$

Совокупность граней MF'_k (вследствие влияния численных коэффициентов θ'_k) полиэдра P'_i должна, следовательно, соответствовать нулю, т. е. образовывать замкнутую поверхность, которая может быть лишь полностью поверхностью $S(M)$. Совокупность $\sum \theta'_k \alpha_i F'_k$ представит тогда полную поверхность $S(A_i)$, а следовательно, не может иметь места

$$\sum \theta'_k \alpha_i F'_k = 0.$$

Итак, *наша конгруенция невозможна.*

Нам известно, что для того чтобы получить все циклы трех измерений, достаточно найти комбинации клеток, конгруентных нулю, однако ему не гомологичных.

Подобная комбинация должна, во-первых, содержать клетки категории 1, в чем мы и убедимся. Пусть $\sum \zeta_q B_q$ будет совокупность этих тел; совокупность соответствующих ребер должна образовать цикл на поверхности S (это — цикл Ω_i). Этот цикл не должен быть гомологичным нулю. Действительно, если бы этот цикл был гомологичным нулю, то комбинация $\sum \zeta_q B_q$ была бы гомологична комбинации клеток категории $\alpha\beta$. Следовательно, можно было бы заменить $\sum \zeta_q B_q$ этой комбинацией в первом члене нашей конгруенции. Но тогда этот первый член не содержал бы иных клеток, кроме категории $\alpha\beta$, что невозможно в соответствии с изложенным выше.

Наконец, цикл Ω_i должен быть *инвариантным*, т. е. он должен переходить в гомологичный цикл Ω'_i при обходе y вокруг A_i. Но когда y об-

ходит одну из особых точек A_i, циклы римановой поверхности подвергаются одной из подстановок *группы Пикара*. Следовательно, цикл Ω_i должен быть инвариантным относительно группы Пикара.

Итак, каждому циклу трех измерений V соответствует цикл поверхности S, инвариантный относительно группы Пикара.

Обратно, рассмотрим цикл, инвариантный относительно группы Пикара. Если Ω_i является одним из положений этого цикла на полиэдре P'_i и если Ω'_i является тем, чем становится Ω_i после обхода y вокруг A_i, то будет иметь место

$$\Omega_i \sim \Omega'_i.$$

Можно было бы найти целые θ' так, чтобы удовлетворялась конгруенция (5). Будет иметь место также и конгруенция (4). Но мы видели, что при этих условиях имеют место тождества (8) и (9), так что конгруенцию (4) можно записать

$$\sum\sum \theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv \sum \zeta_q \alpha_i \beta_{i+1} B_q - \sum \zeta_q \alpha_i \beta_i B_q,$$

откуда

$$\sum \zeta_q B_q + \sum\sum \theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv 0.$$

Первый член этой конгруенции представляет цикл трех измерений.

Резюмируем: группа Пикара допускает столько же различных инвариантных циклов, сколько в многообразии V имеется различных циклов трех измерений.

Наилучшим способом представления этих циклов трех измерений будет предположение, что имеет место не только

$$\Omega_i \sim \Omega'_i,$$

но и тождественно

$$\Omega_i = \Omega'_i.$$

это предположение мы можем сделать всегда, ввиду того, что способ установления соответствия между точками римановых поверхностей был совершенно произволен.

При этих условиях y можно давать все возможные значения.

Каждому значению будет соответствовать одно положение цикла Ω_i, и, вследствие инвариантности этого цикла, *двум бесконечно близким точкам, расположенным с одной и с другой стороны одного из сечений, будут соответствовать два бесконечно мало отличающихся друг от друга положения цикла Ω_i.*

Различные положения этого цикла породят, следовательно, замкнутый цикл трех измерений.

§ 3. Циклы двух измерений

Для того чтобы найти все циклы двух измерений, достаточно будет отыскать все комбинации граней, которые конгруентны нулю, но не гомологичны ему.

Мы можем предположить сперва, что эта комбинация не содержит граней категории α; ибо, согласно тому, что мы установили в начале предыдущего параграфа, каждая грань категории α гомологична с гранями категорий $\alpha\beta$ и β.

Теперь следует установить, могут ли эти комбинации содержать грани категории 1. Сперва я замечу следующее: пусть C_1 и C_2 будут двумя любыми вершинами полиэдра P; можно всегда перейти от одной из них к другой, следуя по некоторым ребрам полиэдра P так, что мы будем иметь в этом полиэдре конгруенцию

$$C_1 - C_2 \equiv \sum \zeta_q B_q,$$

где второй член представляет совокупность ребер, путем которых можно перейти от C_1 к C_2. В более общем случае можно было бы найти такие целые ζ, что

$$\sum \varepsilon_k C_k \equiv \sum \zeta_q B_q, \tag{1}$$

если только ε будут целыми, удовлетворяющими условию

$$\sum \varepsilon_k = 0,$$

так как тогда можно рассматривать $\sum \varepsilon_k C_k$ как сумму разностей, подобных $C_1 - C_2$.

Рассмотрим теперь в многообразии V комбинацию граней $\sum \varepsilon_k C_k$ и предположим, что $\sum \varepsilon_k = 0$. Тогда можно будет найти целые ζ, удовлетворяющие конгруенции (1); тогда в многообразии V будет иметь место

$$\sum \zeta_q B_q \equiv \sum \varepsilon_k C_k + \sum \zeta_q \alpha_i \beta_i B_q - \sum \zeta_q \alpha_i \beta_{i+1} B_q$$

и, следовательно,

$$\sum \varepsilon_k C_k \sim \sum \zeta_q \alpha_i \beta_{i+1} B_q - \sum \zeta_q \alpha_i \beta_i B_q,$$

что показывает, что комбинация $\sum \varepsilon_k C_k$ гомологична комбинации граней категории $\alpha\beta$.

Предположим теперь, что имеет место конгруенция вида

$$\sum \varepsilon_k C_k + H = 0,$$

где H представляет комбинацию граней категорий $\alpha\beta$ и β. Если имеет место $\sum \varepsilon_k = 0$, то в первом члене можно заменить $\sum \varepsilon_k C_k$ комбинацией граней категорий β и $\alpha\beta$, гомологичной ему; тогда этот первый член более не будет содержать граней категории 1.

Если бы теперь у нас были две конгруенции того же вида

$$\sum \varepsilon_k C_k + H \equiv 0, \quad \sum \varepsilon'_k C_k + H' \equiv 0,$$

то мы нашли бы два таких целых n и n', что

$$n \sum \varepsilon_k + n' \sum \varepsilon'_k = 0,$$

и тогда из конгруенции

$$\sum (n\varepsilon_k + n'\varepsilon'_k) C_k + nH + n'H' \equiv 0,$$

которая является комбинацией двух предшествующих конгруенций, можно было бы исключить грани категории 1.

Резюмируем: если имеются конгруенции, содержащие грани первой категории, то среди них не может оказаться двух различных.

Подвергнем теперь специальному рассмотрению конгруенции, в которых не фигурируют грани категорий β и $\alpha\beta$. Пусть

$$\sum \theta'_k \alpha_i \beta_i B'_k + \sum \theta''_k \beta_i F''_k \equiv 0 \tag{2}$$

— одна из этих конгруенций.

Рассмотрим общие точки многообразий, входящих в эту конгруенцию, и поверхности $S(M)$; сведем каждое из этих многообразий к этим общим точкам. Тогда

$$\sum \theta'_k M B'_k \equiv 0. \tag{3}$$

Действительно, так как точка M является точкой сечения OA_i, отличной от 0, то поверхность $S(M)$ не имеет ни одной общей точки с гранями категории β, для которых y может принять лишь значение 0. Подобно этому, поверхность $S(M)$ не будет иметь ни одной общей точки с гранями $\alpha_j \beta_j B'_k$, где индекс j отличен от i, так как для этих граней y должно лежать на сечении OA_j, тогда как M находится на сечении OA_i.

Конгруенция (3) означает, что на поверхности $S(M)$ совокупность ребер B'_k полиэдра P'_i (с коэффициентами θ') должна образовать замкнутый цикл. Пусть этот цикл будет K_i.

Заметим, однако, что

$$\sum \theta'_k \alpha_i \beta_i B'_k \equiv \sum \theta'_k \alpha_i B'_k + H,$$

где H — совокупность ребер категорий β и $\alpha\beta$. Подобно этому,

$$\sum \theta''_k \beta_i F''_k \equiv H',$$

где H' — комбинация ребер категории β.

Тогда имеет место

$$\sum \theta'_k \alpha_i \beta_i B'_k + \sum \theta''_k \beta_i F''_k \equiv \sum \theta'_k \alpha_i B'_k + H + H',$$

так что не может быть конгруенции (2), если имеет место тождество

$$\sum \theta'_k \alpha_i B'_k = 0. \tag{4}$$

Так как отсутствует какое-либо соотношение между ребрами $\theta'_k \alpha_i B'_k$, принадлежащими к различным индексам i, то тождество (4) должно иметь место, если индекс i получает определенное значение, а суммирование распространяется только на различные значения индекса k.

Тождество (4) означает тогда, что если точка M стремится к A_i, то цикл K_i стремится уменьшиться до нуля.

Действительно, когда M приведена к A_i, поверхность $S\,(M)$ вырождается и ее род снижается; очевидно, некоторые из этих циклов исчезают. Посмотрим, как этот факт связывается с изучением группы Пикара. Пусть S_i будет подстановка этой группы, соответствующая особой точке A_i; она переведет цикл ω_h, например, в цикл

$$\omega'_h = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_{2p}\omega_{2p}.$$

Итак, для $M = A_i$ будет иметь место

$$\omega_h' = \omega_h,$$

а это означает, что для $M = A_i$ цикл $\omega'_h - \omega_h$ исчезает.

Получим ли мы подобным образом все циклы, которые исчезают при $M = A_i$ и которые я назову *исчезающими циклами*?

Пикар показал (т. I, стр. 82), что всякую алгебраическую поверхность с помощью бирационального преобразования можно привести к тому, что она будет иметь лишь простые особенности, т. е. двойную кривую с тройными точками.

Он показал затем (стр. 95), как для подобной поверхности определяются особые точки A_i и подстановки группы Пикара, которые соответствуют каждой из них.

Получается, что в этом случае есть только один исчезающий цикл, который порожден именно так, как я только что показал.

Если бы нужно было рассмотреть поверхности, имеющие более сложные особенности (например, конические точки), то могло бы оказаться, что есть и другие подобные циклы.

Предположим, например, что имеется обычная поверхность с двумя особыми точками, соответствующими одной и той же подстановке группы Пикара. Если изменять эту поверхность так, чтобы в пределе обе эти особые точки совпали, то предельная поверхность включит тогда исчезающий цикл, который не возникает таким способом.

Если теперь мы рассмотрим некоторый исчезающий цикл $\sum \theta'_k M B'_k$, то будет иметь место конгруенция

$$\sum \theta'_k \alpha_i \beta_i B'_k \equiv -\sum \theta'_k \beta_i B'_k. \qquad (5)$$

Каждой особой точке A_i сопоставим исчезающий цикл K_i и, следовательно, конгруенцию вида (5). Сложим все эти конгруенции. Получим

$$\sum\sum \theta'_k \alpha_i \beta_i B'_k \equiv -\sum\sum \theta'_k \beta_i B'_k.$$

Предположим, что совокупность циклов K_i будет гомологична нулю, так что на поверхности S будет иметь место

$$\sum K_i \sim 0,$$

на S_0 будет

$$\sum\sum \theta'_k \beta_i B'_k \sim 0,$$

т. е. можно найти такие коэффициенты θ'', что

$$\sum\sum \theta'_k \beta_i B'_k \equiv \sum \theta''_k \beta_i F''_k;$$

тогда будет иметь место

$$\sum\sum \theta'_k \alpha_i \beta_i B'_k + \sum \theta''_k \beta_i F''_k \equiv 0. \qquad (2)$$

Итак, каждой комбинации исчезающих циклов K_i *такой, что* $\sum K_i \sim 0$, *будет соответствовать конгруенция вида* (*2*).

К полученным таким образом конгруенциям следует добавить еще конгруенцию

$$\sum \beta F''_k \equiv 0,$$

которая представляет цикл двух измерений, образованный всей поверхностью S_0. Все конгруенции вида (2), очевидно, будут комбинациями тех, которые мы теперь получили.

Каким же будет теперь условие того, чтобы две конгруенции вида (2) стали различными? Иными словами, каковы конгруенции этого вида, первые члены которых гомологичны нулю?

Для того чтобы получить все гомологии вида

$$\sum \theta'_k \alpha_i \beta_i B'_k + \sum \theta''_k \beta_i F''_k \sim 0,$$

необходимо отыскать все конгруенции между клетками и гранями вида

$$\sum \theta'_k \alpha_i \beta_i B'_k + \sum \theta''_k \beta_i F''_k \equiv \sum \varepsilon_k B_k + \sum \zeta'_k \alpha_i \beta_i F'_k. \qquad (6)$$

Если мы заменим все многообразия, фигурирующие в конгруенции (6), их общей частью с некоторой поверхностью S, соответствующей значению y, не лежащему ни на одном из сечений, то получим

$$\sum \varepsilon_k B_k \equiv 0,$$

что означает, что совокупность ребер $\sum \varepsilon_k B_k$ составляет замкнутый цикл на многограннике P. Пусть $K(y)$ будет этим циклом.

Пусть $K(M_i)$ [или $K'(M_i)$] — предел, к которому стремится этот цикл, когда точка y приближается к точке M_i, принадлежащей сечению OA_i, по первой стороне этого сечения (или по второй стороне), так что $K(M_i)$ [или $K'(M_i)$] представляют совокупность точек, общих поверхности $S(M)$ и $\sum \varepsilon_k \alpha_i \beta_i B_k$ (или $\sum \varepsilon_k \alpha_i \beta_{i+1} B_k$).

Тогда будет иметь место (так как $\sum \varepsilon_k B_k$ представляет замкнутый цикл на многограннике P)

$$\sum \varepsilon_k B_k \equiv \sum \varepsilon_k \alpha_i \beta_i B_k - \sum \varepsilon_k \alpha_i \beta_{i+1} B_k, \tag{7}$$

откуда

$$\sum \zeta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv \sum \theta'_k \alpha_i \beta_i B'_k + \sum \varepsilon_k \alpha_i \beta_{i+1} B_k - \sum \varepsilon_k \alpha_i \beta_i B_k + \sum \theta''_k \beta_i F''_k \tag{8}$$

или, если привести все многообразия к их общим частям с поверхностью $S(M_i)$,

$$\sum \zeta'_k M_i F'_k \equiv \sum \theta'_k M_i B'_k + K'(M_i) - K(M_i); \tag{9}$$

т. е. на многограннике P'_i должно иметь место

$$K_i \sim K(M_i) - K'(M_i), \tag{10}$$

так как $\sum \theta'_k M_i B'_k$ является не чем иным, как циклом, который мы несколько выше обозначили через K_i.

Если, к тому же, условие (10) выполняется, то можно найти числа ζ' так, чтобы удовлетворялась конгруенция (9); тогда, если M_i будет стремиться к A_i,

$$\sum \zeta'_k \alpha_i F'_k \equiv \sum \theta'_k \alpha_i B'_k + K'(A_i) - K(A_i).$$

Но, по предположению, K_i — исчезающий цикл для особой точки A_i; тогда

$$\sum \theta'_k \alpha_i B'_k = 0.$$

Впрочем,

$$K'(A_i) = K(A_i) = \sum \varepsilon_k \alpha_i B_k.$$

Итак,

$$\sum \zeta'_k \alpha_i F'_k \equiv 0,$$

а это означает, что совокупность граней $\sum\zeta'_k\alpha_i P'_k$ образует замкнутую поверхность. Это может случиться лишь в том случае, если

$$\sum \zeta'_k\alpha_i F'_k = 0 \tag{11}$$

или если $\sum\zeta'_k\alpha_i F'_k$ представляет всю поверхность $S(K_i)$ целиком, или одну из составляющих этой поверхности в случае, если она распадается (см. выше, стр. 651).

Если мы оставим в стороне этот последний случай, который не представится для поверхностей лишь с обычными особенностями, к которым Пикар приводит все прочие, и который, к тому же, можно исследовать так, как это было показано выше (стр. 651), то, очевидно, всегда можно сделать предположение, что

$$\sum \zeta'_k\alpha_i F'_k = nS(A_i),$$

где n — целое, или

$$\sum (\zeta'_k - n)\,\alpha_i F'_k = 0.$$

Однако в конгруенции (9) можно заменить ζ'_k на $\zeta'_k - n$, причем конгруенция продолжает иметь место, так как, при замкнутости поверхности $S(M_i)$, имеется

$$\sum M_i F'_k \equiv 0.$$

Итак, мы можем всегда предположить, что тождество (11) имеет место. Отсюда следует

$$\sum \zeta'_k\alpha_i\beta_i F'_k \equiv \sum \zeta'_k\alpha_i F'_k + \sum \theta'_k\alpha_i\beta_i B'_k + \sum \varepsilon_k\alpha_i\beta_{i+1}B_k -$$
$$- \sum \varepsilon_k\alpha_i\beta_i B_k - \sum \zeta'_k\beta_i F'_k.$$

Но, если мы примем во внимание тождество (11) и если разложим грани F' на грани F'', то, полагая

$$-\sum \zeta'_k\beta_i F'_k = \sum \theta''_k\beta_i F''_k,$$

мы найдем опять конгруенцию (8) и, добавив к ней конгруенцию (7), получим в конце концов конгруенцию (6).

Таким образом, каждой системе гомологий, подобных (10), соответствует гомология между гранями, и нет никаких других.

Проверим также, что комбинация $\sum\beta_i F''_k$, представляющая риманову поверхность S_0 целиком, и которая, следовательно, конгруентна нулю, не гомологична нулю.

Если бы, в действительности, имелась конгруенция вида (6), причем все θ' были нулями, то должна была бы иметь место гомология вида (10), с циклами K_i, равными нулю; это значит, что цикл $K(y)$ был бы инвариантным для всех подстановок группы Пикара.

Циклы $K'(M_i)$ и $K(M_i)$ будут тогда теми, которые мы обозначили в предыдущем параграфе через Ω'_i и Ω_i; мы найдем далее гомологию (5) предыдущего параграфа, которая будет отличаться от гомологии (9) предыдущего параграфа лишь своими обозначениями. Действительно, для того чтобы перейти от одной к другой, достаточно аннулировать θ', заменить $K'(M_i)$ на Ω'_i, $K(M_i)$ на Ω_i, и написать θ'_k вместо ζ'_k. Для того чтобы перейти к обозначениям предыдущего параграфа, надо, наконец, писать $\zeta_q B_q$ вместо $\varepsilon_k B_k$.

В этом случае мы будем иметь между нашими клетками конгруенцию (2) предыдущего параграфа, которая записывается

$$\sum \zeta_q B_q + \sum \theta_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv 0,$$

или, возвращаясь к обозначениям предыдущего параграфа,

$$\sum \varepsilon_k B_k + \sum \zeta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv 0.$$

Это показывает, что первый член (6) должен тождественно равняться нулю, т. е. что не только θ', но и θ'' должны быть нулями.

Таким образом, каждая гомология между гранями $\beta F''$ сводится к тождеству и, в частности, не может иметь места

$$\sum \beta_i F''_k \sim 0,$$

что и требовалось доказать.

Прежде чем закончить исследование, мне надо еще заняться конгруенциями, в которые входят клетки категории 1. Убедимся, что не может быть более одной такой конгруенции, или, лучше сказать, если бы существовали две такие конгруенции, то они не были бы различными и можно было бы перейти от одной из них к другой путем добавления гомологии.

Посмотрим, существует ли подобная конгруенция

$$\sum \varepsilon_k C_k + H \equiv 0, \tag{12}$$

где H — комбинация граней категорий $\alpha\beta$ и β. Предположим сперва, что $\sum \varepsilon_k$ не равно нулю, в противном случае это выражение приводится к одной из конгруенций, изученных выше.

Следует добавить, что если существует конгруенция вида (12), в которой $\sum \varepsilon_k$ не равно нулю, то, очевидно, она отлична от предшествующих, так как не может существовать гомологии вида

$$\sum \varepsilon_k C_k + H \sim 0, \tag{13}$$

если $\sum \varepsilon_k$ не равно нулю.

Существует ли конгруенция вида (12)? Для доказательства, не вдаваясь в длинные, но нетрудные рассуждения, предположим, что среди

вершин полиэдра P есть m входящих в нее (назовем их C_1, C_2, . . ., C_m), если m служит показателем степени при z уравнения $f(x, y, z)=0$, которые соответствуют одному заданному значению x, например, $x=x_0$ (см. выше, § 5).

Тогда комбинация $C_1+C_2+\ldots+C_m$, которую я запишу для сокращения $\sum C_k$, является не чем иным, как римановой поверхностью, представленной уравнением между y и z

$$f(x_0, y, z)=0.$$

Тогда имеет место

$$\sum C_k \equiv \sum C_k\alpha_i\beta_i - \sum C_k\alpha_i\beta_{i+1}.$$

При переходе с одной стороны OA_i на другую в результате обхода вокруг A_i, m вершин C_1, C_2, . . ., C_m должны лишь поменяться местами, и мы имеем

$$\sum C_k\alpha_i\beta_i = \sum C_k\alpha_i\beta_{i+1}$$

и, следовательно,

$$\sum C_k \equiv 0.$$

Эта конгруенция уже имеет вид (12) и

$$\sum \varepsilon_k = m \neq 0.$$

Итак, мы имеем прежде всего два особых цикла двух измерений, которые являются двумя соответствующими римановыми поверхностями, одна при $y=0$, а другая при $x=x_0$.

Для того чтобы образовать другие циклы двух измерений, достаточно будет рассмотреть q циклов

$$K_1, K_2, \ldots, K_q,$$

соответствующих q особым точкам

$$A_1, A_2, \ldots, A_q,$$

каждый из которых исчезает относительно соответствующей особой точки; эти циклы должны к тому же удовлетворять на полиэдре P условию

$$\sum K_i \sim 0.$$

Две системы циклов

$$K_1, K_2, \ldots, K_q,$$

$$K'_1, K'_2, \ldots, K'_q$$

дадут нам два различных цикла двух измерений, если только (в P) не имеет места

$$K'_k - K_i \sim K'(M_i) - K(M_i),$$

где $K(y)$ — произвольный цикл полиэдра P.

Если мы обозначим через U_i и U'_i то, во что обратятся циклы K_i и K'_i, когда точка M_i придет в O, через Ω_i — то, во что обратится цикл $K(y)$, когда точка y будет стремиться к O, оставаясь в угле $A_{i-1}OA_i$, то это означает, что на S_0 должно быть

$$\sum U_i \sim 0, \quad \sum U'_i \sim 0;$$

если мы не желаем получить два различных цикла, то не должно иметь места

$$U'_i - U_i \sim \Omega_{i+1} - \Omega_i.$$

Посмотрим, сколько различных циклов мы сможем таким образом получить и сколько придется для этого получить различных конгруенций указанного вида, а затем отсюда мы вычтем число различных гомологий.

Построим таблицу исчезающих циклов относительно различных особых точек A_i. Будем различать два сорта этих циклов.

1. Циклы, имеющие вид $\Omega'-\Omega$, где Ω' — результат применения к циклу Ω подстановки группы Пикара, отвечающей A_i. Эти циклы, вообще говоря, существуют.

2. Исчезающие циклы второго сорта. К ним относятся те, которые не имеют указанного вида и не являются комбинацией циклов этого вида.

Очевидно, нам нужно для каждой из особых точек уменьшить, насколько это возможно, число исчезающих циклов; следовательно, в нашей таблице будут иметь место лишь линейно независимые циклы. Если последние будут

$$\begin{gathered} m_{1,1}\omega_1 + m_{1,2}\omega_2 + \ldots + m_{1,2p}\omega_{2p}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{k,1}\omega_1 + m_{k,2}\omega_2 + \ldots + m_{k,2p}\omega_{2p}, \end{gathered}$$

то таблица целых коэффициентов m будет иметь $2p$ столбцов и k строк ($k < 2p$), и детерминанты, образованные путем исключения из нашей таблицы произвольных $2p-k$ столбцов, не должны все одновременно становиться нулями.

Объединим теперь таблицы, относящиеся к q особым точкам; полная таблица будет иметь $2p$ столбцов и $\sum k = \mu$ строк. Если детерминанты, образованные путем исключения из этой таблицы $\mu-2p+r$ строк и r столбцов, все являются нулями, но детерминанты, образованные путем исключения $\mu-2p+r+1$ строк и $r+1$ столбцов, оказываются равными нулю не все, то искомое число различных конгруенций будет $\mu-2p+r+1$ (или

$\mu-2p$, если детерминанты, образованные путем исключения $\mu-2p$ строк, не все равны нулю).

Для получения числа различных гомологий, надо найти число комбинаций циклов $U_1, U_2, \ldots, U_q$, для которых

$$U_i \sim \Omega_{i+1} - \Omega_i.$$

Каждый цикл Ω породит, очевидно, одну подобную комбинацию; однако, если два цикла Ω и Ω' отличаются только циклом, инвариантным относительно группы Пикара, то они породят ту же комбинацию. Число гомологий равно, следовательно, полному числу циклов, т. е. $2p$, за исключением числа различных инвариантных циклов, которое я обозначу через n.

Число различных циклов двух измерений (*включая сюда два особых цикла*) будет

$$2+(\mu+2p+1)-(n-2p).$$

Посмотрим, как могут быть порождены эти неособые циклы двух измерений, сосредоточив наше внимание на более общем случае, т. е. на таком, когда нет исчезающих циклов второго сорта. В этом случае имеем

$$K_i = \Gamma_i' - \Gamma_i,$$

где Γ_i — цикл, а Γ_i' — цикл, преобразованный при помощи подстановки, соответствующей A_i.

Итак, опишем в плоскости y петли $L_1, L_2, \ldots, L_q$, выходящие из точки O и возвращающиеся к ней же, которые охватывают соответственно особые точки $A_1, A_2, \ldots, A_q$.

Пусть Γ_i — цикл на поверхности S_0; когда y выходит из точки O и описывает петлю L_i, то поверхность S и цикл деформируются. Когда y возвратится в точку O, то этот цикл станет циклом Γ_i' поверхности S_0; в своем движении он породит поверхность σ_i, ограниченную двумя замкнутыми кривыми, Γ_i и Γ_i'.

Если теперь имеет место

$$\Gamma_1+\Gamma_2+\ldots+\Gamma_q = \Gamma_1'+\Gamma_2'+\ldots+\Gamma_q',$$

то совокупность поверхностей $\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_q$ образует замкнутую поверхность. Это и будет нашим циклом двух измерений.

§ 4. Циклы одного измерения

Проблема циклов одного измерения была полностью решена Пикаром; мне остается лишь перевести рассуждения Пикара на язык наших обозначений.

Определим, какими будут конгруенции между ребрами. Как мы это видели в начале § 2, мы всегда можем предположить, что подобная конгруенция не содержит ребер категории α. Следовательно, наша конгруенция должна иметь вид

$$\sum \theta'_k \alpha_i \beta_i C'_k + \sum \theta''_k \beta_i B''_k \equiv 0. \tag{1}$$

Заметим, что

$$\sum \theta'_k \alpha_i \beta_i C'_k \equiv \sum \theta'_k \alpha_i C'_k + H,$$

$$\sum \theta''_k \beta_i B''_k \equiv H',$$

где H и H' — совокупность вершин категории β. Отсюда

$$\sum \theta'_k \alpha_i C'_k + H + H' = 0,$$

и так как вершины $\alpha_i C'_k$ нельзя свести ни к вершинам категории β, ни к вершинам категории α, для которых индекс при α отличен от i, то должно быть

$$\sum \theta'_k \alpha_i C'_k = 0, \tag{2}$$

где суммирование распространено на все вершины $\alpha_i C'_k$, принадлежащие к одному и тому же индексу i, но к различным индексам k.

Что может означать это тождество? Когда y приходит в точку A_i, а полиэдр P'_i вырождается, то некоторые вершины могут совпасть, но ни одна из них не исчезнет (тогда как исчезновение ребер и граней может иметь место). Алгебраическая сумма всех коэффициентов θ'_k, относящихся к различным вершинам $\alpha_i C'_k$, которые совмещаются в одну, должна, следовательно, равняться нулю; тогда будет нулем и сумма всех θ'_k:

$$\sum \theta'_k = 0. \tag{3}$$

Вследствие соотношения (3), мы можем найти в полиэдре P'_i комбинацию ребер $\sum \zeta'_k B'_k$ такую, что

$$\sum \zeta'_k B'_k \equiv \sum \theta'_k C'_k. \tag{4}$$

Тогда будем иметь

$$\sum \zeta'_k \alpha_i \beta_i B'_k \equiv \sum \zeta'_k \alpha_i B'_k - \sum \zeta'_k \beta_i B'_k + \sum \theta'_k \alpha_i \beta_i C'_k. \tag{5}$$

К тому же, как только y совпадает с A_i, ребра и вершины B'_k и C'_k полиэдра P'_i становятся ребрами и вершинами $\alpha_i B'_k$ и $\alpha_i C'_k$; таким образом мы получаем конгруенцию

$$\sum \zeta'_k \alpha_i B'_k \equiv \sum \theta'_k \alpha_i C'_k,$$

где, вследствие (2),

$$\sum \zeta'_k \alpha_i B'_k \equiv 0.$$

Эта конгруенция означает, что комбинация $\sum\zeta'_k\alpha_i B'_k$ образует замкнутый цикл на римановой поверхности $S(A_i)$. Но когда y попадает в A_i, риманова поверхность вырождается и циклы могут исчезать, однако никогда не случается, чтобы появлялись новые циклы. Итак, циклу $\sum\zeta'_k\alpha_i B'_k$ будет соответствовать на поверхности $S(M_i)$ по меньшей мере один замкнутый цикл $\sum\varepsilon'_k M_i B'_k$, который сводится к $\sum\zeta'_k\alpha_i B'_k$ для $M_i=\alpha_i$, так что имеет место

$$\begin{gathered}\sum\varepsilon'_k M_i B'_k\equiv 0,\\ \sum\varepsilon'_k\alpha_i B'_k=\sum\zeta'_k\alpha_i B'_k.\end{gathered}\tag{6}$$

Если мы заменим затем ζ'_k на $\zeta'_k-\varepsilon'_k$, то конгруенция (4) продолжает иметь место ввиду (6), конгруенция (5) продолжает оставаться справедливой, и будет

$$\sum(\zeta'_k-\varepsilon'_k)\,\alpha_i B'_k=0.$$

Следовательно, мы можем всегда предположить, что ζ'_k были выбраны таким образом, что

$$\sum\zeta'_k\alpha_i B'_k=0.\tag{7}$$

Если мы сопоставим конгруенцию (5) с тождеством (7), то получим гомологию

$$\sum\theta'_k\alpha_i\beta_i C'_k\sim\sum\zeta'_k\beta_i B'_k\tag{8}$$

и, добавляя эту гомологию к (1), выражение,

$$\sum\zeta'_k\beta_i B'_k+\sum\theta''_k\beta_i B''_k\equiv 0,$$

где фигурируют лишь ребра категории β.

Итак, мы всегда можем предположить, что конгруенция (1) содержит лишь ребра категории β. Это и есть теорема Пикара, согласно которой цикл одного измерения всегда можно привести в такое положение, что y будет постоянным по всей длине цикла.

Каждому из замкнутых циклов поверхности S_0 соответствует, следовательно, конгруенция вида (1), но не все эти конгруенции различны. Это то, что показал Пикар. Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p}$ — $2p$ циклов S_0 и предположим, что подстановка S_h группы Пикара переводит ω в

$$m_1\omega_1+m_2\omega_2+\ldots+m_{2p}\omega_{2p},$$

тогда будет иметь место гомология

$$\omega_i\sim m_1\omega_1+m_2\omega_2+\ldots+m_{2p}\omega_{2p}.\tag{9}$$

Эти гомологии сокращают число циклов одного измерения; Пикар показал также, что в самом общем случае алгебраической поверхности это число обращается в нуль.

Назовем *существующими циклами* такие циклы, которые не являются линейными комбинациями различных исчезающих циклов относительно разных особых точек A_i. Это те, которые остаются различными при учете гомологий (9). И действительно, гомология (9) выражает, что цикл

$$\omega_i - \sum m_k \omega_k$$

исчезает относительно особой точки, соответствующей подстановке S_k группы Пикара.

Итак, имеется столько же циклов одного измерения, сколько есть существующих циклов. Мы видели, с другой стороны, что существует столько же циклов трех измерений, сколько и инвариантных циклов.

Но в соответствии с фундаментальной теоремой о числах Бетти, должно существовать столько же циклов одного измерения, сколько имеется циклов трех измерений.

Итак, должно быть столько же существующих циклов, сколько есть инвариантных циклов.

Это и есть то, что мы хотели проверить.

Эта проверка облегчается, если существуют лишь исчезающие циклы второго сорта.

Действительно, вспомним, что группа Пикара имеет особый характер.

Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p}$ будут основные циклы и рассмотрим билинейную форму

$$\Phi = \omega_2'\omega_1 - \omega_1'\omega_2 + \omega_4'\omega_3 - \omega_3'\omega_4 + \ldots + \omega_{2p}'\omega_{2p-1} - \omega_{2p-1}'\omega_{2p}.$$

Если только основные циклы были выбраны надлежащим образом и если одновременно подвергнуть ω и ω' той же самой линейной подстановке группы Пикара, то форма Φ останется неизменной. С другой стороны, число существующих циклов будет тем же, что и число различных решений системы (A) линейных уравнений, полученных путем приравнивания каждого основного цикла циклам, полученным из него при помощи каждой из подстановок Пикара.

Пусть теперь $\sum m_i\omega_i$ — инвариантный цикл; так как выражение $\sum m_i\omega_i$ можно привести к линейной форме Φ, принимая

$$\omega_2' = m_1, \quad \omega_1' = -m_2, \quad \omega_3' = m_4, \quad \omega_4' = -m_3, \ldots;$$

так как, с другой стороны, $\sum m_i\omega_i$ переходит в $\sum m_i\omega_i$, когда ω претерпевают одну из линейных подстановок группы Пикара, то мы должны заключить, что система значений

$$-m_2, \; m_1, \; -m_3, \; m_4, \; \ldots$$

переходит в себя в результате этой линейной подстановки. Значит, это и есть решение системы (A), о котором мы говорили.

Очевидно к тому же, что двум или нескольким линейно независимым

инвариантным циклам будут, таким образом, соответствовать два или несколько решений системы (A), независимых линейно, и наоборот.

Итак, будет столько же существующих циклов, сколько инвариантных циклов. Это и требовалось доказать.

Что же произойдет теперь, если есть исчезающие циклы второго сорта?

Я говорил уже, что этот случай не может иметь места для тех поверхностей с обычными особенностями, к которым Пикар приводит все иные поверхности (т. I, стр. 85). Правда, он мог бы иметь место и для других поверхностей, если бы желали изучать их, не подвергая предварительно преобразованию Пикара. Однако на этих поверхностях появились бы особые точки специального вида, и многообразие V четырех измерений, порожденное такой поверхностью, само имело бы особую точку.

Но общие теоремы, которые нас занимают и которые мы доказали в «Analysis situs» и в его дополнениях, не приложимы к многообразиям V с особыми точками; вообще говоря, они перестают быть справедливыми для этих многообразий, если только не сделано специальных оговорок.

Собственно, сам вопрос, должен ли исчезающий цикл второго сорта рассматриваться как гомологичный нулю, зависит также от равно законных соглашений, которые можно было бы сделать. Справедливо, конечно, что подобный цикл служит полной границей для многообразия двух измерений, лежащего в V; но это многообразие содержит особую точку V.

Чтобы понять затруднение, которое вытекает из этого, возьмем значительно более простой пример. Представим себе в обычном пространстве поверхность, заключающую коническую точку, или, еще проще, конус вращения и его продолжение. Пусть S будет вершиной конуса, C — окружностью этого конуса. В некотором смысле, окружность C является полной границей области этого конуса, заключенной между окружностью C и вершиной S. Однако, с другой стороны, линия, проведенная на конусе, может выйти из этой области, не пересекая C, если, проходя через вершину S, она перейдет с одной половины конуса на другую.

При этих условиях кажется предпочтительным оставить в стороне особые случаи и ограничиться поверхностями с обычными особенностями, к которым приводятся все иные поверхности.

§ 5. Различные замечания

В ходе доказательств нам приходилось высказывать различные предположения относительно наших многогранников. Сведем их здесь вместе.

1. Мы предположили (см. стр. 645), что многогранник, обозначенный нами P', остается гомеоморфным самому себе, в то время как y изменяется вдоль сечения OA_i от A_i до O.

2. Мы сравнили (см. стр. 651) риманову поверхность S_0, соответствующую точке O, с римановой поверхностью S (M), соответствующей точке M, и указали, что можно поточечно соотнести эти две поверхности. Мы поль-

зовались этим соответствием для определения циклов U_i и U'_i, которые отвечают на S_0 циклам Ω_i и Ω'_i.

3. Мы приняли затем (см. стр. 652), что при изменении точки M от A_i до M_0, два цикла, U_i и U'_i, сперва совпадающие, заметают некоторую область R в S_0, которой соответствует на S (M_0) область $\Sigma\,\theta'_k M_0 F'_k$.

4. Нами было принято, что когда точка M описывает последовательно две стороны сечения OA_1, затем две стороны OA_2, . . ., и, наконец, две стороны сечения OA_q, то подвижный цикл U_i (который возвращается в свое начальное положение Ω_1^0, пройдя через непрерывный ряд последовательных положений), не заметет целиком всю поверхность S_0.

5. Мы указывали (стр. 658), что если поверхность $f(x, y, z)=0$ приемом Пикара приведена к тому, что она будет иметь лишь обычные особенности, то каждой особой точке A_i будет соответствовать только один исчезающий цикл.

6. Мы предположили (стр. 663), что среди вершин P есть m таких, которые соответствуют постоянному значению x, например $x=0$.

Так как законность этих предположений почти очевидна, мне не хотелось прерывать рассуждений предыдущего параграфа, чтобы привести исчерпывающее доказательство. Впрочем, я мог бы сделать это лишь с помощью точного определения полиэдра P, иначе говоря, сделав конкретные предположения о способе подразделения римановой поверхности S.

Теперь я считаю полезным возвратиться к этим различным вопросам и привести доказательство, исходя из какого-либо из этих частных предположений относительно P.

Можно было бы, например, построить полиэдр P следующим образом.

Начнем с того, что приведем поверхность $f=0$ к тому, что она будет иметь лишь обычные особенности.

Придадим y какое-либо значение и рассмотрим соответствующую риманову поверхность S. Эта поверхность будет состоять из m листов, наложенных на плоскость x (если уравнение $f=0$ имеет m-ю степень по z).

Отметим на плоскости x начало O и особые точки, соответствующие уравнениям

$$f=0, \qquad \frac{df}{dz}=0.$$

Пусть n — число этих особых точек; пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — эти особые точки. Соединим точку O с n особыми точками $B_1, B_2, \ldots, B_n$ с помощью n сечений $OB_1, OB_2, \ldots, OB_n$, которые не пересекаются между собой и располагаются вокруг точки O в упомянутом порядке.

Риманову поверхность можно будет получить обычным путем, совмещая одну сторону какого-либо из сечений на одном из листов с другой стороной того же сечения на втором листе. Отметив линии этих сечений, мы подразделим риманову поверхность и получим полиэдр, который и будет нашим полиэдром P.

Очевидно, что этот полиэдр имеет m граней (которые являются нашими F_k) и каждая из этих граней — многоугольник с $2n$ сторонами.

Что же случится теперь, если изменять y? Особые точки B сместятся, сечения OB деформируются, и мы предполагаем, что они деформируются, никогда не пересекаясь, и следуют друг за другом вокруг O всегда в том же порядке. Когда y опишет маленький замкнутый контур, эту деформацию можно провести так, что сечения вернутся в свои исходные положения, если только внутри контура не окажется особой точки.

Возможные особые точки будут двух видов.

1. Во-первых те, которые соответствуют случаю, когда две особые точки B взаимно меняются местами (рассуждение Пикара показывает, что если поверхность $f=0$ имеет только обычные особенности, то это может произойти лишь в случае, когда плоскость $y=\text{const}$ касательна к поверхности $f=0$).

2. Затем те, которые соответствуют случаю, когда одна из особых точек B попадает в O.

Особые точки второго сорта не существенны, и я мог бы отбросить их, если бы у меня не было причины сохранить их.

Обозначим все эти особые точки через $A_1, A_2, \ldots, A_q$ и проведем в плоскости y сечения $OA_1, OA_2, \ldots, OA_q$.

До тех пор, пока y не пересекает сечений OA, сечения OB могут деформироваться, не пересекаясь ни в какой момент между собой, следовательно, так, что P остается гомеоморфным самому себе и в то же время так, что когда y опишет замкнутый контур, эти сечения OB возвращаются в свои начальные положения.

Сравним теперь конфигурацию сечений OB, когда y находится в двух бесконечно близких точках с двух сторон сечения OA_i.

Предположим сперва, что A_i будет особой точкой первого сорта. Если предполагается, что поверхность $f=0$ имеет лишь обычные особенности и, следовательно, плоскость $y=A_i$ касательна к $f=0$ в обычной точке, то очевидно, что при обходе y вокруг A_i две из особых точек, например B_1 и B_2, меняются местами. Более того, если точка B_1 переходит с одного листа римановой поверхности на другой, то точка B_2, меняющаяся с ней местами, перейдет со второго листа на первый. Назовем эти два листа *первым и вторым листами поверхности*.

Когда y после обхода вокруг A_i возвратится к положению, бесконечно близкому к первоначальному положению, но с другой стороны сечения, можно предположить, что сечения OB возвращаются к своим первоначальным положениям, за исключением сечений OB_1 и OB_3. Эти два последних сечения, которые первоначально занимали линии OB_1 и OB_3, обозначенные на чертеже сплошными линиями, расположатся в окончательном положении на линиях OB_3 и OB_1, обозначенных на чертеже пунктиром.

Очевидно, риманова поверхность может быть подразделена двумя способами как полиэдр P. Эти два способа подразделения отличаются друг от друга, так как сплошные линии OB_1 и OB_3 заменены пунктирами OB_3 и OB_1.

Если наложить эти два способа подразделения, то получится полиэдр, который я обозначал через P'. Ясно, что две из m граней P, а именно те, которые соответствуют двум первым листам, подразделены на три частичные грани, обозначенные на фигуре буквами (α), (β), (γ).

В то время как y будет описывать сечение OA_i, точки B будут смещаться непрерывным образом, не совпадая ни между собой, ни с точкой O (за исключением, понятно, того случая, когда y попадает в A_i). Отсюда следует, что можно деформировать все наши сечения OB (как изображенные сплошными линиями, так и пунктиром) избегая того, чтобы они в какой-либо момент взаимно пересеклись.

Это означает, что полиэдр P' постоянно остается гомеоморфным самому себе. Сказать, что P' остается гомеоморфным самому себе, означает, что можно установить поточечное соответствие поверхности S (M) с другой поверхностью S (M'), соответствующей другому положению M' точки y на OA_i, и, в частности, с поверхностью S_0. Следует отметить, что соответствие должно быть таким, чтобы бесконечно удаленной точке поверхности $S(M)$ соответствовала бесконечно удаленная точка поверхности S (M').

Как только y попадет в A_i, полиэдр P вырождается: две точки B_1 и B_2 совпадают. То же самое можно сказать относительно сечения OB_1, проведенного сплошной линией, и OB_3, показанного пунктиром, и также относительно показанного пунктиром OB_1 и проведенного сплошной линией OB_3. Тогда частичный многоугольник, обозначенный через (β) на нашем чертеже, исчезнет.

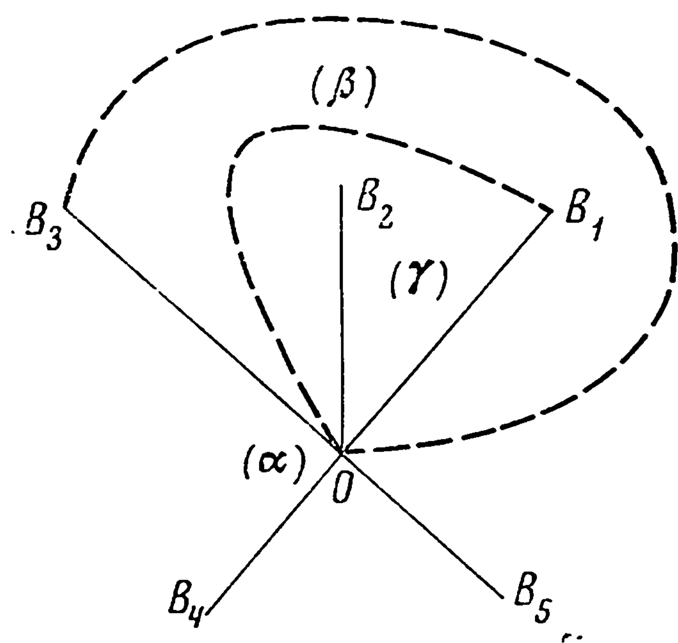


Рис. 1

Чтобы продвинуться дальше, заметим, что есть два сечения, которые проектируются по линии OB, изображенной сплошной чертой. Если следовать по первому (которое мы обозначим B_1G) от O в B_1, то первый лист оказывается слева, а второй — справа. Если же следовать по второму (которое мы обозначим B_1D), то первый лист будет справа, а второй — слева. Подобным образом определим B_3G и B_3D. Если вместо линии OB_1, изображенной сплошной чертой, мы рассмотрим линию OB_1, изображенную пунктиром, то подобно этому получим два сечения, которые я обозначу $B_1'G$ и $B_1'D$; наконец, точно так же я определю $B_3'G$ и $B_3'D$.

Сейчас мы увидим, что при обходе y вокруг A_i сечения B_1G и $B_3'G$, B_1D и $B_3'D$, B_3G и $B_1'G$, B_3D и $B_1'D$ меняются местами; для $y = A_i$ B_1G и $B_3'G$, ... совпадают.

Я обозначу через β_1 тот из частичных многоугольников β, который принадлежит к первому листу, если принять первое подразделение, а именно то, которое соответствует сплошным линиям; другой из многоугольников β будет обозначен β_2.

Тогда будут иметь место конгруенции

$$\beta_1 \equiv B_1'D - B_1D + B_3'D - B_3D,$$
$$\beta_2 \equiv B_1'G - B_1G + B_3'G - B_3G,$$

которые дают нам понятие о сечениях, служащих границами для β_1 и β_2.

Рассмотрим комбинацию

$$\omega = B_3D - B_1'D - B_3G + B_1'G.$$

Это — цикл нашей римановой поверхности; при обходе y вокруг A_i она меняется на

$$B_1'D - B_3D - B_1'G + B_3G,$$

т. е. на $-\omega$. Итак, это исчезающий цикл. Нетрудно видеть, что других не будет.

Возвратимся теперь к тем циклам, которые мы обозначили в § 2 через Ω_i и Ω_i'. Пусть

$$\Omega_i = \zeta_1 B_1D + \zeta_2 B_1G + \zeta_3 B_3D + \zeta_4 B_3G + H,$$

где ζ — целые коэффициенты, а H — комбинация других ребер P_1. Так как цикл Ω_i должен быть замкнутым, то необходимо иметь

$$\zeta_1 + \zeta_2 = \zeta_3 + \zeta_4 = 0,$$

так как вершина B_1, например, принадлежит лишь двум ребрам B_1D и B_1G. Затем будем иметь

$$\Omega_i' = \zeta_1 B_3'D + \zeta_2 B_3'G + \zeta_3 B_1'D + \zeta_4 B_1'G + H.$$

Поскольку ребра P, за исключением B_1D, B_1G, B_3D, B_3G, не меняются при обходе y вокруг A_i, то значит и H не меняется.

Итак, будем иметь

$$\Omega_i - \Omega_i' = \zeta_1 (B_1D - B_1G - B_3'D + B_3'G) + \\ + \zeta_3 (B_3D - B_3G - B_1'D + B_1'G).$$

Но

$$(B_1D - B_1G - B_3'D + B_3'G = (B_1'G) - B_1G + B_3'G - B_3G) \\ - (B_1'D - B_1D + B_3'D - B_3D) \\ - (B_3D - B_1'D - B_3G + B_1'G),$$

или

$$(B_1D - B_1G - B_3'D + B_3'G) + \omega \equiv \beta_2 - \beta_1,$$

откуда

$$\Omega_i - \Omega_i' + (\zeta_1 - \zeta_3)\,\omega \equiv \zeta_1 (\beta_2 - \beta_1),$$
$$\Omega_i - \Omega_i' \sim (\zeta_3 - \zeta_1)\,\omega.$$

Но мы предположили, что цикл Ω_i является инвариантным, т. е. что

$$\Omega_i \sim \Omega_i',$$

что требует $\zeta_1=\zeta_3$. Учитывая эти условия, вернемся к конгруенции (5) из § 2, которую можно записать

$$\Omega_i=\Omega'_i\equiv\sum 0'_k MF'_k.$$

Приравнивая ее предшествовавшей конгруенции, находим

$$\sum \theta'_k MF'_k=\zeta_1(\beta_2-\beta_1).$$

Когда y (или M) попадает в A'_i, частичные многоугольники β_1 и β_2 исчезают, так что исчезает и второй член этого равенства; первый же член приводится к $\Sigma\,\theta'_k\alpha_i F'_k$, откуда заключаем, что

$$\sum \theta'_k\alpha_i F'_k=0.$$

Таким образом, оказывается справедливым то, что было высказано нами на стр. 651 и на последующих.

Предположим теперь, что A_i будет особой точкой второго сорта и что для $y=A_i$ особая точка B_1 попадает в O.

Мы можем построить тогда фигуру, аналогичную фигуре на рис. 1; для упрощения я отмечу лишь три особые точки — B_1, B_2 и B_3.

Если y обходит вокруг A_i, то сечение OB_1 принимает свое первоначальное положение, а сечения OB_2 и OB_3 (сплошные линии) преобразуются в сечения OB_2 и OB_3 (пунктирные линии).

У нас есть два способа подразделения; накладывая их, получим полиэдр P'.

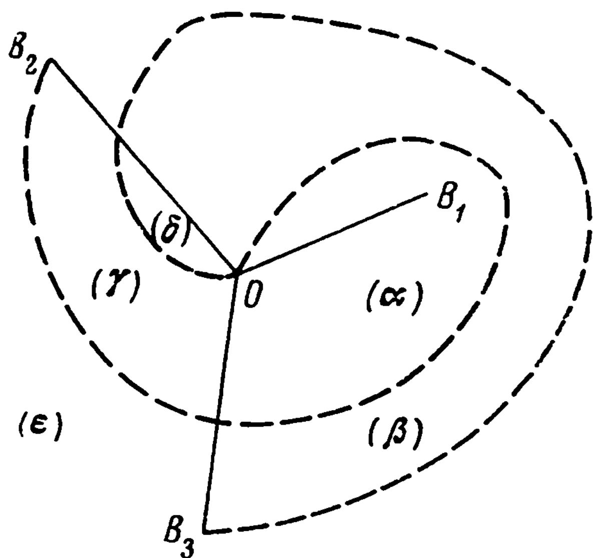


Рис. 2

Каждая грань P (т. е. каждый лист S) оказывается подразделенной на некоторое число частичных граней. В случае, изображенном на рис. 2, последних всего пять: они обозначаются через (α), (β), (γ), (δ), (ε).

Очевидно, что, когда y описывает сечение OA_i, можно устроить так, чтобы предыдущая фигура (и, следовательно, полиэдр P') постоянно оставалась гомеоморфной самой себе.

Обозначим через OB_2 и OB_3 сечения, нанесенные сплошными линиями, через OB'_2 и OB'_3 — соответствующие пунктирные сечения. Мы видим, что так как эти сечения взаимно пересекаются, то каждый из отрезков этих сечений образует одно из ребер P'. Я буду различать на каждом из этих сечений *конечный отрезок*, т. е. тот, который примыкает к точке B_2 или к B_3.

Когда y попадает в A_i, полиэдр P' вырождается; некоторые из его ребер сводятся к нулю, а именно ребро OB_1, и все отрезки OB_2, OB_3, OB'_2, OB'_3, *за исключением конечных отрезков*. К тому же конечный отрезок OB_2 совпадает с конечным отрезком OB'_2; то же самое относительно OB_3 и OB'_3. Отсюда следует, что четыре частичные грани (α), (β), (γ), (δ) исчезают.

Здесь не будет исчезающего цикла, так как особая точка A_i несущественна.

На нашей фигуре мы имеем

$$OB_2 - OB'_3 \equiv (\alpha) + (\gamma) + (\delta),$$
$$OB_3 - OB'_3 \equiv (\alpha) + (\beta) + (\delta).$$

Возвратимся к циклу Ω_i; будем иметь

$$\Omega_i = \sum \zeta_1 OB_1 + \sum \zeta_2 OB_2 + \sum \zeta_3 OB_3.$$

Я применяю знак Σ, так как имеется несколько таких сечений (принадлежащих к различным листам римановой поверхности), которые проектируются по OB_1. Затем будет иметь место

$$\Omega'_i = \sum \zeta_1 OB_1 + \sum \zeta_2 OB'_2 + \sum \zeta_3 OB'_3,$$

откуда

$$\Omega_i - \Omega'_i \equiv \sum \zeta_2 (OB_2 - OB'_2) + \sum \zeta_3 (OB_3 - OB'_3),$$
$$\Omega_i - \Omega'_i \equiv \sum \zeta_2 [(\alpha) + (\gamma) + (\delta)] + \sum \zeta_3 [(\alpha) + (\beta) + (\delta)];$$

приравнивая конгруенции (5) § 2, получим

$$\sum \theta'_k MF'_k = \sum \zeta_2 [(\alpha) + (\gamma) + (\delta)] + \sum \zeta_3 [(\alpha) + (\beta) + (\delta)].$$

Когда y достигает A_i, то (α), (γ), (δ) исчезают, и, таким образом, остается

$$\sum \theta'_k \alpha_i F'_k = 0,$$

что вновь подтверждает то, что мы сказали на стр. 651.

Предположим, что точка y описывает различные сечения OA_1, OA_2, . . ., OA_q, тогда особые точки B опишут определенные линии. Мы можем предположить, что ни одна из этих линий не удаляется в бесконечность. И действительно, если бы это было не так, то мы всегда нашли бы в плоскости x маленький круг, не пересекаемый ни одной из этих линий, а тогда, с помощью простой линейной замены переменных, мы могли бы отнести центр этого круга на бесконечность.

Итак, когда точка y будет последовательно описывать две стороны OA_1, две стороны OA_2 и т. д. и, наконец, две стороны OA_q, то особые точки B останутся на конечном расстоянии. Следовательно, мы сможем управлять деформацией сечений OB так, чтобы эти сечения оставались на конечном расстоянии. Цикл Ω_i, образованный комбинацией этих сечений, останется, следовательно, всегда на конечном расстоянии; то же самое будет и с циклом U_i, который соответствует ему на S_0 [так как мы можем подобрать соответствие $S(M)$ с S_0 так, чтобы бесконечной точке на $S(M)$ соответствовала бесконечная точка на S_0]. Этот цикл не сможет, следовательно, замести целиком всю поверхность S_0, что и подтверждает сказанное нами на стр. 653.

Наконец, заметим, что среди вершин P есть m таких, которые соответствуют $x=0$.

Итак, все наши предположения оказываются справедливыми.

ПЯТОЕ ДОПОЛНЕНИЕ К «ANALYSIS SITUS» *

1. Я уже несколько раз имел возможность заниматься Analysis situs. Во-первых, я опубликовал на эту тему мемуар в томе «Centenaire du Journal de l' École Polytechnique»; за этим мемуаром последовали четыре дополнения, которые были опубликованы в томе 13 «Rendiconti del Circolo matematico di Palermo», в томе 37 «Proceedings of the London Mathematical Society», в «Bulletin de la Société mathématique de France» в 1901 г. и, наконец, в «Journal de Liouville» в 1901 г.

Я возвращаюсь теперь еще раз к тому же вопросу в уверенности, что его можно исчерпать лишь с помощью постоянных усилий и что он достаточно важен и заслуживает этого.

На этот раз я ограничусь исследованием некоторых многообразий трех измерений, но методы, которые я использовал, несомненно могли бы найти себе и более широкое применение. Между прочим, я довольно подробно остановлюсь на некоторых свойствах замкнутых кривых, которые можно провести на замкнутых поверхностях обычного пространства.

Конечный результат, который я имел в виду, таков. Во втором дополнении я показал, что для того чтобы характеризовать многообразие, недостаточно знать его числа Бетти, так как существенную роль играют некоторые коэффициенты, которые я назвал коэффициентами кручения (§ 5, стр. 616).

Можно теперь спросить себя, достаточно ли рассмотрения этих коэффициентов, имеет ли многообразие, все числа Бетти и коэффициенты кручения которого равны 1, в силу этого простую связность в полном смысле этого слова, т. е. гомеоморфно ли оно с гиперсферой, или же наоборот, прежде чем утверждать, что многообразие имеет простую связность, необходимо изучить его фундаментальную группу, так, как я ее определил в «Journal de l'École Polytechnique» (§ 12, стр. 501).

Мы сможем теперь ответить на эти вопросы: действительно, я построил пример многообразия, все числа Бетти и коэффициенты кручения которого равны 1 и которое все же не имеет простой связности.

---

* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1904, 18, p. 45—110.

2. Рассмотрим многообразие V m измерений, расположенное в пространстве k измерений. Пусть далее

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = t$$

— уравнение поверхности k—1 измерений, расположенной в том же пространстве, которую я обозначу через $\varphi(t)$. В этом уравнении $x_1, x_2, \ldots x_k$ — координаты точки в пространстве k измерений, а t — произвольный параметр такой, что поверхность $\varphi(t)$ при непрерывном изменении t деформируется непрерывным образом. Я буду предполагать, что функция φ однозначна, так что через любую точку проходит поверхность $\varphi(t)$ и притом только одна [23].

Поверхность $\varphi(t)$ пересечет V по определенному числу многообразий m—1 измерений

$$w_1(t),\ w_2(t), \ldots,\ w_p(t),$$

совокупность которых образует систему $W(t)$.

При изменении t непрерывным образом от $-\infty$ до $+\infty$ система $W(t)$ будет изменяться непрерывным образом и *породит* многообразие V. Если многоообразие V является замкнутым, то таковыми же будут и многообразия $w(t)$.

Учитывая все изложенное, определим то, что мы будем именовать *скелетом* многообразия V. Каждому из частных многообразий $w_1(t)$, $w_2(t)$, ..., $w_p(t)$ сопоставим точку в обычном пространстве. Одна из координат этой точки, например x, будет равняться параметру t, а две другие выбираются произвольно, удовлетворяя лишь следующим условиям.

1. Если два многообразия $w_i(t)$, $w_i(t+\varepsilon)$ очень мало отличаются друг от друга, то две соответствующие точки должны находиться весьма близко друг от друга.

2. Может случиться, что для некоторых значений t, например, для $t=t_0$, одно из многообразий $w(t)$ распадается на два других. В этом случае многообразие $w_1(t_0-\varepsilon)$, например, будет очень мало отличаться от совокупности двух многообразий $w_1(t_0+\varepsilon)+w_2(t_0+\varepsilon)$. В этом случае надо сделать так, чтобы две точки, представляющие два многообразия $w_1(t_0+\varepsilon)$ и $w_2(t_0+\varepsilon)$, происшедшие в результате раздвоения $w_1(t_0-\varepsilon)$, очень мало отличались друг от друга и очень мало от точки, представляющей $w_1(t_0-\varepsilon)$.

При этих условиях, если t будет непрерывно изменяться, то точки, представляющие p многообразий

$$w_1(t),\ w_2(t), \ldots,\ w_p(t),$$

породят p непрерывных линий

$$L_1, L_2, \ldots, L_p$$

по крайней мере пока число p не меняется. Но это число может меняться для $t=t_0$, если одно из многообразий распадается на два, или, наоборот,

если два многообразия объединяются в одно. В первом случае одна из линий L раздваивается, во втором — две из линий L объединяются в одну.

Таким образом, получается нечто в виде сети из линий, и эту-то сеть я и называю *скелетом* V. Я провел эту сеть в пространстве трех измерений, а не в плоскости, так как в этом случае всегда можно избегнуть пересечения двух линий в точках, отличных от точек раздвоения.

Если мы будем следовать вдоль одной из этих линий, например, вдоль линии L_1, описанной точкой, представляющей $w_1(t)$, то мы увидим, что это многообразие $w_1(t)$ постоянно остается гомеоморфным самому себе (причем так, что на двух очень близких многообразиях $w_1(t)$ и $w_1(t+\varepsilon)$ две соответствующие точки очень мало отличаются друг от друга), *пока оно не проходит через такое значение* t, *при котором* $w_1(t)$ *приобретает особую точку.*

Значит, мы должны отметить на линиях нашей сетки точки, соответствующие многообразиям $w(t)$ с особыми точками. Эти точки разобьют наши линии на отрезки и пока мы будем следовать по одному из этих отрезков, соответствующее многообразие $w(t)$ останется гомеоморфным самому себе.

Заметим, что если взять одно из значений t_0, отвечающее точкам раздвоения, для которого одно из многообразий w_i раздваивается, то это многообразие $w_i(t_0)$ также включает особую точку.

Однако, прежде чем продолжать это исследование, мне следует сделать еще несколько замечаний. Если я хочу, чтобы многообразие V было замкнутым, нужно, чтобы сначала были замкнутыми сами многообразия $w(t)$. Второе условие заключается в следующем: если одна из линий L оканчивается тупиком так, что она останавливается, например, при $t=t_1$, то соответствующее многообразие стремится свестись к точке, когда t стремится к t_1, т. е. когда t приближается к тупику.

Затем я сказал, что выбирал функцию φ однозначной так, чтобы через точку пространства проходила одна поверхность $\varphi=t$ и только одна. При этих условиях система $W(t)$ не является произвольной. Это ограничение не помешало мне показать, что каждое многообразие V поддается такому способу порождения, однако от него можно освободиться и рассматривать любую систему $W(t)$ замкнутых многообразий

$$w_1(t),\ w_2(t),\ \ldots,\ w_p(t),$$

лишь бы эти многообразия изменялись непрерывным образом вместе с t в предположении, конечно, что для некоторых значений t одно из этих многообразий может свестись к точке или распасться на два других.

При этих условиях система $W(t)$ еще порождает многоообразие V, и можно было бы определить его скелет, исходя из тех же принципов, к которым нечего добавить.

И все же есть один случай, в котором выгодно было бы сделать небольшое изменение. Представим себе, что для двух значений t, например для $t=0$ и $t=2\pi$, система $W(t)$ будет одной и той же, или, что лучше, что две системы $W(t)$ и $W(t+2\pi)$ являются идентичными. Тогда достаточно будет

изменять t от 0 до 2π и удобно поэтому выбрать представляющую точку для многообразия $w(t)$ уже не так, чтобы было $x=t$, а так, чтобы $\operatorname{arc\,tg}(y/x)=t$, т. е. чтобы точки, представляющие $w(t)$ и $W(t+2\pi)$, могли быть идентичными.

Если мы, например, предположим, что $W(t)$ сводится к одному только многообразию $w(t)$, то при этих условиях скелет V сведется к замкнутой кривой.

В качестве достаточно простого примера рассмотрим тор, который будет многообразием V; будем считать его порожденным его же меридиональным кругом, который и будет многообразием $w(t)$, совпадающим с $w(t+2\pi)$. При наших новых условиях скелет этого тора сведется к замкнутой кривой.

Займемся теперь изучением особых точек многообразий $w(t)$. Часть одного из этих многообразий, расположенная вблизи особой точки, может быть представлена следующими уравнениями:

$$x_i \equiv \psi_i(y_1, y_2, \ldots, y_q) \qquad (i=1, 2, \ldots, k),$$
$$\varphi_h(y_1, y_2, \ldots, y_q)=0 \qquad (h=1, 2, \ldots, q-m);$$

к ним следовало бы добавить некоторые неравенства, которыми мы можем не заниматься.

В указанной области функции φ и ψ являются голоморфными. Мы всегда можем предположить, что особая точка соответствует

$$y_1=y_2=\ldots=y_q=0$$

и что для этого значения частные производные первого порядка от функций φ не все являются нулями, *за исключением одной из них* — φ_1.

Тогда из уравнений

$$\varphi_2=\varphi_3=\ldots=\varphi_{q-m}=0$$

мы можем выразить все y в функции от $m+1$ из этих y; эти функции остаются голоморфными в окрестности особой точки. Следовательно, я заменю все y найденными таким образом выражениями, так что все окажется выраженным в функции от $m+1$ переменных y, например от $y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}$, а наши уравнения примут вид

$$x_i=\psi_i(y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}),$$
$$\varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_{m+1})=0.$$

Функция φ_1 разложима по степеням y и это разложение начинается с членов второй степени, совокупность которых составляет квадратичную форму $f(y_1, y_2, \ldots, y_{m+1})$.

Нет смысла рассматривать особые точки других типов, так как если бы они были, то их можно было бы заставить исчезнуть при помощи небольшого

изменения функции $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, определяющей поверхности $\varphi(t)$, по крайней мере, если предполагается, что само многообразие V лишено особых точек. Таким образом, мы приходим к необходимости изучить конус второй степени

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}) = 0$$

в пространстве $m+1$ измерений y и его пересечение с гиперсферой

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{m+1}^2 = 1.$$

Пусть C будет этим пересечением. Все будет зависеть от числа измерений и от числа положительных и отрицательных квадратов в разложении формы f в сумму квадратов.

Мы можем всегда с помощью замены координат привести f к форме

$$f = \sum A_i y_i^2 - \sum B_k y_k^2,$$

где коэффициенты A и B положительные, так что окажется q положительных квадратов и $m+1-q$ отрицательных квадратов, причем индекс i будет изменяться от 1 до q, индекс k — от $q+1$ до $m+1$.

Я могу написать теперь

$$\sum A_i y_i^2 = \sum B_k y_k^2 = \lambda^2,$$

откуда

$$y_i = \eta_i \lambda, \qquad y_k = \eta_k \lambda,$$

где η являются любыми решениями уравнений

$$\sum A_i \eta_i^2 = 1, \qquad \sum B_k \eta_k^2 = 1. \tag{1}$$

Отсюда выводится

$$\lambda^2 \left(\sum \eta_i^2 + \sum \eta_k^2\right) = 1.$$

Из уравнений (1) видим, что верхний и нижний пределы $\Sigma \eta_i^2$ являются обратными наименьшему и наибольшему из коэффициентов A. Подобным образом находятся верхний и нижний пределы $\Sigma \eta_k^2$. Отсюда заключаем, что λ является непрерывной функцией η (предполагая, что они связаны уравнениями (1)) и что эта функция не может ни стать равной нулю, ни обратиться в бесконечность. Итак, мы можем предположить, что λ остается постоянно положительной; тогда λ будет непрерывной и вполне определенной функцией η; такая же зависимость будет и от y.

Могут иметь место несколько случаев:

1. Если q равно нулю или $m+1$ так, что все квадраты будут одного знака, то очевидно, что конус сводится к одной точке и что C не существует.

2. Если q не равно 1, то можно перейти непрерывным образом от какого-либо одного решения уравнения $\sum A_i\eta_i^2=1$ к любому другому решению. Если, наоборот, $q=1$, то это уравнение имеет лишь два решения: $\eta_1=\pm 1/\sqrt{A_1}$ и от одного из них нельзя перейти к другому непрерывным образом.

Точно так же, если q не равно m, то можно перейти непрерывным образом от какого-либо решения уравнения $\sum B_k\eta_k^2=1$ к любому другому решению. Если, наоборот, $q=m$, уравнение будет иметь лишь два решения и такой переход невозможен.

Следовательно, кроме изученного выше случая, есть еще три:

Если $1<q<m$, то C состоит из одного куска.

Если $1=q<m$ или если $1<q=m$, то C состоит из двух кусков.

Если $1=q=m$, то C состоит из четырех кусков или, точнее, сводится к четырем дискретным точкам.

В этом последнем случае $m=1$, и многообразие V имеет лишь два измерения. Это предупреждает нас, что мы обнаружим различие между многообразиями двух и более чем двух измерений.

Сперва предположим, что V имеет два измерения ($m=1$); тогда будем иметь:

1. $q=0$ или $q=2$. В этом случае C не существует; когда t проходит через значение, соответствующее подобной особой точке, мы находим, что появляется (или исчезает) новое многообразие $w(t)$: оно оказывается сперва точкой, а затем маленькой замкнутой кривой. Эта особая точка соответствует, таким образом, тупику скелета.

2. $q=1$. В этом случае C сводится к четырем точкам, которые снабдим номерами 1, 2, 3, 4. Многообразие $w(t)$ переходит в кривую, которая принимает в качестве особой точки двойную обыкновенную точку, в которой пересекаются две ветви кривой, а именно ветви 1, 3 и 2, 4. Я предполагаю, что особая точка появляется при $t=0$; я обозначу $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ те точки многообразия $w(t)$, которые при очень малых значениях t соответственно весьма близки точкам 1, 2, 3, 4 многообразия $w(0)$.

Заметим для начала, что ветвь кривой, которая выходит из двойной точки и идет к точке 1, должна вернуться в двойную точку, так как все кривые являются замкнутыми; вернуться она может, пройдя через одну из трех точек 2, 3, 4. Отсюда следует, что точки 1, 2, 3, 4 сочетаются по две, например, 1 с 2 и 3 с 4 таким образом, что можно перейти от 1 к 2 и от 3 к 4, следуя кривой $w(0)$ и не проходя близко от двойной точки. Подобно этому можно перейти от $1'$ к $2'$ и от $3'$ к $4'$, следуя по кривой $w(t)$ и не проходя близко от двойной точки, и это для всех малых значений t, вне зависимости от того, будут ли они положительными или отрицательными.

Если теперь мы рассмотрим окрестность двойной точки, то обнаружим, что для $t<0$, например, можно перейти от $1'$ к $2'$ и от $3'$ к $4'$, следуя по $w(t)$ и проходя вблизи двойной точки, в то время как этого не может

случиться при прохождении от $1'$ к $4'$ и от $2'$ к $3'$. Наоборот, при $t > 0$ можно перейти от $1'$ к $4'$ и от $2'$ к $3'$, но ни в коем случае от $1'$ к $2'$ и от $3'$ к $4'$.

Отсюда следует, что при $t < 0$ отмеченные ветви $w(t)$ образуют две различные замкнутые кривые, тогда как при $t > 0$ они образуют лишь одну.

Следовательно, наша особая точка соответствует раздвоению скелета.

То же самое будет, если 1 соединяется с 4 и 2 с 3.

Предположим теперь, однако, что 1 соединяется с 3 и 2 с 4. Очевидно, что при $t < 0$, как и при $t > 0$, многообразие $w(t)$ переходит в одну замкнутую кривую. Только при $t < 0$ эта кривая проходит последовательно через точки $1'$, $3'$ $4'$, $2'$, $1'$, а при $t > 0$ она проходит через точки $1'$, $3'$, $2'$, $4'$. Итак, особая точка уже не соответствует раздвоению.

Но в этом случае я утверждаю, что многообразие V является односторонним.

Чтобы разобраться в этом, возьмем какую-либо замкнутую поверхность двух измерений (одностороннюю или двустороннюю) и разрежем ее (оставляя ее целым куском) так, чтобы ее можно было разложить на плоскости. Мы получим многоугольник, аналогичный фуксовым многоугольникам, стороны которого будут сопряжены по две, причем две сопряженные стороны многоугольника будут соответствовать двум сторонам одного сечения.

Пусть даны две сопряженные стороны AB и $A'B'$, причем вершина A сопряжена с A' а вершина B — с B'. Если при переходе от A к B внутренность многоугольника оказывается, например, слева, а при переходе от A' к B' она лежит справа, то такое сопряжение будем называть *прямым*.

Если, наоборот, и при переходе от A к B, и при переходе от A' к B' внутренность оказывается слева, то такое сопряжение будем называть *обратным*. (Это соглашение сперва озадачивает, но затем, после недолгого размышления, становится понятным.) Теперь, если все пары сторон имеют *прямое* сопряжение (как это и бывает для фуксовых многоугольников), то поверхность, из которой мы их получили, является двусторонней. Если же для одной из пар сторон сопряжение будет обратным, то поверхность оказывается односторонней.

Предположим, в качестве примера, что наш многоугольник является прямоугольным, вершины которого следуют друг за другом в порядке $ABCD$, а противоположные стороны сопряжены. Если AB сопряжено с DC, а AD с BC, то сопряжение является прямым и можно считать, что многоугольник получился в результате развертки тора, поверхности двусторонней. Если AB сопряжено с CD, а AD с BC, то сопряжение является для одной пары обратным, а для другой прямым; многоугольник получился от развертывания односторонней поверхности, аналогичной поверхности Мебиуса. Если AB сопряжено с CD, а AD с CB, то сопряжение является обратным для обеих пар, и многоугольник про-

исходит от развертки «проективной плоскости», односторонней поверхности.

Приложим теперь полученные правила к многообразию V, разрежем его и разложим на плоскости так, чтобы получить наш многоугольник. На рис. 1 я изобразил лишь часть интересующего нас многоугольника.

В O мы имеем особую точку, линии CHD, AEB, $C'H'D'$, $A'E'B'$ представляют часть контура многоугольника. Две линии $E1O3E'$ и $H2O4H'$, которые пересекаются в O, являются развертками кривой $w(0)$. Линии $B1'2'C$, $B'3'4'C'$ являются разверткой кривой $w(t)$ при $t<0$. Линии $D2'3'A'$ и $D'4'1'A$ являются разверткой кривой $w(t)$ при $t>0$. По предположению, эта кривая $w(t)$ замыкается сама в себе так, что ветвь $1'$ связывается с ветвью $3'$ и ветвь $2'$ с ветвью $4'$. Следовательно, A должно соединиться с A', иными словами, A сопрягается с A' и, подобно этому, B сопрягается с B', C с C', D с D'. Таким образом, на многоугольнике AB сопряжено с $A'B'$ и CD с $C'D'$; сопряжение является взаимно обратным. Итак, наша поверхность является односторонней.

Это и следовало доказать.

Следовательно, если теперь V имеет два измерения и является двусторонним, то его скелет не будет иметь иных особых точек, кроме тупиков и раздвоений. В этом и заключается секрет относительной простоты Analysis situs обычных поверхностей.

Перейдем теперь к многообразиям V трех измерений ($m=3$), которыми я пока ограничусь. Нам опять следует различать два случая.

1. $q=0$ или $q=3$; тогда C не существует и особая точка соответствует тупику скелета.

2. $q=1$ или $q=2$; тогда C состоит из двух кусков; многообразие $w(0)$ представляет обычную коническую точку (если особая точка соответствует $t=0$); части этого многообразия вблизи особой точки уподобляются обычному конусу второй степени. Придадим теперь t очень малые значения. Части $w(t)$, находящиеся вблизи особой точки, можно уподобить, например, однополостному гиперболоиду при $t<0$ и двуполостному гиперболоиду при $t>0$.

Рассмотрим эллипс горловины E однополостного гиперболоида. Этот эллипс при $t=-\varepsilon$ (где ε — положительное очень малое число) является очень малым замкнутым циклом, проведенным на $w(t)$; при $t=0$ он сводится в точку и при $t=+\varepsilon$ исчезает.

То, что мы обозначили через C (пересечение конуса и гиперсферы), состоит здесь из двух замкнутых кривых (для случая $q=1$ или $q=m$) и следует различать два случая: или нельзя перейти от одной из этих замкнутых кривых к другой, оставаясь на $w(t)$ и не проходя вблизи особой точки, или же такой переход возможен.

В первом случае эллипс E делит многообразие $w(-\varepsilon)$ на две части, так как нельзя перейти из окрестности одной из кривых в окрестность другой кривой C, не проходя через окрестность особой точки, т. е. не пересекая эллипс горловины E. Итак, на $w(-\varepsilon)$ будет иметь место $E\sim 0$.

Во втором случае, наоборот, E не делит $w(-\varepsilon)$.

В первом случае полости $w(t)$, проходящие вблизи особой точки, образуют единственную замкнутую поверхность при $t=-\varepsilon$, так как всегда можно перейти от одной точки полости к другой и, в частности, из окрестности одной из кривых C в окрестность другой кривой, пересекая эллипс E. Наоборот, при $t=+\varepsilon$ они образуют две замкнутые поверхности, так как уже нельзя перейти от одной из кривых C к другой.

В этом первом случае наша особая точка соответствует, следовательно, раздвоению скелета.

Во втором случае, наоборот, эти полости $w(t)$ всегда образуют одну замкнутую поверхность как для $t=-\varepsilon$, так и для $t=+\varepsilon$, так как всегда есть возможность перейти от одной кривой C к другой, не проходя вблизи особой точки.

Во втором случае наша особая точка не соответствует раздвоению.

Этот второй случай сам имеет подразделения. Рассмотрим путь, дающий возможность перейти от одной кривой C к другой, не проходя вблизи особой точки. Если следовать по этому пути и если требуется сохранить форму уравнений, то необходимо время от времени менять переменные и заменять переменные y другими переменными y', затем y' — новыми переменными y'' и т. д. Мы будем всегда предполагать, что эти изменения переменных производятся таким образом, что функциональный детерминант новых переменных относительно старых будет положительным. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ будут конечные переменные при возвращении в окрестность особой точки. Мы получим, следовательно, x как функции от z, но так как в окрестности особой точки уравнения, дающие x в функции от y, опять имеют силу, а ряды сходятся, то мы получим z в функции от y; тогда могут иметь место два случая, в зависимости от того, будет ли функциональный детерминант z относительно y положительным или отрицательным. В первом случае путь является двусторонним, во втором случае односторонним. Это я объяснил в «Analysis situs», определяя односторонние многообразия.

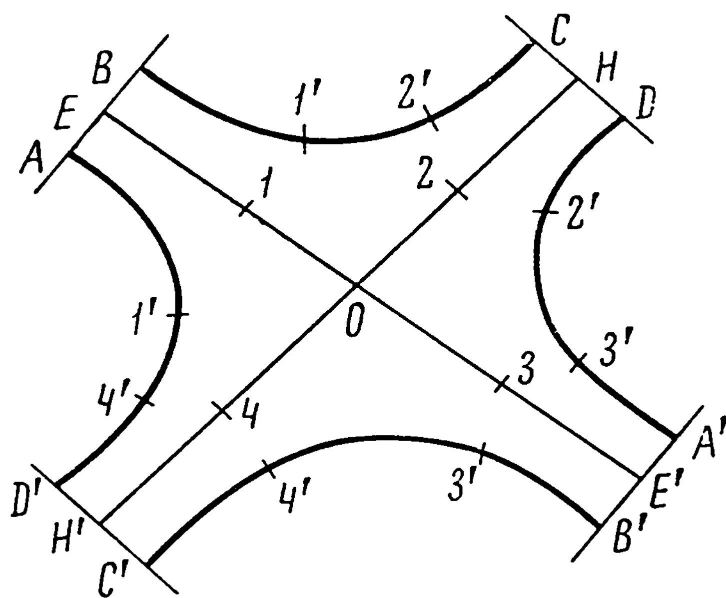


Рис. 1

Тогда, если имеются пути, по которым можно перейти от одной кривой C к другой, не проходя через окрестность особой точки, то они или все будут двусторонними, или одни из них будут двусторонними, а другие односторонними, или же, наконец, все они будут односторонними.

Сейчас мы ограничимся рассмотрением случая, когда все поверхности $w(t)$ будут двусторонними. Следовательно, все наши пути, если таковые существуют, будут двусторонними.

Нам известно, что для двусторонней поверхности число Бетти всегда нечетно. Значит, если двусторонняя поверхность имеет $(2p+1)$-кратную связность, то она допускает $2p$ различных циклов, т. е. таких, что никакая линейная комбинация их не гомологична нулю. Рассматривая таким образом $2p$ циклов поверхности $w(-\varepsilon)$, мы будем различать среди них такие, которые пересекают эллипс горловины E, и такие, которые его не пересекают. Если некоторый цикл K пересекает E, то нам придется распределить точки пересечения на две категории, в зависимости от знака некоторого детерминанта, так, как я это пояснил в «Analysis situs», стр. 482. Таким образом, мы определяем число $N(K, E)$ (см. «Analysis situs», стр. 483), которое равно разности чисел точек пересечения обеих категорий. Если число N для цикла K равно нулю, то цикл K будет гомологичным циклу, не пересекающему E. Если, наоборот, это число N не равно нулю, то все циклы, гомологичные K, пересекают E.

Что же произойдет тогда, когда t, изменяясь непрерывным образом, перейдет от значения $-\varepsilon$ к значению $+\varepsilon$? Можно найти на $w(+\varepsilon)$ линию K', бесконечно мало отличающуюся от цикла K, взятого на $w(-\varepsilon)$; только, если K не пересекает E, то линия K' — замкнутая и образует новый цикл на $w(\varepsilon)$; если, наоборот, K пересекает E, то линия K' не может быть замкнутой. Значит, для того чтобы на $w(\varepsilon)$ имели место циклы, бесконечно мало отличающиеся от цикла, гомологичного K, необходимо и достаточно, чтобы число $N(K, E)$ было нулем.

Другими словами, все циклы, для которых это число не равно нулю, исчезают при изменении t от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$; все прочие циклы остаются.

Пусть K — один из циклов $w(-\varepsilon)$, которые остаются на $w(\varepsilon)$, а K' — соответствующий цикл $w(\varepsilon)$.

В каком случае будет иметь место $K' \sim 0$?

Если имеет место $K' \sim 0$, то на $w(\varepsilon)$ будет существовать область A', ограниченная K'. Можно будет найти на $w(-\varepsilon)$ область A, бесконечно мало отличающуюся от A', она будет ограничена или только K или K и эллипсом горловины E так, что будет иметь место

$$K \sim 0 \quad \text{или} \quad K \sim E.$$

Добавим к этому, что если мы проведем на $w(\varepsilon)$ произвольный цикл K', то всегда можно найти на $w(-\varepsilon)$ цикл K, весьма мало отличающийся от первого, и при этом не может быть $K \sim 0$ без того, чтобы не было $K' \sim 0$, так как, если на $w(-\varepsilon)$ существует область A, ограниченная K, то на $w(\varepsilon)$ будет существовать область A', ограниченная K' и очень мало отличающаяся от A.

Итак, при переходе t от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$ некоторые циклы могут исчезнуть, однако не могут появиться новые циклы; некоторые циклы могут стать гомологичными нулю, но ни один цикл не может перестать существовать, так что число Бетти $2p+1$ может уменьшиться, но не может возрасти.

Отсюда следует, что могут представиться лишь два случая:

1. Может случиться, что $E \sim 0$ на $w(-\varepsilon)$; в этом случае, как мы видели, при переходе t от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$ многообразие $w(t)$ распадается на два других.

Циклы $w(-\varepsilon)$ не могут исчезнуть; действительно, так как $E \sim 0$, то для всех циклов K будет $N(K, E)=0$. Более того, никакой из этих циклов K не может стать гомологичным нулю. И в самом деле, мы видели, какими были новые гомологии, которые могли возникнуть между циклами K вследствие перехода t от $-\varepsilon$ к $+\varepsilon$. Все их можно было бы вывести из новой гомологии $E \sim 0$, и действительно, как мы сказали, для того чтобы имело место $K' \sim 0$, но не было бы $K \sim 0$, нужно, чтобы было $K \sim E$. А в случае, который нас интересует, мы имеем $E \sim 0$ как на $w(-\varepsilon)$, так и на $w(\varepsilon)$. Значит, новая гомология не возникает.

Общее число различных циклов, таким образом, остается тем же самым; если $w(-\varepsilon)$ имеет $(2p+1)$-кратную связность, то $w(\varepsilon)$ разлагается на две поверхности, которые соответственно будут иметь $(2p'+1)$-кратную и $(2p''+1)$-кратную связность, где $p'+p''=p$.

2. Во втором случае $E \sim 0$ на $w(-\varepsilon)$ не имеет места и мы видели, что в этом случае $w(t)$ не распадается; можно предположить, что $w(-\varepsilon)$ имеет $(2p+1)$-кратную связность и обладает $2p$ различными циклами. В момент, когда t становится положительным, некоторые циклы K исчезают: это те, для которых $N(K, E)$ не становится нулем. Но если имеются два таких цикла K_1 и K_2, что

$$N(K_1, E)=m_1, \quad N(K_2, E)=m_2,$$

то будет иметь место

$$N(m_2K_1-m_1K_2, E)=0,$$

так что цикл $m_2K_1-m_1K_2$ не исчезает. Отсюда следует, что все исчезающие циклы всегда являются линейной комбинацией *одного* из них и неисчезающих циклов. Значит, число различных циклов уменьшается, в силу этого факта, на одну и только на одну единицу.

С другой стороны, между существующими циклами вводится одна и только одна новая гомология

$$E \sim 0,$$

так что число циклов уменьшается еще на единицу.

Резюмируя сказанное, видим, что полное число различных циклов уменьшается всего на две единицы, а следовательно, $w(\varepsilon)$ имеет $(2p+1)$-кратную связность.

3. Прежде чем продолжить наши рассуждения, мы должны вкратце вспомнить то, что известно о поверхностях двух измерений, или, точнее, те свойства этих поверхностей, которые нам понадобятся в дальнейшем; начнем с двусторонних поверхностей.

Известно, что замкнутая двусторонняя поверхность $(2p+1)$-кратной связности допускает $2p$ различных циклов. Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_{2p}$

есть $2p$ фундаментальных циклов поверхности, выбранных таким образом, чтобы каждый цикл поверхности был гомологичным линейной комбинации этих $2p$ циклов.

Пусть теперь

$$X=\sum x_i C_i, \qquad Y=\sum y_i C_i$$

— две из этих линейных комбинаций, где коэффициенты x и y являются любыми целыми числами. Исследуем число $N(X, Y)$ относительно пересечений этих двух циклов X и Y; это число равно

$$N(X, Y)=F(x, y),$$

где $F(x, y)$ — билинейная форма относительно переменных x и y.

Все коэффициенты этой формы являются целыми и она меняет знак при перемене местами x и y, так что

$$F(x, y)=-F(y, x);$$

наконец, ее дискриминант равен 1.

Можно выбрать фундаментальные циклы C (причем бесконечным числом способов) таким образом, что форма $F(x, y)$ будет *приведенной*, т. е. она приведется к виду

$$x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3+x_5y_6-x_6y_5+\ldots.$$

Мы видим, что если форма F приведена, то $N(C_i, C_k)$ будет нулем, когда индексы i и k будут иметь одну и ту же четность; иначе говоря, если четность i и k будет одинаковой, то циклы C_i и C_k не будут пересекаться или же будут гомологичны с непересекающимися циклами.

В дальнейшем нам часто будет полезно заменять поверхность фуксовым многоугольником. Сделать это можно двумя способами. Предположим, что форма F приведена, и рассмотрим p циклов с нечетными номерами

$$C_1, C_3, \ldots, C_{2p-1},$$

которые, как можно предположить, не пересекаются.

Вот как можно уяснить себе образование этих циклов. Образуем *скелет* нашей поверхности; этот скелет будет представлять из себя сеть, в которой можно описать p различных замкнутых путей. При подходящем выборе на этой сети p точек p путей окажутся разбитыми, хотя сеть не распадается. Каждая из этих точек представит замкнутую кривую (которая будет многообразием $w(t)$ предыдущего параграфа). Мы будем иметь тогда p замкнутых кривых, не имеющих ни одной общей точки и представляющих собой наши p циклов

$$C_1, C_3, \ldots, C_{2p-1}.$$

Разрежем нашу поверхность по этим p кривым; она останется целым куском, но теперь ее можно будет развернуть на плоскости и после развертки она сведется к плоской области, ограниченной $2p$ замкнутыми кривыми. Одна из этих $2p$ кривых ограничивает ее внешним образом, а другие — внутренним образом. Эти $2p$ кривых сопряжены между собой по две, причем две сопряженные кривые соответствуют двум сторонам одного и того же сечения. Таким образом, эта область уподобляется фуксову многоугольнику третьего семейства, и мы получаем возможность рассмотреть порождаемую многоугольником фуксову группу, а также разложение плоскости на бесконечное число многоугольников, конгруентных порождающему многоугольнику.

Предположим теперь, что мы разрежем нашу поверхность, следуя $2p$ циклам. Можно так провести эти $2p$ циклов, что все они будут проходить через одну точку, которая и будет их единственной общей точкой. Если после разрезания развернуть поверхность на плоскости, то получится многоугольник с $4p$ сторонами, сопряженными между собой по две, уподобляемый фуксову многоугольнику (у которого будет лишь один цикл вершин), таким образом, что сумма его углов будет равна 2π. Если форма F является приведенной, то закон сопряжения сторон будет следующим: 1 с 3, 2 с 4, 5 с 7, 6 с 8, 9 с 11, 10 с 12, и т. д. Здесь также будет уместно ввести фуксову группу и разложение фундаментального круга на конгруентные многоугольники.

Но теперь возникает один вопрос, который задержит наше внимание на некоторое время. Фуксова группа, о которой идет речь, является не чем иным, как фундаментальной группой поверхности, о которой я говорил на стр. 501 «Analysis situs». Понятие этой группы основано на понятии *эквивалентности* циклов и на различии между этим понятием и понятием гомологии (стр. 470 и 503 «Analysis situs»).

Рассмотрим два цикла K и K'; циклы эти выходят из одной точки M и возвращаются в нее же. Напишем эквивалентность

$$K \equiv K',$$

если можно перейти от одного цикла к другому при помощи непрерывной деформации, не выходя за пределы рассматриваемого многообразия. Тогда может случиться, что цикл K', многократно проходя через начальную точку M, распадется на несколько других и, следовательно, будет эквивалентным нескольким последовательным циклам K_1, K_2, K_3, которые следуют в указанном порядке. Тогда можно записать

$$K \equiv K_1 + K_2 + K_3,$$

но мы не имеем права менять порядок членов и писать, например,

$$K \equiv K + K_3 + K_2.$$

Это как раз то, что отличает эквивалентности от гомологий; в этих последних можно менять порядок членов и, следовательно, эквивалентность

$$K \equiv K_1 + K_2 + K_3$$

может послужить основой для вывода не только гомологии

$$K \sim K_1 + K_2 + K_3,$$

но также и гомологии

$$K \sim K_1 + K_2 + K_3.$$

Точно так же предположим, что K', вместо того, чтобы выходить из точки M, выходит из другой точки M', в которую и возвращается. Пусть L будет произвольный путь от M к M'. Тогда цикл $L+K'-L$ так же, как и K, пойдет от M к M. Предположим, что имеет место эквивалентность

$$K \equiv L + K' - L,$$

а так как мы не имеем права менять порядок членов, то мы не можем вывести отсюда $K \equiv K'$, а можем вывести только гомологию $K \sim K'$.

Таким образом, в гомологиях члены составляются по правилам обычного сложения; в эквивалентностях же члены составляются по тем же правилам, что и подстановки группы. По этой причине совокупность эквивалентностей может, так сказать, символизироваться группой, являющейся фундаментальной группой многообразия.

В случае, который нас интересует, рассмотрим фундаментальный круг, разложенный, в соответствии со сказанным выше, на конгруентные фуксовы многоугольники. Каждый из этих многоугольников имеет по $4p$ сторон. Какой-либо цикл будет представлен или замкнутой линией, или же линией, проходящей от одной точки плоскости к другой, «конгруентной» точке (т. е. преобразованной из первой с помощью подстановки фуксовой группы). В первом случае цикл эквивалентен нулю, во втором нет.

Итак, фундаментальная группа сама является фуксовой группой, порожденной $2p$ подстановками, которые отвечают $2p$ фундаментальным циклам C_i; в случае если форма F приведена, то закон сопряжения сторон фуксова многоугольника будет тем же, о котором я говорил выше, и между $2p$ циклами имеется только одна эквивалентность, которую можно записать

$$0 \equiv C_1 + C_2 - C_1 - C_2 + C_3 + C_4 - C_3 - C_4 + C_5 + C_6 - C_5 - C_6 + \ldots$$

Эта эквивалентность достаточна для определения фундаментальной группы.

Можно попробовать образовать цикл, который будет гомологичным, но не эквивалентным нулю. Заметим сперва, что это невозможно при $p=1$, так как тогда написанная мною эквивалентность примет вид

$$C_1+C_2=C_2+C_1,$$

что означает, что любые два цикла переместимы (с точки зрения эквивалентности). Известно, к тому же, что в этом случае фуксовы функции сводятся к эллиптическим функциям, а все подстановки фуксовой группы переместимы.

Если $p>1$, то предположим, что закон сопряжения сторон будет тем же, который был изложен нами выше, т. е. 1 с 3, 2 с 4 и т. д. Пусть 0 и 1 будут две вершины стороны 1; пусть 1 и 2 — вершины стороны 2 и т. д.; пусть, наконец, $4p-1$ и $4p=0$ — вершины стороны $4p$. Соединим вершины 0 и 4 линией, находящейся внутри многоугольника. Эта линия будет представлять цикл, эквивалентный

$$C_1+C_2-C_1-C_2.$$

Следовательно, он будет гомологичен нулю, но не будет эквивалентен нулю.

Возьмем теперь другой способ представления: представим нашу поверхность с помощью фуксова многоугольника третьего семейства, ограниченного $2p$ замкнутыми кривыми, сопряженными по две друг с другом, причем одна из них ограничивает многоугольник снаружи, все прочие — изнутри.

Пусть k будет одной из этих замкнутых кривых, соответствующей циклу C_2, и пусть k' будет сопряженная ей кривая. Пусть M будет точка k, M' — соответствующая точка k'; соединим M и M' линией MPM', соответствующей циклу C_1. Проведем теперь внутри многоугольника замкнутую кривую K, охватывающую k и k', но не охватывающую никакой другой кривой из тех, которые образуют контур многоугольника.

Пусть Q — точка на k, из которой выходит и в которой заканчивается этот цикл. Пусть L — линия, идущая от Q к M. Очевидно, будет иметь место эквивалентность

$$K\equiv L+k+MPM'+k'-MPM'-L,$$

т. е.

$$K\equiv L+C_2+C_1-C_2-C_1-L.$$

Из этой эквивалентности можно заключить, что $K\sim 0$, т. е. что K гомологично нулю, но ему не эквивалентно.

Посмотрим, наконец, что происходит на самой поверхности, и ограничимся циклами *без петель*, т. е. *циклами, которые не пересекают сами себя.*

Пусть C — подобный цикл, гомологичный нулю. Он разложит поверхность $(2p+1)$-кратной связности на две части таким образом, что если сжимать поверхность с целью свести этот цикл C к точке, то поверхность распадется на две другие. Если одна из полученных таким образом двух поверхностей и имеет простую связность, то это лишь вследствие того, что цикл C был эквивалентен нулю. Если эти две поверхности имеют $(2p'+1)$-кратную и $(2p''+1)$-кратную связность, где $p'>0$, $p''>0$, $p'+p''=p$, то это, наоборот, ввиду того, что цикл C был гомологичен нулю, но не эквивалентен нулю.

Легко понять и, к тому же, давно известно, что две двусторонние поверхности двух измерений, имеющие одно и то же число Бетти, всегда являются гомеоморфными. Достаточно заметить, что каждая из них может быть заменена фуксовым многоугольником третьего семейства, ограниченным $2p$ замкнутыми кривыми, и что два подобных многоугольника, иначе говоря, две области, ограниченные внешним образом замкнутой кривой и внутренним образом $2p-1$ замкнутыми кривыми, очевидно, всегда гомеоморфны между собой.

Но можно пойти и дальше. Пусть S будет поверхность $(2p+1)$-кратной связности; проведем на этой поверхности две системы по $2p$ циклов.

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{2p};\qquad C'_1,\ C'_2,\ \ldots,\ C'_{2p}.$$

Поверхность S всегда можно рассматривать как гомеоморфную самой себе, иными словами, некоторой точке M на поверхности мы можем сопоставить другую точку M' поверхности так, чтобы закон соответствия был непрерывным и взаимно однозначным. В каком случае можно это соответствие выбрать так, что, когда точка M описывает циклы,

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{2p},$$

точка M' описывает:

1) или циклы

$$C'_1,\ C'_2,\ \ldots,\ C'_{2p};$$

2) или циклы, эквивалентные циклам

$$C'_1,\ C'_2,\ \ldots,\ C'_{2p};$$

3) или циклы, гомологичные циклам

$$C'_1,\ C'_2,\ \ldots,\ C'_{2p}?$$

Я рассмотрю лишь третий вопрос, который является самым легким. Возьмем форму $F(x,\ y)$, представляющую число N, относящееся к пересечению циклов $\sum xC$ и $\sum yC$. Возьмем также форму $F'(x',\ y')$, относящуюся к пересечению циклов $\sum x'C'$ и $\sum y'C'$.

Ясно сначала, что если возможно такое соответствие, что M' описывает цикл, гомологичный C'_i, в то время как M описывает цикл, гомо-

логичный C_i, то обе формы должны быть идентичными, иными словами, отличаться лишь подстановкой переменных x', y' вместо переменных x и y. Если, например, мы предполагаем, что F приведена и что

$$F = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3 + \ldots,$$

то должно иметь место

$$F' = x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1 + x'_3 y'_4 - x'_4 y'_3 + \ldots.$$

Циклы C' являются линейными комбинациями циклов C и, если мы предположим, что

$$\sum xC = \sum x'C', \qquad \sum yC = \sum y'C',$$

то новые переменные x' и y' также будут линейными комбинациями с целыми коэффициентами x и y. Необходимо, следовательно, чтобы форма F не изменялась при линейной подстановке, осуществляющей переход от x к x' и от y к y'.

Я утверждаю, что это необходимое условие является также и достаточным.

Для доказательства этого посмотрим, какими будут линейные подстановки, не изменяющие форму F, которую мы предполагаем приведенной.

1. Если предположить, что имеет место

$$x'_1 = x_1 + x_2, \qquad x'_i = x_i \qquad (i > 1)$$
$$y'_1 = y_1 + y_2, \qquad y'_i = y_i \qquad (i > 1),$$

то, очевидно, будет иметь место и

$$x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1 + \ldots = x_1 y_2 - x_2 y_1 + \ldots.$$

Ясно, что то же самое будет, если взять

$$x'_2 = x_1 + x_2,$$

или же

$$x'_3 = x_3 + x_4,$$

или же

$$x'_4 = x_4 + x_3,$$

или, в более общем случае,

$$x'_{2k-1} = x_{2k-1} + x_{2k},$$

или, наконец,

$$x'_{2k} = x_{2k-1} + x_{2k},$$

причем все прочие x'_i равны соответствующему x_i.

То же самое будет опять-таки, если x подвергнутся подстановкам, обратным предыдущим, иными словами, если положить

$$x'_{2k-1} = x_{2k-1} - x_{2k},$$

или же

$$x'_{2k} = x_{2k} - x_{2k-1},$$

причем все прочие x'_i будут равны соответствующим x_i.

Само собой разумеется, что линейная подстановка, переводящая y в y', здесь идентична той, которая переводит x в x'.

Таков первый тип линейных подстановок, которые не меняют приведенной формы F.

2. Рассмотрим теперь второй тип.

Предположим, что дано

$$x'_1 = x_1 + x_3, \qquad x'_4 = x_4 - x_2,$$

$x'_1 = x_i$ (за исключением $i = 1$ и $i = 4$) или, в более общем виде,

$$x'_{2k-1} = x_{2k-1} + x_{2j-1}, \qquad x'_{2j} = x_{2j} - x_{2k}$$
$$(\text{за исключением } i = 2k - 1 \text{ и } i = 2j);$$

ясно, что приведенная форма F не меняется.

Она не меняется также и при обратной подстановке

$$x'_{2k-1} = x_{2k-1} - x_{2j-1}, \qquad x'_{2j} = x_{2j} + x_{2k},$$
$$x'_i = x_i \ (\text{за исключением } i = 2k - 1 \text{ и } i = 2j).$$

Таков наш второй тип.

Совершенно ясно, что всякая подстановка, не меняющая приведенной формы F, может рассматриваться как комбинация подстановок, входящих в оба этих типа.

Следовательно, достаточно будет доказать теорему относительно подстановок этих двух типов.

Сперва, что касается второго типа, то мы можем представить поверхность фуксовым многоугольником третьего семейства, ограниченным внешним и внутренним образом $2p$ замкнутыми кривыми

$$A_1, A'_1; \ A_3, A'_3; \ \ldots; \ A_{2p-1}, A'_{2p-1},$$

сопряженными по две между собой и соответствующими p циклам с нечетными индексами

$$C_1, \ C_3, \ldots, \ C_{2p-1}.$$

Для построения p циклов с четными индексами достаточно действовать следующим образом.

Пусть

$$P_1, \ P_3, \ldots, \ P_{2p-1}$$

— p точек, взятых произвольно на кривых $A_1, A_3, \ldots, A_{2p-1}$; пусть $P'_1, P'_3, \ldots, P'_{2p-1}$ будут соответствующие точки на сопряженных кривых $A'_1, A'_3, \ldots, A'_{2p-1}$. Соединим P_1 с P'_1, P_3 с $P'_3, \ldots, P_{2p-1}$ с P'_{2p+1} с помощью p линий

$$L_1, L_3, \ldots, L_{2p-1},$$

проведенных так, чтобы они взаимно не пересекались. Эти p линий будут гомологичны p циклам с четными индексами

$$C_2, C_4, \ldots, C_{2p}.$$

Для упрощения предположим, что фуксов многоугольник будет ограничен внешним образом с помощью кривой A_5 (которая не будет играть никакой роли в дальнейших рассуждениях). Построим кривую B, которая охватывает две кривые A_1 и A_3, но не охватывает никаких других; эта кривая B будет представлять цикл, гомологичный с

$$C_1+C_3.$$

Пусть R — область, ограниченная внешним образом этой кривой B и внутренним образом кривыми A_1 и A_3. Рассмотрим подстановку фуксовой группы, которая переводит A_1 в A'_1 (и которая соответствует, к тому же, циклу C_2). Пусть R' будет областью, преобразованной из области R с помощью этой подстановки. Она будет ограничена внешним образом с помощью A'_1, а внутренним образом — двумя замкнутыми кривыми B' и A''_3, преобразованными из B и A_3.

Модифицируем фуксов многоугольник путем удаления области R и прибавления области R'. Новый фуксов многоугольник будет ограничен внешним образом кривой A_5, а внутренним образом — кривыми

$$A'_5;\ B;\ B';\ A'_3;\ A''_3;\ A_7;\ A'_7;\ \ldots;\ A_{2p-1},\ A'_{2p+1}.$$

Две точки плоскости, преобразованные одна из другой с помощью подстановки фуксовой группы, соответствуют, очевидно, одной и той же точке поверхности S. Новый фуксов многоугольник будет, следовательно, соответствовать, как и прежний, всей поверхности S, так как исключенная область R была заменена преобразованной из нее областью R'. К тому же, эти два многоугольника, которые представляют собой плоские области, ограниченные $2p$ замкнутыми кривыми, гомеоморфны между собой таким образом, что

$$A_1,\ A'_1;\ A_3,\ A'_3;\ A_5,\ A'_5;\ \ldots;\ A_{2p-1},\ A'_{2p-1}$$

соответствуют

$$B,\ B';\ A_3,\ A'_3;\ A_5,\ A'_5;\ \ldots;\ A_{2p-1},\ A'_{2p-1}.$$

Отсюда следует, что в этом гомеоморфизме нечетные циклы

$$C_1,\ C_3,\ C_5,\ \ldots,\ C_{2p-1}$$

будут соответствовать циклам, гомологичным следующим:

$$C_1+C_3,\ C_3,\ C_5,\ \ldots,\ C_{2p-1}.$$

Чему же будут соответствовать четные циклы? Каждый из этих циклов соответствует подстановке фуксовой группы, например, C_2 соответствует подстановке T_1, которая переводит A_1 в A_1', C_4 — подстановке T_3, которая переводит A_3 в A_3', и т. д. Очевидно, к тому же, что в исследуемом гомеоморфизме подстановка T_1 заменяется подстановкой, переводящей B в B' (циклы, соответствующие A_1 и A_1'), которая есть все еще T_1, подстановка T_3 — подстановкой, переводящей A_3'' в A_3', которая будет равна $T_1^{-1}T_3$, причем она не меняется в результате дальнейших подстановок. Это дает нам возможность сказать наперед, что циклы

$$C_2,\ C_4,\ C_6,\ \ldots$$

будут соответствовать циклам

$$C_2,\ C_4-C_2,\ C_6,\ \ldots.$$

Однако здесь может возникнуть сомнение, так как подстановка T_1 соответствует не только циклу C_2, но и всем циклам C_2+K, где K — произвольная линейная комбинация циклов нечетного порядка.

Значит, нам следует вернуться к линиям L, определенным выше. Всегда можно предположить, что ни одна из этих линий не пересекает B, за исключением линий L_1 и L_3, которые пересекают B в N_1 и N_3; я обозначу через M_1 и M_1', M_3 и M_3' точки пересечения A и A_1' с L_1, A_3 и A_3' с L_3; через N_1' и N_3' точки, полученные из N_1 и N_3 с помощью T_1, которые лежат на B', и буду рассматривать отрезки $N_1'M_1'$, $N_3'M_3''$, полученные с помощью T_1 из отрезков N_1M_1 и N_3M_3 линий L_1 и L_3. Точка M_3'' находится на A_3''. Линии L и новые отрезки $N_1'M_1'$, $N_3'M_3'$ не пересекаются ни в одной точке.

Будем рассматривать также отрезки N_3N_1 на B и $N_3'N_1'$ на B' или, лучше, отрезки $N_3N_1^0$ и $N_3'N_1'^0$, оканчивающиеся в точках N_1^0 и $N_1'^0$, расположенных на B и B', бесконечно близко от N_1 и N_1' и таким образом, что N_1 и N_1' не будут на дугах $N_3N_1^0$ и $N_3'N_1'^0$. Кроме этого, я рассмотрю линию $N_1'^0M_1'^0N_1^0$, бесконечно близкую от $N_1'M_1'N_1$ и не пересекающуюся с ней. В дополнение к этим различным отрезкам я могу построить линии

$$L_1',\ L_3',\ \ldots,$$

соответствующие в нашем гомеоморфизме линиям

$$L_1,\ L_3,\ \ldots.$$

Первая будет линия $N_1M_1'N_1'$; вторая, которая должна следовать от M_3'', к M_3', будет

$$M_3''N_3'+N_3'N_1'^0+N_1'^0M_1'^0N_1^0+N_1^0N_3+N_3M_3;$$

далее, L'_5 будет идентична L_5, L'_7 идентична L_7 и т. д. Чтобы выяснить положение, достаточно будет проверить, что эти различные линии не пересекаются.

Очевидно, эти линии гомологичны с

$$L_1,\ L_3 - L_1,\ L_5, \ldots,$$

что означает, что циклы C_2, $C_4, \ldots$ соответствуют

$$C_2,\ C_4 - C_2,\ C_6, \ldots.$$

Итак мы имеем, резюмируя, $C'_i \sim C_i$, исключая $i = 1$ или 4, и

$$C'_1 \sim C_1 + C_3, \quad C'_4 \sim C_4 - C_2.$$

Если же мы предположим, что $\sum xC = \sum x'C'$, то будем иметь $x_i = x'_i$, за исключением тех случаев, когда $i = 2$ и 3, и

$$x'_3 = x_3 - x_1, \qquad x'_2 = x_2 + x_4.$$

Если бы надо было получить

$$x'_3 = x_3 + x_1, \qquad x'_2 = x_2 - x_4,$$

то надо было провести B вокруг A_1 и A'_3, а не вокруг A_1 и A_3. Если бы захотели иметь

$$x'_1 = x_1 - x_5, \qquad x'_4 = x_2 + x_4,$$

то надо было бы провести B вокруг A_1 и A_3 и преобразовать область R уже посредством не T_1, а T_3.

Этот прием приложим, следовательно, ко всем подстановкам второго типа.

Надо поступить подобным образом и для подстановок первого типа. Предположим, например,

$$x'_1 = x_1 + x_2, \qquad x'_i = x_i \qquad (i > 1),$$

т. е.

$$C_1 \sim C'_1, \qquad C'_1 \sim C_2 - C_1.$$

Я не буду представлять нашу поверхность ни фуксовым многоугольником третьего семейства, ни фуксовым многоугольником первого семейства так, как я это делал раньше, а попробую применить аналогичный и, так сказать, промежуточный способ представления.

Действительно, можно отметить, что нас ничто не заставляет ограничиваться фуксовыми многоугольниками в точном смысле, т. е. многоугольниками, ограниченными дугами круга, ортогонально пересекающими один и тот же фундаментальный круг. В вопросе, подобном тому, который

интересует нас в настоящее время, ничто не мешает заменить, например, фуксов многоугольник первого семейства другим криволинейным многоугольником, который будет ему гомеоморфным, а в остальном будет произвольным.

Воспользуемся этой гибкостью, чтобы принять следующий способ представления.

Наш многоугольник будет ограничен внешним образом с помощью криволинейного четырехсторонника, а внутренним образом — $2p-2$ замкнутыми кривыми. Противоположные стороны четырехсторонника будут сопряжены между собой и, с другой стороны, $2p-2$ замкнутых кривых будут сопряжены между собой по две любым способом.

Пусть a, b, c, d будут четыре вершины четырехсторонника, а

$$A_3,\ A'_3;\ A_5,\ A'_5;\ \ldots;\ A_{2p-1},\ A'_{2p-1}$$

— $2p-2$ замкнутые кривые, связанные между собой по две; эти замкнутые кривые будут соответствовать $p-1$ циклам нечетного порядка

$$C_3,\ C_5,\ \ldots,\ C_{2p-1}.$$

Стороны ab и dc четырехсторонника будут соответствовать циклу C_1; стороны ad и bc — циклу C_2.

Возьмем на замкнутых кривых A_i какие-либо точки P_i, соединим каждую из точек P_i с соответствующей точкой P'_k кривой A'_i. Линия L_i, соединяющая P_i с P'_i, будет соответствовать циклу C_{i+1}, при условии, что линии L проведены так, что они не пересекают сторон четырехсторонника и не пересекаются между собой.

Соединим противоположные вершины a и c четырехсторонника при помощи криволинейной диагонали ac, которая разделит четырехсторонник на два треугольника acb и acd и которую надо провести так, чтобы все замкнутые кривые A и A' оказались внутри первого треугольника acb.

Группа, которая будет играть роль использованных нами выше фуксовых групп, будет порождена следующими подстановками: T_1, которая переведет ad в bc; T_2, которая переведет ab в dc; T_i $(i=3,\ 5,\ \ldots,\ 2p-1)$, которая переведет A_i в A'_i.

Пусть bcf будет треугольником, полученным в результате преобразования треугольника adc подстановкой T_1.

Треугольник adc можно заменить треугольником bcf и, следовательно, можно заменить наш порождающий многоугольник новым многоугольником, ограниченным внешним образом четырехсторонником $abfc$, а внутренним образом — $2p-2$ замкнутыми кривыми A и A'; эти замкнутые кривые опять-таки сопряжены друг с другом по две, сопряжены между собой и противоположные стороны четырехсторонника.

Эти два многоугольника (которые оба соответствуют всей поверхности S) гомеоморфны один другому так, что

$$ab,\ bc,\ cd,\ da,\ A_i,\ A'_i,\ L_i$$

соответственно относятся к

$$ab,\ bf,\ fc,\ ca,\ A_i,\ A'_i,\ L_i.$$

Циклы

$$C_1,\ C_2,\ C_i,\ C_{i+1}$$

соответствуют, следовательно, в этом гомеоморфизме

$$C_1,\ C_2+C_1,\ C_i,\ C_{i+1}.$$

Итак, поверхность S гомеоморфна самой себе так, что циклу C_k соответствует цикл C'_k, где

$$C'_k=C_k \quad (k=1,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ 2p),$$
$$C'_2=C_2+C_1.$$

В этом случае имеет место

$$x'_1=x_1-x_2, \qquad x'_2=x_2, \qquad x'_3=x_3,\ \ldots, \qquad x'_{2p}=x_{2p}.$$

А это является подстановкой первого типа, для которой наша теорема теперь доказана, и очевидно, что точно так же можно было бы доказать ее для всех других подстановок первого типа.

Подводя итоги, мы можем сказать следующее.

Условием, необходимым и достаточным для того чтобы поверхность S была гомеоморфной сама с собой так, чтобы циклам C_i соответствовали циклы, гомологичные циклам C'_i, является идентичность формы $F(x, y)$, соответствующей циклам C, с формой $F(x', y')$, относящейся к циклам C'.

Отсюда нетрудно заключить, что цикл $\sum a_i C_i$ всегда гомологичен циклу *без петель*, т. е. такому, который не пересекается сам с собой, если целые числа a_i взаимно просты. Если же, наоборот, эти целые a_i не являются взаимно простыми, то он не может быть гомологичным циклу без петель.

Установим сперва первое положение.

Достаточно будет доказать, что можно найти $2p$ циклов

$$C'_1,\ C'_2,\ \ldots,\ C'_{2p}$$

таких, что

$$C'_1=\sum a_i C_i$$

и что форма $F(x', y')$, относящаяся к циклам C' будет идентична форме $F(x, y)$, относящейся к циклам C так, что будет иметь место

$$F(x',\ y')=x'_1y'_2-x'_2y'_1+x'_3y'_4-x'_4y'_3+\ldots,$$

если мы предположим, как мы это делаем обычно, что циклы C были выбраны таким образом, чтобы форма $F(x, y)$ оказалась приведенной.

И действительно, если циклы C' удовлетворяют этому условию, то поверхность S будет гомеоморфна самой себе таким образом, что циклу C_i будет соответствовать цикл, гомологичный C'_i. Значит, можно найти цикл, гомологичный C'_1, который в этом гомеоморфизме будет соответствовать C_1 и который, следовательно, не будет иметь петель, так как C_1 не имеет таковых.

Заметим сперва, что если целые a_i взаимно просты, то можно найти $2p$ циклов

$$C''_1,\ C''_2,\ \ldots,\ C''_{2p}$$

таких, что

$$C''_1 = C'_1 = \sum a_i C_i, \quad C''_k = \sum b_{i,\,k} C_i,$$

где a_i и $b_{i,\,k}$ — целые числа, детерминант которых равен 1.

Пусть $F(x'', y'')$ будет форма, соответствующая циклам C''.

Какое соотношение должно существовать между переменными x' и x''? Цикл C'_1 должен совпадать с C''_1 и очевидно, что

$$x'_2,\ x'_3,\ \ldots,\ x'_{2p}$$

должны быть линейными комбинациями

$$x''_2,\ x''_3,\ \ldots,\ x''_{2p}$$

и что это же верно для разности $x'_1 - x''_1$.

Остается доказать, что существует линейная замена переменных, которая удовлетворяет этому условию и которая, в то же время, будет такой, что форма $F(x', y')$ окажется приведенной.

Итак, мы можем написать

$$F(x'', y'') = x''_1 Y_2 - y''_1 X_2 + \Phi(x'', y''),$$

где X — линейная комбинация из $x''_2, x''_3, \ldots, x''_{2p}$, коэффициенты при которых взаимно просты, Y — такая же комбинация из $y''_2, y''_3, \ldots, y''_{2p}$, и, наконец, Φ — билинейная форма из

$$x''_2,\ x''_3,\ \ldots,\ x''_{2p};\quad y''_2,\ y''_3,\ \ldots,\ y''_{2p}.$$

Я уже отметил, что коэффициенты X_2 взаимно просты и действительно, если их общий наибольший делитель был бы $a > 1$, то детерминант формы $F(x'', y'')$ делился бы на a^2, что невозможно, так как этот детерминант равен 1.

Так как эти коэффициенты взаимно просты, то мы можем найти $2p - 1$ линейных комбинаций

$$X_2,\ X_3,\ \ldots,\ X_{2p}$$

из $x''_2, x''_3, \ldots, x''_{2p}$, первой из которых будет именно X_2 и коэффициенты которых будут целые числа, причем детерминант последних будет равен 1.

При этих условиях Ф будет билинейной формой из

$$X_2,\ X_3,\ \ldots,\ X_{2p}$$

и из соответствующих комбинаций

$$Y_2,\ Y_3,\ \ldots,\ Y_{2p},$$

образованных с y''. Тогда мы можем написать

$$\Phi = X_2 Y' - Y_2 X' + \psi(X,\ Y),$$

где X' — линейная комбинация из $X_3,\ X_4,\ \ldots,\ X_{2p}$, Y' — такая же комбинация из Y, ψ — билинейная форма из $4p-4$ переменных

$$X_3,\ X_4,\ \ldots,\ X_{2p};\ Y_3,\ Y_4,\ \ldots,\ Y_{2p}.$$

Детерминант этой формы ψ должен делить детерминант формы F; следовательно, он будет равен 1. Так как детерминант формы ψ равен 1, то можно найти $2p-2$ линейных комбинаций

$$x'_3,\ x'_4,\ \ldots,\ x'_{2p}$$

из переменных $X_3,\ X_4,\ \ldots,\ X_{2p}$ таких, что форма ψ будет приведенной, если принять x' за новые переменные вместе с соответствующими комбинациями y' из Y.

Если теперь положить

$$x'_1 = x''_1 - X', \qquad y''_1 = y''_1 - Y',$$

$$x'_2 = X_2, \qquad y'_2 = Y_2,$$

то, следовательно,

$$F = x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1 + \psi.$$

Так как форма ψ является приведенной, то это же верно и для F, так что новые переменные x' вполне удовлетворяют требованию задачи.

Итак, первое утверждение установлено.

Предположим теперь, что a_i не являются взаимно простыми; я утверждаю, что всякий цикл, гомологичный $\sum a_i C_i$, будет включать петли. Пусть, действительно, будет

$$a_i = b_i d,$$

где d — общий наибольший делитель всех a_i, а b_i взаимно просты. Пусть затем

$$\sum b_i C_i = C'_1, \qquad \sum a_i C_i = dC'_1.$$

В соответствии с тем, что уже было сказано, поверхность S будет гомеоморфна самой себе так, что C_1 будет соответствовать C'_1. Нам до-

статочно показать, что каждый цикл, гомологичный dC_1, будет включать петли, так как в нашем гомеоморфизме каждый цикл, гомологичный $\sum a_i C_i$ будет соответствовать циклу, гомологичному dC_1.

Для этого вернемся к представлению поверхности S с помощью фуксового многоугольника R_0 с $4p$ сторонами и первого семейства, который со своими образами при различных преобразованиях заполнит поверхность фундаментального круга.

Пусть K будет циклом, который, предположим, гомологичен dC_1. Этот цикл будет представлен некоторой линией amb, соединяющей некоторую точку a внутри фундаментального круга с точкой b, полученной из a с помощью подстановки фуксовой группы. Кроме этой линии, мы должны также рассмотреть все линии, полученные из нее с помощью различных подстановок фуксовой группы, так как любая из этих преобразованных линий может, так же, как и сама линия amb, представить цикл K.

Рассмотрим, в частности, дуги линии amb или преобразованных из нее, которые окажутся внутри многоугольника R_0. Совокупность этих дуг будет тем, что я назову *образом* цикла K.

Этот образ будет состоять из некоторого числа дуг

$$A_1B_1,\ A_2B_2, \ldots, A_nB_n,$$

соединяющих некоторые точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, расположенные на периметре R_0, с другими точками $B_1, B_2, \ldots, B_n$, также расположенными на периметре R_0. Для того чтобы цикл был непрерывным и замкнутым, необходимо, чтобы точки B_1 и A_2, B_2 и A_3, ..., B_{n-1} и A_n, B_n и A_1 соответствовали одной и той же точке на S и, следовательно, чтобы это были *сопряженные* точки периметра R_0, т. е. соответственные точки на обоих сопряженных сторонах.

Поставим в соответствие некоторое число каждой точке периметра R_0, причем сделаем это следующим образом: 1) числа, соответствующие точкам A_i и B_i должны быть целыми; 2) числа, соответствующие другим точкам периметра, должны быть равным n целым $+^1/_2$; 3) следуя по периметру в прямом направлении, число меняется лишь при переходе через точку A_i или через точку B_i; 4) оно увеличится сразу на единицу при переходе через точку A_i и уменьшится сразу на единицу при переходе через точку B_i; 5) значение числа в одной из точек A_i или в одной из точек B_i будет средним арифметическим двух постоянных значений этого числа вдоль двух дуг, сходящихся в этой точке. Если, например, следуя по периметру в прямом направлении, будут встречены последовательно точки

$$A_3,\ A_2,\ B_1,\ B_2,\ A_1,\ B_3,$$

то число будет равно 0 в A_3, $^1/_2$ на дуге A_3A_2, 1 в A_2, $1+^1/_2$ на дуге A_2B_1, 1 в B_1, $^1/_2$ на дуге B_1B_2, 0 в B_2, $-^1/_2$ на дуге B_2A_1, 0 в A_1, $^1/_2$ на дуге A_1B_3, 0 в B_3, и, наконец, $-^1/_2$ на дуге B_3A_3.

Так как имеется столько же точек A, сколько и точек B, то после прохождения всего периметра возвращаются к начальному значению.

Установив это, я утверждаю прежде всего, что если цикл не обладает петлями или, что то же, если дуги A_iB_i взаимно не пересекаются, то две точки A_i и B_i соответствуют одному и тому же числу. Действительно, пусть α будет одной из двух дуг, которые на периметре R_0 идут от A_i к B_i. Если точка A_i находится на этой дуге α, то там же должна находиться и точка B_k, ибо если бы две пары точек A_iB_i, A_kB_k *перекрещивались*, иными словами, если бы эти пары взаимно разделеляли друг друга, то две дуги A_iB_i и A_kB_k должны были бы пересекаться. Отсюда следует, что на дуге α есть столько же точек A, сколько точек B, а это означает, что два конца A_i и B_i дуги α соответствуют одному и тому же числу.

Это и следовало доказать.

Сравним теперь числа, соответствующие точкам A_i и B_{i+1} (для большей симметрии в обозначениях я буду обозначать точку A_1 безразлично через A_1 или через A_{n+1}).

Как мы уже сказали, точки A_i и B_{i+1} являются *сопряженными* на периметре R_0.

Как нам выразить, что цикл K гомологичен dC_1? Это означает, что если мы будем рассматривать пересечения цикла K с различными фундаментальными циклами C_i и согласимся рассматривать эти пересечения как положительные или отрицательные, в зависимости от направления, в котором происходит пересечение обоих циклов (см: «Analysis situs», Journal de l'École Polytechnique), то число положительных пересечений будет таким же, что и число отрицательных пересечений для каждого цикла C_i, за исключением C_2; для C_2 первое число превзойдет второе на d единиц. (Я говорю C_2, так как C_1 пересекает в одной точке C_2, но не пересекает других циклов C_i, если мы выберем фундаментальные циклы так, чтобы форма F оказалась приведенной).

Выражаясь иначе, пусть

$$P_1,\ P_2,\ P_1',\ P_2',\ P_3,\ P_4,\ P_3',\ P_4'$$

будут последовательные стороны R_0. Положим, для упрощения, $p=2$; в этом случае стороны P_1, P_2, P_3, P_4 соответственно сопряжены с P_1', P_2', P_3', P_4'. Сторона P_i соответствует циклу C_i, а сторона P_i' — циклу C_i', проходимому в противоположном направлении. Таким закон сопряжения сторон будет, если форма F является приведенной.

Пусть, затем, N_i есть разность между числом точек A, находящихся на P_i, и числом точек B, находящихся на той же стороне P_i; пусть N_i' будет соответственной разностью для стороны P_i'.

Тогда получим

$$N_2=d, \qquad N_2'=-d, \qquad N_1=N_3=N_4=N_1'=N_3'=N_4'=0.$$

Эти условия выражают то, что цикл K гомологичен dC_1.

Обозначим через Q_i, S_i две вершины стороны P_i, взятые так, что пробегая эту сторону в прямом направлении, переходят от Q_i к S_i; подобно этому Q'_i, S'_i будут две вершины P'_1. В соответствии с этим определением очевидно, что вершина S_1 будет совпадать с вершиной Q_2, вершина S_2 — с вершиной Q'_1 и т. д.

Число, соответствующее S_i, будет равно числу, соответствующему Q_i, увеличенному на N_i. Но поскольку все N и N' являются кратными d, то мы должны заключить, что числа, соответствующие различным вершинам R_0, различаются между собой числами, кратными d.

Рассмотрим теперь две сопряженные стороны P_i и P'_i и представим себе две точки, из которых первая пробегает сторону P_i в прямом направлении, двигаясь от Q_i к S_i, а вторая пробегает сторону Q'_i в обратном направлении, двигаясь от S'_i к Q'_i, причем *обе они остаются постоянно сопряженными*. Когда первая из них пройдет через точку A, вторая пройдет через сопряженную точку, которой будет B; число, соответствующее первой точке, увеличится на одну единицу и то же самое будет с числом, относящимся ко второй точке, так как она пройдет через точку B, *двигаясь в противоположном направлении*. Точно так же, когда первая точка пройдет через точку B, вторая пройдет через точку A и оба числа уменьшатся на единицу.

Разность между обоими числами остается, следовательно, постоянной и так как она первоначально была кратной d, то она таковой и останется.

Таким образом, *два числа, соответствующие двум сопряженным точкам A_i и B_{i+1}, различаются между собой на число, кратное d*, а поскольку число, соответствующее B_i, равно числу, соответствующему A_i, то мы окончательно заключаем, что числа, соответствующие $2n$ точкам

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n;\quad B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n,$$

различаются между собой на числа, кратные d.

Итак, проследуем вдоль периметра R_0 в положительном направлении и рассмотрим две последовательные точки A_iA_k или A_iB_k, или B_iB_k. В соответствии с нашим определением, числа, относящиеся к этим двум точкам, будут равны или будут различаться между собой на одну единицу. Если разности могут быть лишь кратными d, то следует заключить, что все числа, соответствующие точкам A и B, равны между собой и, например, все равны нулю.

Тогда для других точек периметра наше число будет $\pm{}^1/_2$. Если же мы рассмотрим, в частности, две вершины R_0, то разность двух чисел будет 0 или ± 1. В то же время для двух вершин P_2 и Q_2 эта разность равна $N_2 = d$.

Следовательно, мы пришли к противоречию, а это и означает, что предположение, высказанное вначале, было абсурдным *и цикл K должен иметь петли*, что и требовалось доказать.

4. В предыдущем параграфе мы видели, что относительно просто установить, гомологичен ли данный цикл циклу без петель, или же два данных цикла соответственно гомологичны двум непересекающимся циклам. В настоящем параграфе мы исследуем аналогичный вопрос.

Как определить, *эквивалентен* ли данный цикл циклу без петель, или же два данных цикла эквивалентны двум взаимно непересекающимся циклам? [24]

Однако прежде чем приступить к этому вопросу, вернемся к определению эквивалентности.

До сих пор мы всегда понимали эквивалентность следующим образом.

Когда мы записываем

$$C \equiv C',$$

мы понимаем под этим, что начальная и конечная точка замкнутого цикла C является той же самой, что и начальная и конечная точка C', и что между C и C' существует просто связная область, полная граница которой образована C и C'. Другими словами, можно перейти от C к C', изменяя C непрерывным образом и так, что цикл постоянно остается образованным одной-единственной замкнутой кривой, а начальная и конечная точки остаются неизменными. Это то, что можно назвать *собственной эквивалентностью*.

Нам удобно будет писать

$$C \equiv C' \quad \text{(несобств.)},$$

если можно перейти от C к C', изменяя C непрерывным образом так, что цикл остается постоянно образованным одной только замкнутой кривой, *но с изменением начальной и конечной точки*. Это можно будет назвать *несобственной эквивалентностью*. Иными словами, будет иметь место несобственная эквивалентность

$$C \equiv C' \quad \text{(несобств.)},$$

когда будет иметь место собственная эквивалентность

$$C \equiv -\alpha + C' + \alpha,$$

где α — какая-либо дуга, идущая от начальной и конечной точки C' к начальной и конечной точке C.

Итак, мы получаем четыре сорта соотношений: собственные эквивалентности, в которых нельзя менять порядок членов; несобственные эквивалентности, в которых можно менять порядок членов, но при условии сохранения их *циклического порядка*; гомологии без деления, в которых можно менять этот порядок любым способом, а также можно складывать, вычитать и умножать; наконец, гомологии с делением, которые можно, кроме всего, делить на целое число.

Если это не будет специально оговорено, везде, где дело будет касаться эквивалентностей, речь пойдет о собственных эквивалентностях.

В исследовании занимающего нас вопроса можно исходить из нескольких различных точек зрения. Представим сперва нашу поверхность с помощью фуксова многоугольника R_0 первого семейства, построим различные образы этого многоугольника, полученные с помощью преобразований соответствующей фуксовой группы G; эти его образы заполнят фундаментальный круг. Какой-либо цикл C будет представлен тогда дугой кривой MM', идущей от точки M к одному из ее образов M'. Два собственно эквивалентных цикла будут представлены двумя дугами кривой MPM' и MQM', имеющими одни и те же конечные точки. Обратно, две дуги, конечные точки которых те же самые, представляют два эквивалентных цикла. Дуга M_1QM_1' представит несобственно эквивалентный цикл по отношению к циклу, представленному дугой MM', если та подстановка группы G, которая переводит M в M', переводит также и M' в M_1'.

Пусть задана дуга MPM', представляющая цикл C. Рассмотрим различные образы этой дуги, полученные при помощи подстановок группы G; все эти ее образы также представят цикл C. Условие того, чтобы цикл C не имел петель, состоит в требовании, чтобы дуга MPM' не пересекалась ни с одним из своих образов.

Подобно этому, пусть MPM', M_1QM_1' будут две дуги, представляющие два цикла C и C'; условие непересечения двух циклов C и C' состоит в требовании, чтобы дуга MPM' не пересекала ни дугу M_1QM_1', ни ее образы.

Установив это, посмотрим, нет ли между циклами, несобственно эквивалентными C, таких, которые не имели бы петель. Вернемся к дуге MPM' и к подстановке S группы G, которая переводит M в M'. Эта подстановка является гиперболической; действительно, в занимающем нас случае многоугольника R_0 первого семейства, вершины которого образуют единый цикл и сумма углов которого равна 4π, все подстановки G будут гиперболическими.

Подстановка S имеет, следовательно, двойные точки α и β на границе фундаментального круга.

Соединим эти две точки неевклидовой прямой, иначе говоря, в соответствии с терминологией, принятой в теории фуксовых функций, кругом, ортогонально пересекающим границу фундаментального круга. Пусть M_1 будет какая-либо точка этой неевклидовой прямой $\alpha\beta$; полученная из нее с помощью подстановки S точка M_1' будет также находиться на этой прямой $\alpha\beta$. Пусть M_1QM_1' будет дуга неевклидовой прямой, заключенная между M_1 и M_1'. Она представит собой цикл, несобственно эквивалентный циклу MPM'.

Рассмотрим теперь дуги, полученные из M_1QM_1' с помощью различных преобразований G; они также будут дугами неевклидовой прямой. Дуги, полученные с помощью подстановки S и кратных ей, дадут нам пол-

ностью всю прямую $\alpha\beta$; другие преобразования дадут другие неевклидовы прямые, а именно, прямые $\alpha'\beta'$, которые соединят две двойные точки α' и β' различных трансформаций подстановки S с помощью подстановок G, т. е. различных гиперболических подстановок $T^{-1}ST$, где T — некоторое преобразование G.

Цикл $M_1QM'_1$ не будет, следовательно, иметь петель, если эти различные неевклидовы прямые не пересекаются, а для того, чтобы они не пересекались, необходимо и достаточно, чтобы ни для одной из подстановок $T^{-1}ST$ две двойные точки α' и β' не *перекрещивались* на границе фундаментального круга с двумя двойными точками α и β, иными словами, не следовали в циклическом $\alpha\alpha'\beta\beta'$ или в обратном порядке.

Обратно, я предполагаю, что две из наших неевклидовых прямых пересекаются; я утверждаю, что все циклы, несобственно эквивалентные MPM', будут иметь петли. Если они действительно пересекаются, то это означает, что двойные точки α, β и α', β', принадлежащие S и $T^{-1}ST$, перекрещиваются. Рассмотрим какую-либо дугу $M_2M'_2$, несобственно эквивалентную MPM'; тогда M'_2 будет получено из M_2 с помощью S. Рассмотрим сперва образы дуги $M_2M'_2$ с помощью подстановки S и ее кратных; они соединят между собой последовательные образы M_2 с помощью подстановок, кратных S; следовательно, они образуют непрерывную линию, идущую от α к β.

По той же причине отрезки, полученные из дуги $M_2M'_2$ с помощью подстановок S^mT (где m — положительное или отрицательное целое), образуют непрерывную линию, идущую от α' к β'; но так как точки α, β, α', β' перекрещиваются, то обе эти непрерывные линии должны пересекаться. Другими словами, две из дуг, полученных преобразованиями из $M_2M'_2$, пересекаются, а значит, цикл $M_2M'_2$ включает петлю, что и требовалось доказать.

Подобно этому, пусть MPM' и NQN' будут две дуги, представляющие два замкнутых цикла.

Могут ли быть среди циклов, несобственно эквивалентных MPM' и NQN', такие, которые не пересекаются? Пусть S и S_1 будут подстановки, которые переводят M в M' и N в N'. Пусть α и β — двойные точки S; α_1 и β_1 — двойные точки S_1. Проведем две неевклидовы прямые $\alpha\beta$ и $\alpha_1\beta_1$, возьмем на этих двух прямых две произвольные точки M_1 и N_1. Пусть, затем, M'_1 — точка, полученная из M_1 с помощью S, а N_1 — из N_1 с помощью S_1; точка M'_1 будет находиться на прямой $\alpha\beta$, а точка N'_1 — на прямой $\alpha_1\beta_1$.

Рассмотрим дуги неевклидовой прямой $M_1M'_1$ и $N_1N'_1$; они представят два цикла, несобственно эквивалентных MPM' и NQN'.

При помощи рассуждения, полностью подобного тому, которое только что было проведено, можно убедиться, что если двойные точки α и β подстановки S не перекрещиваются с двойными точками α_1 и β_1 подстановки S_1 и с двойными точками различных трансформаций подстановки $T^{-1}S_1T$ S_1, то циклы $M_1M'_1$ и $N_1N'_1$ не пересекаются. Но если, наоборот,

α и β перекрещиваются с α_1 и β_1 или с двойными точками одной из трансформаций $T^{-1}S_1T$ подстановки S, то не только циклы M_1M_1' и N_1N_1' пересекутся, но то же самое будет и с любыми двумя циклами, несобственно эквивалентными MPM' и NQN'.

Можно, наконец, представить этот вопрос и в иной форме. Предположим, что цикл M_1M_1' не имеет петель. Тогда неевклидова прямая $\alpha\beta$ и различные образы, полученные из нее, не пересекаются; эти неевклидовы прямые разделят фундаментальный круг на бесконечное число областей. Если точка принадлежит одной из этих областей и если точка N', полученная из N с помощью S_1, принадлежит другой области, то циклы M_1M_1' и NN' пересекутся, так же как и несобственно эквивалентные циклы; если две точки N и N' принадлежат одной и той же области, то эти циклы не пересекутся.

Посмотрим теперь на это с другой точки зрения. Исследуем цикл C, представляемый дугой MPM' и всеми образами последней. Цикл будет включать петли, если две из этих дуг пересекутся; однако если существует одно пересечение двух таких дуг, то их будет бесконечное число и все они будут выводиться одно из другого с помощью подстановок G и, в частности, одно из них будет внутри R_0.

Следовательно, достаточно будет рассмотреть отрезки дуги MPM' и дуг, полученных из нее подстановками G, которые находятся внутри R_0. Наш цикл будет, таким образом, представлен некоторым числом дуг A_iB_i, которые будут соединять точку периметра R_0 с другой точкой этого периметра.

Если точка опишет на замкнутой поверхности S весь цикл C целиком, то соответствующая точка на R_0 опишет последовательно дуги

$$A_1B_1,\ A_2B_2,\ \ldots,\ A_nB_n.$$

Так как точки A и B принадлежат периметру R_0, а известно, что этот периметр состоит из некоторого числа сторон, сопряженных по две, то ясно, что точки B_1 и A_2, B_2 и A_3, ..., B_{n-1} и A_n, B_n и A должны быть сопряженными.

Если дуги A_iB_i между собой не пересекаются, то цикл не будет иметь петель.

Точно так же, если вместо одного цикла мы будем рассматривать два или несколько и если дуги, представляющие эти различные циклы, между собой не пересекаются, то эти различные циклы тоже не пересекутся между собой.

Предположим, для определенности, что $p=2$. Тогда многоугольник R_0 является восьмиугольником, последовательные стороны которого представят соответственно циклы

$$+C_1,\ +C_2,\ -C_1,\ -C_2,\ +C_3,\ +C_4,\ -C_3,\ -C_4;$$

это указывает, что между четырьмя фундаментальными циклами сущест-

вует эквивалентность

$$C_1 + C_2 - C_1 - C_2 + C_3 + C_4 - C_3 - C_4 \equiv 0, \tag{26}$$

так как многоугольник R_0 является просто связной областью.

Пусть M будет точка, находящаяся внутри R_0, N — точка, расположенная на одной из сторон R_0, а N' — соответствующая точка на сопряженной стороне. Мы немедленно находим, что цикл $MN'+NM$ является несобственно эквивалентным циклу

$+C_2$,	если точка N находится на стороне	$+C_1$;	(27)
$-C_1$	»	$+C_2$;	
$-C_2$	»	$-C_1$;	
$+C_1$	»	$-C_2$;	
$+C_4$	»	$+C_3$;	
$-C_3$	»	$+C_4$;	
$-C_4$	»	$-C_3$;	
$+C_3$	»	$-C_4$.	

Установив это, мы увидим, что дуга A_iB_i эквивалентна дуге A_iMB_i; следовательно, наш цикл

$$C = A_1B_1 + A_2B_2 + \ldots + A_nB_n$$

эквивалентен

$$A_1MB_1 + A_2MB_2 + \ldots + A_nMB_n$$

и, следовательно, несобственно эквивалентен

$$(MB_n + A_1M) + (MB_1 + A_2M) + \ldots + (MB_{n-1} + A_nM).$$

Но одно какое-нибудь из выражений в скобках, например MB_1+A_2M, аналогично циклу $MN'+NM$, о котором шла речь. Следовательно, оно эквивалентно одному из фундаментальных циклов $\pm C_1$, $\pm C_2$, $\pm C_3$, $\pm C_4$ и, чтобы определить, какому именно из этих циклов, достаточно будет выяснить, на какой стороне R_0 находится точка A_i, а затем обратиться к таблице (27).

Таким образом, мы видим, что цикл C несобственно эквивалентен комбинации фундаментальных циклов, и у нас есть средство определить эту комбинацию. Найденная комбинация не единственная из тех, с которыми цикл C будет эквивалентным, так как мы можем преобразовать полученную эквивалентность, используя для этого эквивалентность (26), единственную для фундаментальных циклов.

Наоборот, если задана какая-либо комбинация K фундаментальных циклов, то мы имеем средство образовать эквивалентный цикл, представленный рядом дуг A_1B_1, A_2B_2, . . ., A_nB_n.

Напишем, например, нашу комбинацию в форме

$$K = +C_1 + C_1 + C_2 - C_3 + C_4 + C_4 - C_1 - C_2 - C_2$$

или в подобной форме. Каждый из членов комбинации будет одним из фундаментальных циклов C_i, снабженных коэффициентами $+1$ или -1. Совокупность двух последовательных членов будет называться *последовательностью*, и я назову также последовательностью совокупность первого и последнего членов, так что в нашей комбинации будет столько же последовательностей, сколько членов.

Каждой последовательности будет соответствовать дуга A_iB_i; точка A_i окажется, таким образом, на стороне

$$+C_1,\ +C_2,\ -C_1,\ -C_2,\ +C_3,\ +C_4,\ -C_3,\ -C_4,$$

если первый член последовательности будет соответственно

$$+C_2,\ -C_1,\ -C_2,\ +C_1,\ +C_4,\ -C_3,\ -C_4,\ +C_3,$$

а точка B_i окажется на стороне

$$-C_1,\ -C_2,\ +C_1,\ +C_2,\ -C_3,\ -C_4,\ +C_3,\ +C_4,$$

если второй член последовательности будет соответственно

$$+C_2,\ -C_1,\ -C_2,\ +C_1,\ +C_4,\ -C_3,\ -C_4,\ +C_3.$$

Две дуги A_iB_i и A_kB_k обязательно пересекутся, если точки A_iB_i *перекрещиваются* на периметре R_0 с точками A_kB_k. В этом случае мы будем называть две соответствующие последовательности *несовместимыми*. Если, наоборот, эти четыре точки не перекрещиваются, то мы сможем провести две дуги так, что они не встретятся.

Каким образом можно распознать, являются ли две последовательности несовместимыми? Это не представит никакой трудности, если четыре точки $A_iB_iA_kB_k$ находятся на четырех различных сторонах; последовательный порядок этих четырех точек совпадает с порядком четырех сторон, который известен.

Но если, например, A_i и A_k находятся на одной и той же стороне, то надо рассмотреть две соседние последовательности $A_{i-1}B_{i-1}+A_iB_i$ и $A_{k-1}B_{k-1}+A_kB_k$. Мы хотим, чтобы точки $A_{i-1}B_{i-1}$ и $A_{k-1}B_{k-1}$, с одной стороны, не перекрещивались, и чтобы, с другой стороны, не перекрещивались и точки A_iB_i и A_kB_k. Чтобы указать сторону, на которой находится одна из точек $A_i, \ldots$, мы будем пользоваться той же буквой A_i.

По предположению, точки A_i и A_k должны находиться на одной и той же стороне A_iA_k; отсюда следует, что точки B_{i-1} и B_{k-1} также должны находиться на одной и той же стороне $B_{i-1}B_{k-1}$, сопряженной A_iA_k.

Установив это, проследуем по периметру R_0 так, что бы последовательно встретиться со сторонами A_{i-1}, B_{i-1}, B_{k-1}, A_{k-1}; точки $A_{i-1}B_{i-1}$ и $A_{k-1}B_{k-1}$ не должны перекрещиваться, а поэтому мы встретимся с B_{i-1} прежде, чем с B_{k-1}.

Проследуем теперь по периметру R_0 в *противоположном направлении*; при прохождении сопряженной стороны A_iA_k мы должны встретиться с A_i прежде, чем с A_k, так как A_i сопряжено с B_{i-1} и A_k с B_{k-1}; поскольку точки A_iB_i и A_kB_k не должны перекрещиваться, то мы встретимся со сторонами B_i, A_iA_k и B_k в том порядке, который был указан выше.

Итак, для того чтобы последовательности были совместимыми, необходимо, чтобы при последовательном прохождении сторон A_{i-1}, B_{i-1}, B_{k-1}, A_{k-1} или же при последовательном прохождении сторон B_i, A_iA_k, B_k мы двигались по R_0 в двух противоположных направлениях.

Другие сомнительные случаи можно было бы привести к предыдущим, обращая одну из двух дуг, A_iB_i или A_kB_k.

Учитывая это, цикл, все последовательности которого являются совместимыми, будет эквивалентным циклу без петель; цикл, последовательности которого будут несовместимыми, не будет эквивалентным циклу без петель, если только нельзя уничтожить эти последовательности с помощью эквивалентности (26). Таким же образом можно определить, будут ли два или несколько циклов эквивалентными непересекающимся циклам.

Применение этих правил поясняет нам, например, что из всех комбинаций нечетных циклов C_1 и C_3 единственными, которые будут эквивалентны циклам без петель, окажутся следующие:

$$C_1, \quad C_3, \quad C_1+C_3, \quad C_3+C_1.$$

Но для дальнейшего мне надо будет обратиться еще к одной точке зрения.

Представим нашу поверхность с помощью фуксова многоугольника R_0' третьего семейства, который для $p=2$ будет ограничен внешним образом кругом, а внутренним образом — тремя другими кругами. Построим различные многоугольники, полученные из R_0' с помощью подстановки соответствующей группы G'; на этот раз они полностью заполнят всю плоскость, за исключением бесконечного числа особых точек, расположенных по окружности фундаментального круга.

Цикл будет опять-таки представлен дугой MM', соединяющей точку M с одним из ее образов M'.

Однако две дуги, имеющие одни и те же концы, не всегда будут представлять два эквивалентных цикла; кроме того, нужно, чтобы площадь, заключенная между этими двумя дугами, не включала ни одной особой точки. Помимо этого, сохраняется все, что мы говорили относительно фуксовых многоугольников первого семейства.

Построим различные дуги, полученные из дуги MM' с помощью подстановок G'; затем сохраним те части этих дуг, которые окажутся внутри R_0'; тогда наш цикл будет представлен рядом дуг

$$A_1B_1, \ A_2B_2, \ \ldots, \ A_nB_n,$$

который следует от одной точки периметра R_0' к другой точке этого периметра так, что точки B_{i-1} и A_i, B_n и A_1 будут сопряженными.

Условием того, чтобы цикл не имел петель или чтобы два цикла не пересекались, является требование, чтобы дуги A_iB_i, представляющие этот или эти циклы, не пересекались. Это можно доказать способами, аналогичными тем, которые мы только что изложили.

Однако нам остается разобрать еще один вопрос. Если задан цикл, представленный некоторым числом дуг A_iB_i, то какой комбинации фундаментальных циклов будет он эквивалентным?

Для решения этого вопроса попытаемся вернуться к случаю многоугольника R_0 первого семейства.

Наш многоугольник R_0' ограничен внешним образом кругом $+A$, а внутренним образом — кругом $-A$, сопряженным с $+A$, и кругами $+B$ и $-B$, сопряженными между собой. Я постараюсь изменить R_0' так, чтобы преобразовать его в многоугольник R_0'', гомеоморфный R_0.

Пусть D и D' будут две сопряженные точки на $+A$ и $-A$; пусть E и E' будут две сопряженные точки на $+B$ и $-B$. Соединим DD', DE, DE' дугами, которые будем рассматривать как сечения. Охватим сечение DE и круг $-B$ замкнутой кривой DMD, которая будет отстоять от них весьма близко. Рассмотрим фигуру $DE'M$, заключенную между этой замкнутой кривой и $-B$ и кривой $D''EM'$, полученной из нее с помощью подстановки G', которая переводит $-B$ в $+B$. Отсечем от многоугольника R_0' фигуру $DE'M$ и добавим к нему в возмещение фигуру $D''EM'$. Тогда получим новый многоугольник R_0'', который представит замкнутую поверхность того же вида, что и R_0'; этот многоугольник будет ограничен внешним образом кругом $+A$, а внутренним образом — кругом $-A$ и замкнутыми кривыми DMD и $D''M'D''$. Однако этот многоугольник R_0'', благодаря сечениям DD', DE, DE', $D''E$, будет иметь простую связность; числа 1, 2, . . ., 8, указанные на фигуре, поясняют порядок, в котором будут следовать вершины этого просто связного многоугольника при прохождении периметра. Очевидно, вследствие порядка сопряжения сторон, этот многоугольник будет гомеоморфным R_0 и притом так, что сторонам R_0''

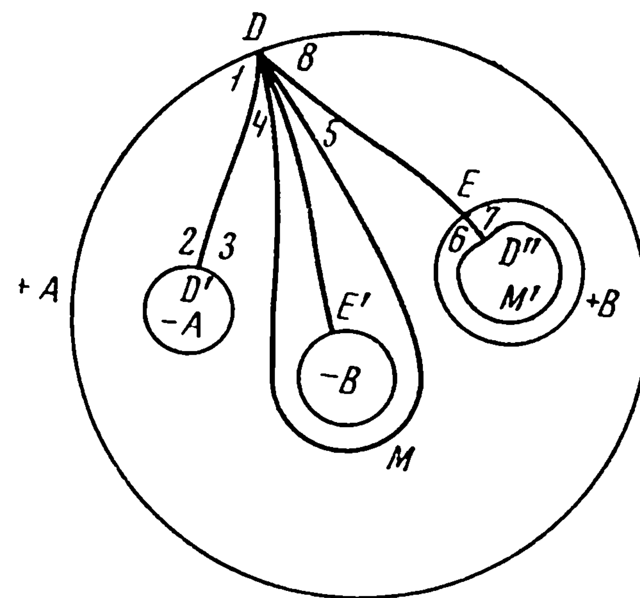


Рис. 2

$$81,\ 12,\ 23,\ 45,\ 56,\ 67,\ 78$$

будут соответствовать стороны R_0

$$+C_1,\ +C_2,\ -C_1,\ -C_2,\ +C_3,\ +C_4,\ -C_3,\ -C_4.$$

Так как мы вернулись опять к случаю R_0, то нетрудно будет высказать правило.

Каждой из дуг A_iB_i, пересекающих R'_0, могут соответствовать несколько аналогичных дуг, пересекающих R''_0, так как можно разделить первоначальную дугу сечениями на несколько отрезков. Каждой из частичных дуг, пересекающих R''_0, в соответствии с правилом, доказанным для случая R_0, будет соответствовать один и только один член в искомой комбинации фундаментальных циклов. Каждой из первоначальных дуг A_iB_i будет, следовательно, соответствовать один или несколько членов этой комбинации.

Первый из этих членов зависит от положения начальной точки A_i; если эта точка находится на кругах

$$+A,\ -A,\ +B,\ -B,$$

то первый член будет, соответственно,

$$+C_2,\ -C_2,\ -C_4,\ +C_4.$$

Следующие члены зависят от сечений DD', DE, DE', последовательно встречаемых дугой A_iB_i; если эта дуга встречает, следуя слева направо,

DD' или DE, или DE',

то соответствующие члены будут

$$+C_1,\ +C_3,\ -C_4-C_3+C_4,$$

а если эти сечения встречаются справа налево, то члены будут

$$-C_1,\ -C_3,\ -C_4+C_3+C_4.$$

Следовательно, в соответствии с этим правилом нетрудно образовать искомую комбинацию.

Во всей этой главе я стою на точке зрения несобственной эквивалентности; если бы возникла необходимость вывести отсюда аналогичные теоремы для собственной эквивалентности, то достаточно было бы обратить внимание на то, что каждая замкнутая поверхность гомеоморфна самой себе таким образом, что некоторой точке A этой поверхности соответствует другая заданная точка A' на той же самой поверхности.

5. Рассмотрим, в частности, многообразие V трех измерений, определенное так, как в § 2; его *скелет* сведется к простому отрезку прямой, вдоль которой эта переменная, обозначаемая нами t, будет изменяться от 0 до 1. Система $W(t)$ будет состоять из единственного многообразия; последнее будет представлять собой обычную замкнутую поверхность, по предположению двустороннюю, которая при $t=0$ сведется к точке и порядок связности которой будет непрерывно возрастать при возрастании t от 0 до 1 и при $t=1$ будет равен $2p+1$.

Из этого определения следует, что *многообразие V не является замкнутым*.

В соответствии с тем, что мы видели в § 2, прямая, образующая скелет V, будет подразделена на отрезки некоторыми особенными значениями t.

Пусть

$$t_1, \ t_2, \ldots, \ t_p$$

будут эти особенные значения; для каждого из них поверхность $W(t)$ имеет особую точку, и в соответствии с нашими предположениями порядок связности этой поверхности для них возрастет на две единицы.

Таким образом, W будет иметь однократную связность при t, заключенном между 0 и t_1; трехкратную связность при t, заключенном между t_1 и t_2, . . .; $(2q+1)$-кратную связность между t_q и t_{q+1}, . . .; наконец, $(2p+1)$-кратную связность между t_p и 1.

Поверхность W остается гомеоморфной самой себе, пока переменная t остается на том же самом отрезке.

Предположим, что мы заставим t уменьшаться и что t проходит через одно из особенных значений; тогда, как мы это видели в § 2, произойдет то, что один из циклов C поверхности S сведется к точке; все циклы, эквивалентные C, станут эквивалентными нулю и, с другой стороны, все циклы, пересекающиеся с C, перестанут существовать.

Таким образом, число действительно различных циклов и, следовательно, порядок связности оказываются уменьшенными на две единицы.

Определим теперь некоторый цикл K_q. При $t=t_q+\varepsilon$ на $W(t_q+\varepsilon)$ существует бесконечно малый цикл, который при при $t=t_q$ сводится к точке.

Этот цикл я и обозначу K_q. Поверхность $W(t)$ остается гомеоморфной самой себе при изменении t от t_q до t_{q+1} [можно предположить, что гомеоморфизм является таким, что для двух бесконечно близких значений t и t' две соответствующие точки на $W(t)$ и $W(t')$ будут бесконечно мало отличаться одна от другой]. Поверхность $W(t)$ остается, следовательно, гомеоморфной $W(t_q+\varepsilon)$, и циклу K_q будет на $W(t)$ соответствовать цикл, который я опять обозначу K_q. Для определения K_q на поверхности $W(t_{q+1}+\varepsilon)$ достаточно будет сказать, что этот цикл должен очень мало отличаться от того же цикла на поверхности $W(t_{q+1}-\varepsilon)$. Так как $W(t)$ остается гомеоморфным самому себе для всех значений t, заключающихся между t_{q+1} и t_{q+2}, то для этих значений t можно определить цикл K_q, как выше, и так далее.

После такого определения цикла K_q мы приходим к существенному свойству, а именно, что два цикла K_α и K_β не пересекаются. Пусть $\beta > \alpha$ и пусть сперва $t=t_\beta+\varepsilon$; тогда K_β будет очень малым и можно утверждать, что K_α не пересекает K_β. Действительно, в соответствии с определением, цикл K_α существует еще при $t < t_\beta$, но, как я отмечал, циклы, пересекающие очень малый цикл K_β, исчезают, когда t становится $< t_\beta$. Будем изменять t от t_β до $t_{\beta+1}$. В этих пределах все поверхности $W(t)$ гомеоморфны

между собой и так как на одной из них циклы K_α и K_β не пересекаются, то соответствующие циклы K_α и K_β не пересекутся ни на одной из них. Поскольку K_α и K_β не пересекаются на $W(t_{\beta+1}-\varepsilon)$, то можно заключить, что на бесконечно близкой поверхности $W(t_{\beta+1}+\varepsilon)$ два цикла K_α и K_β также не пересекутся; при $t_{\beta+1} < t < t_{\beta+2}$ все поверхности $W(t)$ гомеоморфны и так как на одной из них циклы K_α и K_β не пересекаются, то они не пересекутся ни на одной из них. И так далее.

Итак, циклы K_α и K_β не пересекаются, что и требовалось доказать.

Следует добавить, что цикл K_q не имеет петель; он не имеет их при $t=t_q+\varepsilon$, так как он сводится к замкнутой очень малой кривой. Следовательно, благодаря гомеоморфизму он не будет иметь их и при $t_q < t < t_{q+1}$; не будет их и при $t=t_{q+1}+\varepsilon$, так как в этом случае он весьма мало отличается от своего положения при $t=t_{q+1}-\varepsilon$, и так далее.

Будем изменять t от t_q до 1; цикл K_q будет при этом изменяться непрерывным образом. При $t=t_q$ он сводится к точке, а при $t > t_q$ — к единой замкнутой кривой. Он породит, следовательно, просто связную область, которую я обозначу через A_q.

Две области A_α и A_β не имеют ни одной общей точки. Действительно, если бы такая имела место, то она принадлежала бы поверхности $W(t)$, а на этой поверхности — двум циклам K_α и K_β; мы видели, однако, что эти два цикла не пересекаются.

Обозначим еще через B_q частичную область, образованную K_q, когда t изменяется от t_q до t $(t < 1)$, которая, подобно A_q, имеет простую связность. Мы будем рассматривать K_q, A_q и B_q как *сечения*; учитывая это, рассмотрим два цикла, K'_q и K''_q, бесконечно мало отличающиеся от K_q. Мы можем предположить, что эти два цикла не пересекаются. Очень маленькая часть поверхности $W(t)$, заключенная между этими двумя циклами, будет обозначена $S_q(t)$. Два цикла K'_q и K''_q порождают две области A'_q и A''_q при изменении t от t_q до 1 и две области B'_q и B''_q при изменении t от t_q до t.

Установив это, удалим с замкнутой поверхности весьма малые области

$$S_1(t),\ S_2(t),\ \ldots,\ S_p(t).$$

После этой операции оставшаяся поверхность $W-\sum S_q$ более не будет замкнутой поверхностью и ее границами будут $2p$ замкнутых кривых K'_q и K''_q.

Добавим затем к этой поверхности области B'_q и B''_q; результатом этого сложения получится поверхность

$$W_1(t)=W-\sum S_q+\sum B'_q+\sum B''_q,$$

которая будет замкнутой, так как K'_q служит полной границей B'_q, а K''_q — границей B''_q.

Я утверждаю, что полученная таким образом поверхность $W_1(t)$ имеет *простую связность* и не имеет особенностей. Она не имеет особенностей, так как различные ее части не пересекаются и не имеют иных общих точек, кроме тех точек кривых K'_q и K''_q, которые служат им границей. И действительно, $W(t)$ не может иметь ни одной общей точки с B'_q или с B''_q вне K'_q и K''_q, и так как площади B_α и B_β не пересекаются, то площади B'_q, B''_q, B'_α, B''_α, ... тем более не будут иметь общих точек.

С другой стороны, незамкнутая поверхность $W - \sum S_q$ гомеоморфна плоской области, ограниченной извне замкнутой кривой, а изнутри другими $2p - 1$ замкнутыми кривыми (это есть не что иное, как представление поверхности W с помощью фуксова многоугольника третьего семейства, о котором речь шла ранее в § 3), или, что то же, сферической области, заключающей в себе то, что останется от сферы после удаления из нее $2p$ маленьких просто связных областей α, которые являются внешними по отношению друг к другу.

Но $2p$ областей B' и B'' могут рассматриваться как гомеоморфные $2p$ областей α; обратив внимание на способ установления соответствия, увидим, таким образом, что полная поверхность

$$W_1 = W - \sum S + \sum B' + \sum B''$$

гомеоморфна полной сфере, т. е. имеет простую связность.

Это и требовалось доказать.

Будем теперь изменять t от 0 до 1 и предположим, что циклы K'_q и K''_q приближаются к K_q, так что при $t = 1$ они совпадут с K_q.

Я полагаю, что последовательные положения K'_q и K''_q не имеют никаких общих точек, как, следовательно, и последовательные положения областей A'_q и A''_q, B'_q или B''_q. При этих условиях каждая точка внутри V (за исключением точек областей A_q) будет принадлежать одной из поверхностей W_1 и только одной. Точки предельной поверхности $W(1)$ будут принадлежать $W_1(1)$. При $t = 1$ области B'_q и B''_q сведутся к A'_q и A''_q, а эти последние сведутся к областям A_q, так как при $t = 1$ циклы K'_q и K''_q сводятся к K_q.

Если мы обратим теперь внимание на какую-либо точку из A_q, то эта точка будет находиться и на $W_1(1)$, однако этой точке из A_q будут соответствовать две точки на $W_1(1)$, причем одну из этих точек следует рассматривать как принадлежащую $B'_q = A'_q$, а другую — как принадлежащую $B''_q = A''_q$.

Просто связные поверхности $W_1(t)$, взаимно охватывая друг друга, породят (ср. § 1) просто связное многообразие.

Итак, можно сказать, что проводя в V p сечений A_q, возвращают этому многообразию простую связность. Выполним эти p сечений и деформируем наше многообразие так, чтобы раздвинулись обе стороны каждого сечения; новое многообразие U, полученное таким образом, будет просто связным и будет ограничено просто связной поверхностью H, гомеоморфной сфере. На этой просто связной поверхности мы будем различать $2p$ просто связных областей, которые будут двумя сторонами этих p сечений и которые я назову *рубцами*; эти рубцы будут сопряжены между собой по два.

Каждой точке U будет соответствовать точка V и только одна; подобно этому, каждой точке V будет соответствовать точка U и только одна. Исключением являются точки областей A_q, каждой из которых будут соответствовать две точки U, расположенные на двух сопряженных рубцах.

Рассмотрим два многообразия, аналогичных U; каждое из них будет просто связным, каждое из них будет ограничено просто связной поверхностью, несущей на себе $2p$ просто связных рубцов, сопряженных по два и внешних друг относительно друга. Ясно, что образованные таким образом две фигуры будут гомеоморфны между собой и гомеоморфны с фигурой, образованной сферой, поверхность которой несет на себе $2p$ рубцов, образованных малыми кругами, внешними по отношению друг к другу.

Отсюда вытекает следующий важный вывод: все многообразия, образованные подобно V, для которых целое число, обозначенное выше p, является тем же самым, гомеоморфны между собой.

Предположим, что в обычном пространстве построена замкнутая, $(2p+1)$-связная поверхность без особенностей. Эта поверхность разделит пространство на две области, внутреннюю и внешнюю. Пусть R будет внутренняя область. Это будет незамкнутое многообразие трех измерений, образованное подобно V. Следовательно, V будет гомеоморфно R, если только число p будет тем же самым [25].

Итак, если назвать *развертываемыми* незамкнутые многообразия, гомеоморфные части плоского пространства, *то все многообразия, образованные подобно V, являются развертываемыми.*

Отсюда можно вывести, между прочим, одно заключение. Рассмотрим в обычном пространстве две замкнутые поверхности S и S', причем и та и другая $(2p+1)$-связны.

Пусть R будет объем внутри S и R' — объем внутри S'. Известно, что две поверхности S и S' гомеоморфны, но можно было бы спросить себя, будет ли то же самое с двумя объемами R и R'. С первого взгляда хочется ответить на этот вопрос отрицательно. Можно было бы представить себе различные полотнища поверхности S', перепутанные между собой сложным образом и образующие узлы, распутать которые было бы невозможно, не выходя из пространства трех измерений. Не вдаваясь в это, мы в состоянии теперь заключить, что два объема R и R' всегда будут гомео-

морфными, так как эти два объема могут быть образованы подобно V, а два многообразия, образованные подобно V, всегда являются гомеоморфными.

Я подхожу теперь к одному вопросу, важному для последующего. Представим себе опять многообразие V, ограниченное поверхностью W (1) и образованное поверхностью W (t).

Можно ли то же самое многообразие образовать с помощью другой поверхности W (t), которая, как и W (t), при $t=0$ сводилась бы к точке, имела бы постоянно возрастающий порядок связности и, в конце концов, при $t=1$ свелась бы к W (1)? Очевидно, что V может быть порождено подобным образом бесконечным количеством способов. Следует лишь сравнить эти различные способы образования.

Обозначим через $K'_1, \ldots, K'_p$ p циклов, которые играют в новом образовании ту же самую роль, что и циклы $K_1, \ldots, K_p$ в старом.

Какое соотношение имеет место между циклами K и K'? Можно ли произвольно выбрать циклы K' и какие требования должны быть наложены на p циклов поверхности W (t), чтобы их можно было выбрать в качестве циклов K'?

1) Эти циклы не должны иметь петель; 2) они не должны пересекаться.

Но это еще не все. Цикл K_q *относительно многообразия* V эквивалентен нулю, так как он образует полную границу площадки A_q, лежащей в V. Следовательно, мы будем иметь эквивалентности

$$K_1 \equiv K_2 \equiv \ldots \equiv K_q \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, V) \tag{1}$$

и все те, которые из них выводятся. Я утверждаю, что иных не будет.

Я хочу сказать этим, что если у нас есть относительно V эквивалентность

$$C \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, V), \tag{2}$$

где C — цикл граничной поверхности W (1), которую я назову для сокращения W, то мы получим *относительно этой граничной поверхности* W эквивалентность формы

$$C \equiv -\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_2 - \ldots - \alpha_n + \beta_n + \alpha_n \qquad (\mathrm{mod}\, W), \tag{3}$$

где α_i являются любыми циклами W, а β_i — такими циклами этой поверхности, что

$$\beta_i \equiv mK \qquad (\mathrm{mod}\, W),$$

где m — положительное или отрицательное целое число, а K — один из циклов $K_1, K_2, \ldots, K_q$; действительно, если эквивалентность (3) имеет место, то *вследствие этого*

$$C \equiv \sum (-\alpha + \beta + \alpha) \qquad (\mathrm{mod}\, V),$$

где, благодаря эквивалентностям (1), которые влекут за собой $\beta \equiv 0$,

$$C \equiv \sum (-\alpha + \alpha) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, V).$$

Итак, эквивалентность (2) является следствием эквивалентностей (1). Чтобы установить высказанное предложение я предположу, что имеет место эквивалентность (2); это означает, что цикл C является полной границей некоторой просто связной площадки D, расположенной в V.

Эта площадка может разрезать область A_q по линии L_q, которая пройдет от одной точки C к другой точке C, так как концы L_q могут находиться только на границе A_q, т. е. на W, или, так как они находятся на D, на пересечении W и D, т. е. на C. Площадка D также может не пересекать A_q или пересечь ее по нескольким различным линиям L_q. Во всех случаях различные линии L не пересекутся, так как не пересекутся разные области A и так как всегда можно предположить, что области A и D не имеют особенностей и что можно немного деформировать при необходимости D так, чтобы поверхности D и A не касались друг друга.

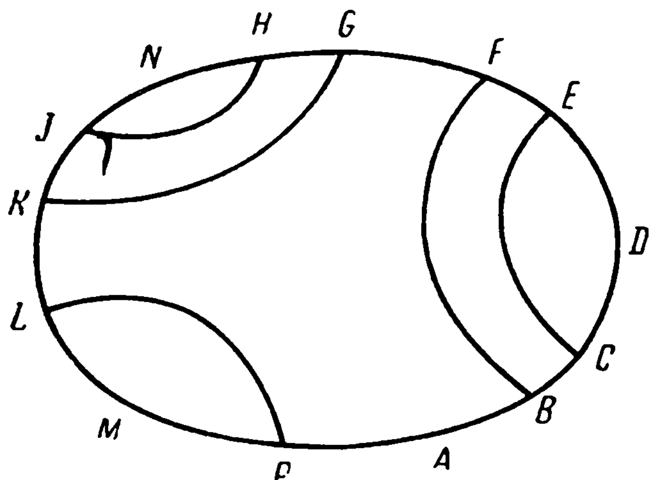


Рис. 3

Каждая из линий L делит площадку на две части, так как она просто связная. D будет, следовательно, разделено различными линиями L на некоторое число частичных площадок $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ Можно последовательно пройти контуры разных частичных площадок Δ следующим образом, который будет понятнее, если показать его на примере, а не вдаваться в объяснения.

На рис. 3. цикл $ABCDEFGHNJKLMPA$ есть цикл C; линии CE, BF, GK, HJ, LP — линии L.

Ясно, что полный цикл можно заменить суммой следующих дуг:

$$\Sigma = \begin{cases} (ABCDE + ECBA) + (ABCE + EF + FBA) + \\ + (ABF + FGH + HNJ + JHGFBA) + \\ + (ABFGHJ + JK + KGFBA) + \\ + (ABFGK + KL + LPA) + (APL + LMP + PA). \end{cases} \tag{4}$$

Можно видеть, действительно, что последний член каждого выражения в скобках уничтожается первым членом каждого следующего выражения, и что, исключая уничтоженные таким образом члены, мы восстановим полный цикл C.

Возьмем теперь одно из выражений в скобках, например третье. Его можно записать

$$ABFGH + HNJH + HGFBA.$$

Как видно, первый и последний члены представляют одну и ту же дугу $ABFGH$, пробегаемую один раз в одном направлении, а второй раз — в обратном, а второй член представляет контур одной из частичных площадок Δ, а именно HJN; то же самое относится и к другим скобкам выражения Σ, которое можно записать

$$\begin{aligned}&(ABC + CDEC - CBA) + (AB + BCEFB + BA) + \\ &+ (ABFGH + \; + HNJH + HGFBA) + \\ &+ (ABFG + GHJKG + GFBA) + (ABFGKLPA) + \\ &+ (AP + PLMP + PA).\end{aligned} \tag{5}$$

Я изменю еще путь Σ. Этот путь состоит из дуг, являющихся частями первоначального контура C, и из дуг, образованных линиями L_q. Эти последние дуги, как уже мы увидели, уничтожаются, так как в выражении (4) последний член каждой скобки уничтожается первым членом следующей. Мы можем преобразовать эти последние дуги; заменим линию L_q дугой, принадлежащей циклу K_q и имеющей те же самые конечные точки. Это возможно, так как две конечные точки линии L_q находятся на цикле K_q; это допустимо, впрочем, так как новые дуги, помещенные на место старых, уничтожатся так же, как уничтожались старые. И если я обозначу через Σ' то, что получится из пути Σ после этого преобразования, то первоначальный цикл C можно также рассматривать как идентичный пути Σ', так и пути Σ.

Этот путь Σ' может быть принят в качестве Σ в форме (5); будет достаточно просто принять, что во втором члене (5) CE, например, представляет уже не линию L_q, имеющую своими концами C и E, а дугу цикла K_q, идущую от C к E.

Преимущество этого преобразования в том, что все точки пути Σ' находятся на предельной поверхности W, чего нельзя сказать относительно точек пути Σ.

Возвратимся к просто связному многообразию V, определенному выше.

Это многообразие имеет в качестве границы просто связную поверхность, которую мы назвали H и которая включает $2p$ рубцов. Части H, внешние относительно рубцов, соответствуют поверхности W, а рубцы, как мы это видели, областям A_q.

Какой-либо замкнутый контур Q, проведенный на этой поверхности K и остающийся вне рубцов, будет равен нулю по отношению к многообразию V *на основании эквивалентностей* (1). Действительно, этот контур окружит некоторое число рубцов; предположим, для определенности, что он окружит два рубца, A_1 и A_2. Пусть M будет начальной и конечной точкой замкнутого контура Q; пусть, подобно этому, M_1 и M_2 будут начальными и конечными точками двух замкнутых контуров, K_1 и K_2, которые служат, соответственно, периметрами двух рубцов, A_1 и A_2.

Соединим M с M_1 и с M_2 двумя дугами MM_1 и MM_2; будем иметь

$$Q = MM_1 + K_1 + M_1M + MM_2 + K_2 + M_2M \quad (\text{mod } W),$$

так как часть поверхности H, заключенная между контурами Q, K_1 и K_2 принадлежит той части H, которая соответствует W.

Но вследствие эквивалентностей (1)

$$K_1 \equiv K_2 \equiv 0 \quad (\text{mod } V);$$

итак,

$$Q = MM_1 + M_1M + MM_2 + M_2M \equiv 0 \ (\text{mod } V)$$

и это имеет место, как я уже указал, *вследствие эквивалентностей* (1).

Но если мы будем рассматривать вторые члены в каждой из скобок выражения (5) пути Σ', то каждый второй член представит на W замкнутый контур; он представит также замкнутый контур на H. Это не очевидно и это не было бы верно для замкнутого контура на W, который пересекал бы один из циклов K_q; каждой точке K_q соответствуют на U две различные точки таким образом, что когда непрерывный путь на W пересекает K_q, соответствующий путь на U перескакивает сразу с одной из этих двух точек на другую и становится прерывным. Но здесь это обстоятельство не может иметь места, так как замкнутый контур, который мы рассматриваем, никогда не *переходит* через K_q, а может идти *только* вдоль K_q.

Второй член внутри каждой из скобок, на *основании эквивалентностей* (1), равен, следовательно, нулю. То же самое будет и со всей скобкой, так как первый и последний члены уничтожаются. Значит, то же самое будет и со всем путем Σ' и, следовательно, с C.

Итак, между циклами W нет иной эквивалентности, кроме тех, которые являются следствиями эквивалентностей (1).

Это и следовало доказать.

Итак, мы можем добавить третье условие к тем, которые, как мы уже видели, необходимы для того, чтобы p циклов W могли быть выбраны в качестве циклов K'.

Система эквивалентностей

$$K'_1 \equiv K'_2 \equiv \ldots \equiv K'_p \equiv 0$$

не должна отличаться от системы эквивалентностей

$$K_1 \equiv K_2 \equiv \ldots \equiv K_p \equiv 0,$$

и, таким образом, каждая из этих систем должна быть следствием другой.

Достаточны ли эти три условия?

Пусть K'_1, K'_2, ..., K'_p — p циклов без петель, которые взаимно не пересекаются и для которых имеет место

$$K'_1 \equiv K'_2 \equiv \ldots \equiv K'_p \equiv 0 \quad (\text{mod } V).$$

Эквивалентность $K'_q \equiv 0$ показывает нам, что существует просто связная площадка A'_q, полной границей которой служит K'_q [26]. Я утверждаю, что всегда можно предположить, что различные площадки A'_q не имеют ни одной общей точки.

Предположим, действительно, что $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{q-1}$ не пересекаются, но что одна или несколько из этих $q-1$ площадок будут пересечены A'_q. Пусть E_i будет пересечением площадок A'_q и A'_i; это пересечение не будет иметь ни одной точки на K'_q, так как K'_q может встретить A'_i лишь на W и, следовательно, на K'_i, однако K'_i не пересекает K'_i по предположению. Значит, это пересечение целиком находится внутри A'_q; можно предположить, что поверхность A'_i не имеет особенностей и не касательна к поверхности A'_q, иначе было бы достаточно слегка деформировать ее. Отсюда следует, что наше пересечение является кривой без двойной точки; значит, она должна состоять из нескольких замкнутых взаимно не пересекающихся кривых

Кроме того, пересечение A'_i с A'_q не имеет общих точек с пересечением A'_k с A'_q (если i и $k < q$), так как A'_i не пересекает A'_k по предположению.

Различные пересечения E_i и E_k будут, следовательно, состоять из некоторого числа замкнутых кривых, не имеющих ни одной общей точки. Если мы рассмотрим две из этих кривых, то они будут или внешними одна относительно другой, или же одна из них будет внутри другой; эти слова, внешний и внутренний, следует понимать по отношению к просто связной площадке A'_q. Среди наших замкнутых кривых мы сохраним лишь те, которые не находятся внутри никакой другой; следовательно, все они будут внешними друг относительно друга. Пусть h_i будет одна из сохраненных замкнутых кривых, принадлежащая E_i. Эта кривая h_i ограничит часть просто связной площадки A'_q, которую я обозначу через G_i и которая сама будет иметь простую связность. Точно так же сама она ограничит часть просто связной площадки A'_i, которую я обозначу через M_i и которая сама будет просто связной.

Мы можем провести на A'_q замкнутую кривую h'_i, по отношению к которой h_i будет внутренней и которая будет очень мало от нее отличаться. Тогда h'_i ограничит часть площадки A'_q, которую я обозначу через G'_i и которая будет просто связной; подобно этому h'_i ограничит просто связную площадку M_i, которая будет бесконечно мало отличаться от M_i и не пересечет A'_i.

Образуем теперь площадку A''_q, исключив из A'_q все G'_i и добавив все M'_i,

$$A''_q = A'_q + \sum M'_i - \sum G'_i.$$

Очевидно, A''_q будет, как и A'_q, просто связной, ограниченной K'_q, так как G'_i заменяется другой просто связной площадкой, также ограниченной h'_i. Но A''_q не пересечет ни A'_1, ни A'_2, ..., ни A'_{q-1}.

Итак, мы можем предположить, что q первых площадок A'_i не пересекаются и, таким образом, увидим, что можно предположить, что две любые из p площадок A'_i не пересекутся. Так мы и поступим.

Аналогичное рассуждение покажет, что так как циклы K' не имеют петель, то всегда можно предположить, что A'_1 являются поверхностями без двойных кривых.

Я предполагаю теперь установить, что циклы K', удовлетворяющие трем указанным условиям, могут играть роль циклов K, т. е.: 1) что V может быть образовано поверхностью $W'(t)$, сводящейся к точке при $t=0$ и к W при $t=1$, которая при $t_q < t < t_{q+1}$ имеет $(2q+1)$-кратную связность; 2) что при $t_q < t < t_{q+1}$ $W(t)$ пересекает площадки A'_1, A'_2, ..., A'_q по одной замкнутой кривой, но не пересекает площадок A'_{q+1}, A'_{q+2}, ..., A'_p.

Я предполагаю, что это уже доказано для развертываемого многообразия V_1, т. е. гомеоморфного части обычного плоского пространства, ограниченного поверхностью с $(2p-1)$-кратной связностью, и я намерен доказать это для развертываемого многообразия V, ограниченного поверхностью W со связностью $2p+1$.

Произведем в V сечение A'_p и слегка деформируем это многообразие, раздвинув перед этим две стороны сечения. Мы получим при этом новое развертываемое многообразие V_1, ограниченное $(2p-1)$-связной поверхностью W_1. Последняя будет состоять из двух частей, из которых одна соответствует поверхности W, в которой было произведено сечение K'_p, а другая образуется двумя рубцами, соответствующими двум сторонам сечения.

Мы можем характеризовать это развертываемое многообразие V_1 и эту поверхность W_1 следующим образом. Рассмотрим некоторую точку внутри V и пусть δ будет кратчайшим расстоянием от этой точки до предельной поверхности W или до сечения A'_p. Точки, для которых $\delta > \varepsilon$ (ε — малое), образуют область V_1; точки, для которых $\delta=\varepsilon$, образуют поверхность W_1; точки, для которых $\delta < \varepsilon$, образуют область $V-V_1$. Легко видеть, что поверхность W_1 имеет $(2p-1)$-кратную связность и что она гомеоморфна границе области, полученной при выполнении в V сечения A'_p.

Поверхность W_p не пересечет площадку A'_p, но пересечет каждую из других A'_q по циклу K''_q, слегка отличному от K'_q. Эти циклы K''_q не будут иметь петель; они взаимно не пересекаются. Кроме того, цикл K''_q отсечет от просто связной площадки A'_q область A''_q с простой связностью и образует ее полную границу. Эта область A''_q является общей частью A'_q и V_1; это показывает, что $K''_q \equiv 0$ по отношению к V_1. Это

показывает, что циклы K'' по отношению к V_1 удовлетворяют условиям теоремы; но теорема для V_1, по условию, верна.

Значит, V_1 может быть порождено поверхностью $W'(t)$, которая при $t=0$ сводится к точке, при $t=u$ (где $t_{p-1}<u<t_p$) сводится к W_1, которая при $t_q<t<t_{q+1}$ пересекает $A''_1, A''_2, \ldots, A''_q$ и, следовательно, $A'_1, A'_2, \ldots, A'_q$ по единственной замкнутой кривой и не пересекает ни $A''_{q+1}, A''_{q+2}, \ldots, A''_{p-1}$, ни, следовательно, $A'_{q+1}, A'_{q+2}, \ldots, A'_{p-1}$, ни, к тому же, A'_p, так как эта площадка не имеет ни одной общей точки с V_1, а A'_i не имеют с V_1 иных общих точек, кроме точек A''_i.

Рассмотрим теперь область $V-V_1$, ограниченную извне поверхностью W, имеющей $(2p+1)$-кратную связность, а изнутри — поверхностью W_1, имеющей $(2p-1)$-кратную связность, и не пересекающую площадку A'_p, которая целиком находится внутри $V-V_1$. Очевидно, мы можем взять на A'_p точку M и построить поверхность W_2, целиком находящуюся внутри $V-V_1$, включающую точку M в качестве конической точки и не имеющую с A'_p, кроме этой, более никакой общей точки. Затем мы можем образовать область $V-V_1$ с помощью поверхности $W'(t)$, которая при $t=u$ сводится к W_1; которая при $u<t<t_p$ является $(2p-1)$-связной, не пересекает A'_p, но пересекает другие A'_q по одной-единственной замкнутой кривой; которая при $t=t_p$ сводится к W_2; которая при $t_p<t<1$ является $(2p+1)$-связной и пересекает все A'_q, включая и A'_p, по одной-единственной замкнутой кривой; которая, наконец, при $t=1$ сводится к W_1.

Мы видим, что многообразие V может быть образовано поверхностью $W'(t)$, удовлетворяющей условию теоремы. Следовательно, теорема доказана и три высказанные условия являются не только необходимыми, но и достаточными.

Более того, для доказательства последней теоремы я основывался только на том, что эквивалентности $K'\equiv 0$ являются следствием эквивалентностей $K\equiv 0$, и не воспользовался противоположным условием, что эквивалентности $K\equiv 0$ являются следствием эквивалентностей $K'\equiv 0$. Значит, если циклы K' не имеют петель и взаимно не пересекаются и если эквивалентности $K\equiv 0$ влекут за собой эквивалентности $K'\equiv 0$, то и, обратно, эквивалентности $K'\equiv 0$ повлекут за собой эквивалентности $K\equiv 0$. Все это можно было бы проверить непосредственно.

6. Рассмотрим теперь многообразие V трех измерений, скелет которого сводится к отрезку прямой, вдоль которого переменная t меняется от 0 до 1. Система $W(t)$ будет состоять из одного многообразия; это многообразие будет замкнутой двусторонней поверхностью, которая сведется к точке при $t=0$ и при $t=1$, и порядок связности которой будет возрастать между $t=0$ и $t=1/2$ и падать между $t=1/2$ и $t=1$. *Следовательно, наше многообразие V является замкнутым.*

Мы имеем $2p$ особенных значений t, удовлетворяющих неравенствам

$$0<t_1<t_2<\ldots<t_p<\frac{1}{2}<t'_p<\ldots<t'_2<t'_1<1$$

таким образом, что, когда t будет переходить от значения $t_q-\varepsilon$ к значению $t_q+\varepsilon$, поверхность $W(t)$ будет переходить от связности $2q-1$ к связности $2q+1$, а когда t будет переходить от значения $t'_q-\varepsilon$ к значению $t'_p+\varepsilon$, поверхность $W(t)$ перейдет от связности $2q+1$ к связности $2q-1$.

Многообразие V можно разложить на два других, V' и V'', которые соответствуют: первое — значениям t, заключенным между 0 и $^1/_2$, второе — значениям t, заключенным между $^1/_2$ и 1. Каждое из этих составляющих V многообразий отвечает условиям предыдущего параграфа; следовательно, каждое из них может быть развернуто и нам следует теперь приступить к изучению многообразия V, образованного их соединением.

Эти два многообразия V' и V'' имеют в качестве общей границы поверхность $W(^1/_2)$, которую я обозначу W и которая имеет $(2p+1)$-кратную связность.

На этой поверхности я могу, с одной стороны, провести p циклов

$$K'_1,\quad K'_2,\quad \ldots,\quad K'_p,$$

определяемых относительно многообразия V', как это было сделано в предыдущем параграфе с циклами K_1, K_2, . . ., K_p по отношению к многообразию V предыдущего параграфа.

Эти p циклов не имеют петель и не пересекаются. Кроме того, имеют место эквивалентности

$$K'_1\equiv K'_2\equiv\ldots\equiv K'_p\equiv 0\qquad (\mathrm{mod}\, V'). \tag{1}$$

С другой стороны, на той же самой поверхности W я могу провести p циклов

$$K''_1,\quad K''_2,\quad \ldots,\quad K''_p,$$

определенных по отношению к V'' так, как это было сделано в предыдущем параграфе с циклами K_q по отношению к многообразию V предыдущего параграфа.

Эти p циклов K'' не имеют петель и не пересекаются; имеют место эквивалентности

$$K''_1\equiv K''_2\equiv\ldots\equiv K''_p\qquad (\mathrm{mod}\, V''). \tag{2}$$

Циклы K' будут тогда *основными* циклами для V', а циклы K'' — для V''.

Рассмотрим теперь какой-либо цикл C, находящийся внутри V; если M — какая-либо точка этого цикла, то мы сможем найти соответствующую точку N скелета. Когда точка M будет описывать полный цикл, точка N

останется на прямой 01, которая составляет скелет, и выполнит на этой прямой ряд колебательных движений, в результате которых вернется в исходную точку.

Пусть A и B будут два крайних положения точки N в этом колебании. Предположим, что точка A заключена между t_q и t_{q+1} и что точка N, отправляясь от значения $t_{q+1}-\varepsilon$, спускается до A, чтобы вернуться к значению $t_{q+1}-\varepsilon$. Пусть H будет соответствующая дуга цикла C; пусть M будет точкой этой дуги H, принадлежащей поверхности $W(t)$, причем t заключено между A и $t_{q+1}-\varepsilon$. Мы знаем, что поверхность $W(t)$ остается гомеоморфной самой себе при изменении t от $t_{q+1}-\varepsilon$ до $t_q+\varepsilon$, и, следовательно, при изменении t от $t_{q+1}-\varepsilon$ до A, так как A больше t_q. Значит, $W(t)$ гомеоморфно $W(t_{q+1}-\varepsilon)$. Пусть тогда M' — точка $W(t_{q+1}-\varepsilon)$, соответствующая M. Когда точка M будет описывать дугу H, точка M' опишет дугу H', целиком расположенную на $W(t_{q+1}-\varepsilon)$. Я утверждаю, что имеет место эквивалентность

$$H \equiv H' \pmod{V}.$$

Действительно, рассмотрим различные поверхности $W(t)$, где t имеет промежуточное значение между тем, которое соответствует точке M, и значением $t_{q+1}-\varepsilon$, соответствующим M'. На каждой из этих различных поверхностей, которые все гомеоморфны между собой, рассмотрим точку, соответствующую M. Эта точка породит линию L, концами которой будут M и M'; когда точка M опишет дугу H, эта линия L породит просто связную площадку, полная граница которой будет образована двумя дугами H и H', что и доказывает высказанную эквивалентность.

Рассмотрим теперь две поверхности $W(t_{q+1}-\varepsilon)$ и $W(t_{q+1}+\varepsilon)$; на первой поверхности мы имеем дугу H', два конца которой D и E принадлежат дуге H и, следовательно, циклу C; на второй мы имеем две точки D' и E', бесконечно близкие к D и E; эти точки также принадлежат C; таким образом, DD' и EE' будут две бесконечно малые дуги этого цикла C. Мы можем провести на поверхности $W(t_{q+1}+\varepsilon)$ дугу H'', идущую от D' к E' и бесконечно мало отличающуюся от H'. Это последнее утверждение заслуживает некоторого внимания. Порядок связности двух поверхностей $W(t_{q+1}-\varepsilon)$ и $W(t_{q+1}+\varepsilon)$ неодинаков; может случиться, хотя эти две поверхности и крайне незначительно отличаются друг от друга, что нельзя провести на одной из них непрерывную линию, очень мало отличающуюся от непрерывной линии, проведенной на другой поверхности. Если на той из них, порядок связи которой является более высоким, имеется непрерывная линия L, проходящая около особой точки и пересекающая цикл, который сводится при $t=t_{q+1}$ к точке, то на другой из них невозможно провести непрерывную линию, очень мало отличающуюся от L. Рассмотрим, например, три поверхности, очень мало отличающиеся друг от друга; пер-

вая будет однополостным гиперболоидом, вторая — конусом, а третья — двуполостным гиперболоидом; цикл, сводящийся к точке, является эллипсом горловины однополостного гиперболоида. Прямолинейная образующая однополостного гиперболоида пересечет этот эллипс и невозможно начертить на третьей поверхности непрерывную линию, очень мало отличающуюся от этой образующей. Но здесь не следует бояться этого затруднения, так как более высокую степень связности имеет именно $W(t_{q+1}+\varepsilon)$. Следовательно, дуга H'' будет существовать всегда и будет иметь место

$$H'' \equiv D'D+H+EE \quad (\text{mod V}).$$

Положим затем

$$C=C_1+D'D+H+EE',$$

так что цикл C разложится на две дуги; первой будет C_1, а второй — $D'D+H+EE'$, с концами D' и E'. Будем иметь

$$C \equiv C_1+H'' \quad (\text{mod } V).$$

Таким образом мы заменили цикл C другим эквивалентным циклом C_1+H'', который обладает теми же свойствами, но отличается от первого, так как представляющая точка N вместо того, чтобы достигать в своих колебаниях A, не переходит $t_{q+1}+\varepsilon$.

Предположим сперва, что значение $t={}^1/_2$ будет заключаться между точками A и B, между которыми колеблется точка N, и что точка A будет находиться в пределах t_q и t_{q+1}, а точка B — в пределах t'_h и t'_{h+1}. С помощью описанных операций мы сможем заменить цикл C некоторым другим, в котором точка N будет колебаться между B и точкой $t_{q+1}+\varepsilon$, причем эта последняя точка будет уже заключаться не между t_q и t_{q+1} подобно точке A, а между t_{q+1} и t_{q+2}. Иными словами, мы можем поместить точку A между t_{q+1} и t_{q+2}; продолжая, мы поместим ее между t_{q+2} и t_{q+3}, и т. д., затем, наконец, между t_p и ${}^1/_2$. Поступая с B и Y'' так же, как мы это сделали для A и V', поместим точку B между ${}^1/_2$ и t'_p.

Итак, мы заменили цикл C другим, эквивалентным циклом C', так что точка N постоянно будет находиться между t_p и t'_p. Но когда t заключается между t_p и t'_p, поверхность $W(t)$ остается гомеоморфной самой себе и поверхности $W({}^1/_2)$ или W. Пусть тогда точка M является какой-либо точкой цикла C', принадлежащей $W(t)$, а M' — соответствующей точкой W. Когда точка M опишет цикл C', точка M' опишет цикл C'', расположенный на W, и мы получим

$$C' \equiv C''$$

при помощи рассуждения, подобного тому, которым мы показали, что $H \equiv H'$. Итак, будет иметь место

$$C \equiv C'' \quad (\text{mod V}).$$

Если бы точки A и B не находились с обеих сторон $^1/_2$, если бы, например, t оставалось $< {}^1/_2$ для всего цикла C, то мы заменили бы цикл C эквивалентным циклом

$$C + \alpha - \alpha,$$

где дуга α, которая последовательно проходится сначала в одном, а затем в обратном направлении, простиралась бы от конечной точки цикла C до какой-либо точки V, для которой $t > {}^1/_2$. Таким образом, мы пришли бы опять к предыдущему случаю. Итак, мы приходим к следующему общему выводу.

Каждый цикл V эквивалентен циклу W.

Однако между циклами W мы имеем эквивалентности (1) и (2)

$$K'_i \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, V'), \qquad K''_i \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, V'');$$

отсюда мы получим

$$K'_i \equiv K''_i \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, V). \tag{3}$$

Я утверждаю теперь, что других не будет.

Если, действительно, существует эквивалентность

$$K \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ V),$$

где K — цикл W, то это означает, что в V существует просто связная площадка A, граница которой образована циклом K. Установив это, будем различать в A точки, принадлежащие V' и образующие площадку A', которая может и не состоять из одного куска, и точки, принадлежащие V'' и образующие площадку A''. Если площадка A' не состоит из одного куска, то она будет образована из нескольких отдельных площадок A'_1, A'_2, . . ., из которых каждая будет состоять из одного куска. То же самое будет и относительно A''. Если мы будем рассматривать одну из этих частичных площадок, например A'_1, то может случиться, что она не имеет простой связности. Предположим, например, что она будет тройной связности и, следовательно, будет ограничена извне замкнутой кривой L, а изнутри — двумя замкнутыми кривыми L' и L'' (слова извне и изнутри следует понимать по отношению ко всей площадке A). Соединим одну точку L с одной точкой L' с помощью сечения P' и, точно так же, точку L с точкой L'' с помощью сечения P''; эти два сечения P' и P'' будут дугами, расположенными на A'_1, и они вернут A'_1 простую связность. Пусть B'_1— полученная таким образом просто связная площадка и пусть D'_1 — ее контур, образованный замкнутыми кривыми L, L' и L'' и двумя сечениями, пробегаемыми один раз в одном и один раз в обратном направлении. Площадка B'_1 целиком будет лежать в V' и будет иметь место эквивалентность

$$D'_1 \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, V').$$

То же самое можно проделать и с площадками A'_2, . . ., в результате чего будет получен ряд эквивалентностей

$$D'_2 \equiv \ldots \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, V').$$

То же самое можно сделать и с площадками A_1'', A_2'', ..., совокупность которых образует A'', что даст эквивалентности

$$D_1'' \equiv D_2'' \equiv \ldots \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} V'').$$

Так как A образована объединением площадок B_1', B_2', ... и B_1'', B_2'', ..., то эквивалентность $K \equiv 0$, где K — контур всей площадки A, будет следствием эквивалентностей

$$D_1' \equiv D_2' \equiv \ldots \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} V')$$

$$D_1'' \equiv D_2'' \equiv \ldots \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} V''),$$

где D_1', D_2', ..., D_1'', D_2'', ... являются контурами частичных площадок B_1', B_2', ..., B_1'', B_2'', ...

Итак, наша эквивалентность является следствием различных эквивалентностей, взятых одни относительно V', другие — относительно V''. Но все эквивалентности относительно V' являются следствиями эквивалентностей (1), в соответствии с предыдущим параграфом. Все эквивалентности относительно V'' являются следствиями эквивалентностей (2). Значит, наша эквивалентность является следствием эквивалентностей (1) и (2) или, что то же, эквивалентностей (3).

Это и требовалось доказать.

Имея таким образом все возможные эквивалентности, легко вывести из них все гомологии без возможного деления; достаточно обратить порядок членов в первых членах этих эквивалентностей. Пусть

$$C_1, \ C_2, \ \ldots, \ C_{2p}$$

— $2p$ фундаментальных циклов поверхности W.

Мы получим гомологии вида

$$K_i' \sim m_{i,1}'C_1 + m_{i,2}'C_2 + \ldots + m_{i,2p}'C_{2p} \qquad (\operatorname{mod} W)$$

и вида

$$K_i'' \sim m_{i,1}''C_1 + m_{i,2}''C_2 + \ldots + m_{i,2p}''C_{2p} \qquad (\operatorname{mod} W)$$

(m' и m'' — целые числа), так что у нас будут следующие гомологии, выведенные из эквивалентностей (3):

$$\left.\begin{array}{l} m_{i,1}'C_1 + m_{i,2}'C_2 + \ldots + m_{i,2p}'C_{2p} \sim 0, \\ m_{i,1}''C_1 + m_{i,2}''C_2 + \ldots + m_{i,2p}''C_{2p} \sim 0 \end{array}\right\} \quad (\operatorname{mod} V) \qquad (4)$$

и не будет никаких других.

Исследуем эти гомологии; образуем детерминант Δ из целых m' и m''. Здесь следует различать три случая.

1. Имеет место

$$|\Delta| > 1.$$

Следовательно, Δ — целое число, не равное ни 0, ни +1, ни —1; теперь мы сможем вывести из гомологий (4), *не прибегая к делению*,

$$\Delta C_i \sim 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2p),$$

и производя деление,

$$C_i \sim 0.$$

Итак, число Бетти, *относительно гомологий* с делением, *равно* 1. Невозможно, однако, получить $C_i \sim 0$, не производя деления, так что «коэффициенты кручения» (сравни стр. 616) не равны 1.

2. Имеет место

$$|\Delta| = 1.$$

Отсюда выводится, *без деления*

$$C_i \sim 0.$$

Итак, в этом случае *не только число Бетти, но и коэффициенты кручения равны* 1.

Следовательно, число Бетти и коэффициенты кручения являются теми же, что и для многообразия с простой связностью. Это не означает, как мы скоро увидим, что многообразие V будет иметь простую связность.

3. Имеет место

$$\Delta = 0.$$

Мы не можем более вывести из гомологий (4)

$$C_i \sim 0$$

даже с помощью деления.

Итак, число Бетти будет больше 1.

Оно будет равно 2, если детерминант Δ станет равным нулю, но если все его миноры первого порядка не станут равными нулю.

Оно будет равно k, если станут равными нулю и детерминант Δ и все его миноры до $k-2$ порядка, а все миноры $k-1$ порядка не будут равны нулю.

Вернемся к случаю, когда Δ равно ± 1. В этом случае можно задать вопрос, имеет ли наше многообразие простую связность каждый раз, когда и число Бетти, и коэффициенты кручения у него те же, что и у многообразий с простой связностью. Мы увидим, и в этом заключается основная цель настоящей работы, что так будет не всегда. Для этого ограничимся одним примером.

Предположим, что $p=2$, т. е. что поверхность W имеет пятикратную связность. Я буду предполагать, кроме того, что циклы K_1' и K_2' являются двумя фундаментальными циклами W, а именно:

$$K_1' = C_1,\ K_2' = C_3.$$

Представим поверхность W фуксовым многоугольником R_0 третьего семейства, ограниченным четырьмя непересекающимися окружностями. Для этого мы должны провести на поверхности W два цикла C_1 и C_3, которые не пересекаются, разрезать поверхность вдоль этих двух циклов, рассматриваемых как сечения, и развернуть ее на плоскости.

Циклы K_1'' и K_2'' представятся тогда на этой плоскости некоторым числом дуг кривых, которые будут соединять точки периметра фуксова многоугольника R_0 с другими точками этого периметра.

Эти дуги кривых подчинены следующим условиям.

1. Они не должны взаимно пересекаться; это условие необходимо и достаточно для того, чтобы циклы K_1'' и K_2'' не имели петель и не пересекались.

2. Рассмотрим теперь ряд дуг, совокупность которых представляет цикл K_1''. Эти дуги должны проходиться в определенном порядке и каждая должна идти от своей начальной точки на периметре R_0 к некоторой конечной точке, расположенной также на периметре R_0. Заметим, что периметр R_0 состоит из четырех кругов, сопряженных по два между собой; каждой точке одного круга соответствует на сопряженном круге точка, которую я назову сопряженной первой.

Установив это, видим, что конечная точка каждой из дуг, представляющих K_1'', должна быть сопряженной с начальной точкой следующей дуги, а конечная точка последней дуги должна быть сопряженной с начальной точкой первой дуги.

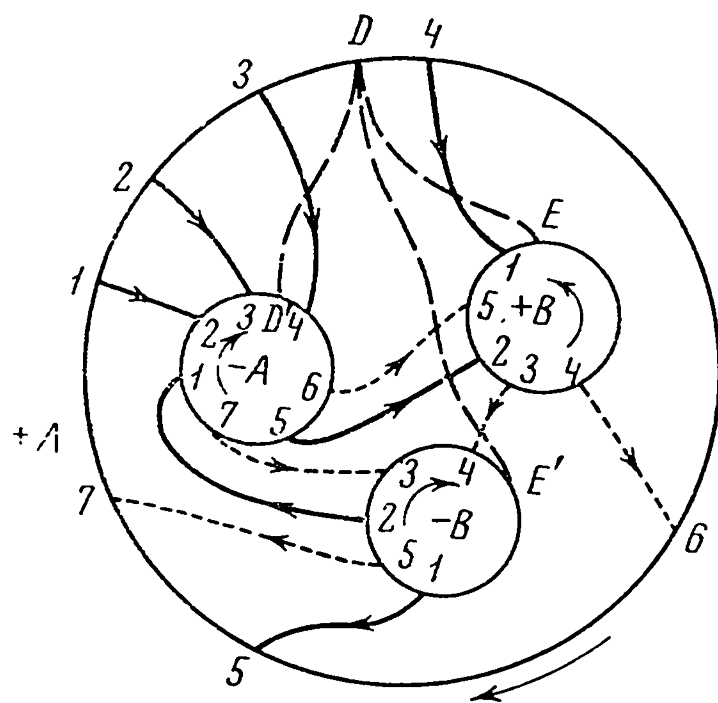


Рис. 4

То же самое и относительно дуг, представляющих K_2''.

Вот объяснение рис. 4: периметр R_0 представлен четырьмя циклами $+A$, $-A$, $+B$, $-B$, изображенными сплошными линиями; круги $+A$ и $-A$ сопряжены и соответствуют $K_1'=C_1$; круги $+B$ и $-B$ сопряжены и соответствуют $K_2'=C_3$; циклы K_1'' и K_2'' представлены дугами кривых, идущими от одной к другой точке периметра R_0.

Дуги, представляющие K_1'', изображены сплошными линиями; дуги, представляющие K_2'', изображены пунктиром. Стрелки, помещенные на линиях, показывают, в каком направлении проходится та или другая линия.

Точки, в которых эти дуги пересекают круги $\pm A$ и $\pm B$, обозначены цифрами; эти цифры одновременно показывают, с какой точкой сопряжена данная; так, точка $+B5$ сопряжена с $-B5$, точка $+A5$ с точкой $-A5$.

Около каждого из четырех кругов $\pm A$, $\pm B$ изображена стрелка, значение которой заключается в следующем: когда точка описывает один

из кругов в направлении, указываемом стрелкой, сопряженная точка должна описывать сопряженный круг в направлении его стрелки.

Легко проверить, что следуя или по $+A$, или по $-A$ в направлении, указываемом стрелкой, последовательно встречаем

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,$$

а следуя или по $+B$, или по $-B$ в направлении стрелки, последовательно встречаем

$$1,\ 5,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Порядок сопряжения наших точек был, следовательно, выбран надлежащим образом.

Цикл K_1'' представляется теперь с помощью семи дуг, которые следуют друг за другом в порядке:

$$+A1 \text{ к } -A2;\ +A2 \text{ к } -A3;$$
$$+A3 \text{ к } -A4;\ +A4 \text{ к } +B1;\ -B1 \text{ к } +A5;$$
$$-A5 \text{ к } +B2;\ -B2 \text{ к } -A1.$$

Цикл K_2'' представлен пятью дугами:

$$+B3 \text{ к } -B4;\quad +B4 \text{ к } +A6;\quad -A6 \text{ к } +B5;$$
$$-B5 \text{ к } +A7;\quad -A7 \text{ к } -B3.$$

Нетрудно видеть на рисунке, что эти 12 дуг не пересекаются; наши два цикла, следовательно, не имеют петель и не пересекаются.

Значит, мы можем построить многообразие V', для которого циклы $K_1'=C_1$ и $K_2'=C_3$ являются основными, и многообразие V'', для которого основными будут циклы K_1'' и K_2''. Соединение обоих многообразий V' и V'' даст V.

Еще лучше это понять можно следующим образом.

Возьмем опять нашу фигуру и разрежем многоугольник R_0, следуя по 12 дугам, представляющим K_1'' и K_2''; таким образом мы разложим R_0 на 10 частичных многоугольников. Склеим теперь эти многоугольники между собой, приклеивая каждую из дуг различных кругов $\pm A$, $\pm B$ к соответствующим дугам сопряженных кругов, например дугу $+A3$ $+A4$ к дуге $-A3$ $-A4$; мы получим новый многоугольник, который с тем же правом, что и R_0, будет представлять поверхность W, с той лишь разницей, что сечения будут сделаны уже не по циклам K_1' и K_2', а по циклам K_1'' и K_2''.

Полученная фигура совершенно подобна фигуре на рис. 4, но значение ее другое. Круги $+A$ и $-A$ представляют K_1'', но не K_1', круги $+B$ и $-B$ представляют K_2''; дуги, изображенные сплошными линиями, внутри

фигуры представляют K_1', а не K_1''; дуги, изображенные пунктиром, представляют K_2'.

Точки

$$\pm A1,\ \pm A2,\ \pm A3,\ \pm A4,\ \pm A6,\ \pm A5,\ \pm A7$$

соответственно представят точки

$$\pm A1,\ \pm A2,\ \pm A3,\ \pm A4,\ \pm B1,\ \pm A5,\ \pm B2.$$

Точки

$$\pm B1,\ \pm B5,\ \pm B2,\ \pm B3,\ \pm B4$$

представят соответственно

$$\pm A6,\ \pm B5,\ \pm A7,\ \pm B3,\ \pm B4.$$

Не следует удивляться знаку $\pm$; две точки $+A1$ и $-A1$ соответствуют в действительности одной и той же точке поверхности W.

Идентичность обеих фигур показывает нам, что поверхность W гомеоморфна самой себе так, что циклам

$$K_1',\ K_2',\ K_1'',\ K_2''$$

соответствуют циклы

$$K_1'',\ K_2'',\ K_1',\ K_2'.$$

Попробуем выразить K_1'' и K_2'' в функции от четырех фундаментальных циклов C_1, C_2, C_3, C_4. Для этого нам следует приложить правило конца § 4 и для упрощения применения этого правила мы провели черточками -- -- -- три сечения DD', DE, DE', которые фигурируют в его тексте.

Дуга $+A1\ -A2$ начинается с $+A$, что дает $+C_2$.

Дуга $+A2\ -A3$ начинается с $+A$, что дает $+C_2$.

Дуга $+A3\ -A4$ начинается с $+A$, что дает $+C_2$, и встречает DD' слева направо, что дает $+C_1$.

Дуга $+A4\ +B1$ начинается с $+A$, что дает $+C_2$, и встречает DE справа налево, что дает $-C_3$.

Дуга $-B1\ +A5$ начинается с $-B$, что дает $+C_4$.

Дуга $-A5\ +B2$ начинается с $-A$, что дает $-C_2$, и встречает DE' слева направо, что дает $-C_4-C_3+C_4$.

Дуга $-B2\ -A1$ начинается с $-B$, что дает $+C_4$.

Итак,

$$K_1''\equiv 3C_2+C_1+C_2-C_3+C_4-C_2-C_4-C_3+2C_4.$$

Перейдем к K_2''.

Дуга $+B3-B4$ начинается с $+B$, что дает $-C_4$, и встречает DE' справа налево, что дает $-C_4+C_3+C_4$.

Дуга $+B4+A6$ начинается с $+B$, что дает $-C_4$.

Дуга $-A6+B5$ начинается с $-A$, что дает $-C_2$, и встречает DE' слева направо, что дает $-C_4-C_3+C_4$.

Дуга $-B5+A7$ начинается с $-B$, что дает $+C_4$.

Дуга $-A7-B3$ начинается с $-A$, что дает $-C_2$.

Итак,

$$K_2''\equiv -2C_4+C_3-C_2-C_4-C_3-2C_4-C_2.$$

Следовательно, мы имеем

$$K_1'\equiv C_1, \qquad K_2'\equiv C_3,$$
$$K_1''\equiv 3C_2+C_1+C_2-C_3+C_4-C_2-C_4-C_3+2C_4,$$
$$K_2''\equiv -2C_4+C_3-C_2-C_4-C_3+2C_4-C_2.$$

Относительно V имеем эквивалентности

$$\begin{gathered} C_1+C_2-C_1-C_2+C_3+C_4-C_3-C_4\equiv 0, \\ K_1'\equiv K_2'\equiv 0, \qquad K_1''\equiv 0, \qquad K_2''\equiv 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Эквивалентности $K_1'\equiv K_2'\equiv 0$ или $C_1\equiv C_3\equiv 0$ дают возможность упростить другие; эквивалентность (1) сводится к

$$C_2-C_2+C_4-C_4=0,$$

т. е. к тождеству; эквивалентность $K_1''\equiv 0$ сводится к

$$4C_2+C_4-C_2+C_4\equiv 0, \tag{2}$$

а эквивалентность $K_2''\equiv 0$ сводится к

$$-2C_4-C_2+C_4-C_2\equiv 0. \tag{3}$$

Итак, у нас остаются два различных цикла C_2 и C_4, между которыми мы имеем лишь эквивалентности (2) и (3).

Если преобразовать эти эквивалентности в гомологии, то получим

$$3C_2+2C_4\sim 0, \qquad -C_4-2C_2\sim 0.$$

Детерминант равен -1; следовательно, мы имеем дело со случаем, когда $\Delta=\pm 1$, причем число Бетти и коэффициенты кручения равны 1. А между тем, V не просто связно, так как его фундаментальная группа не сводится к тождественной подстановке. Иными словами, эквивалентности (2) и (3) не дают возможности вывести

$$C_2\equiv 0, \ C_4\equiv 0.$$

Для того чтобы показать это, добавим к (2) и к (3) эквивалентность

$$-C_2+C_4-C_2+C_4\equiv 0, \tag{4}$$

откуда

$$C_4 - C_2 + C_4 - C_2 \equiv 0.$$

Из (2), (3), (4) выводим

$$\begin{gathered} -C_2 + C_4 - C_2 + C_4 \equiv 0, \\ 5C_2 \equiv 0, \qquad 3C_4 \equiv 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Но соотношения (5) являются структурными соотношениями, имеющими место между двумя подстановками C_2 и C_4, которые порождают *икосаэдрическую группу*. Следовательно, из них нельзя вывести $C_2 \equiv 0$, $C_4 \equiv 0$; а fortiori нельзя вывести эти две эквивалентности только из (2) и (3).

Итак, существуют два цикла V, не эквивалентные нулю; следовательно, V не обладает простой связностью.

Иными словами, нельзя свести фундаментальную группу V к тождественной подстановке, так как она содержит в качестве подгруппы икосаэдрическую группу.

Остается исследовать последний вопрос.

Возможно ли, чтобы фундаментальная группа V сводилась к тождественной подстановке и чтобы все же V не обладало простой связностью? [27]

Другими словами, можно ли провести циклы K'_1 и K''_2 так, чтобы они не имели петель и не пересекались; чтобы эквивалентности

$$K'_1 \equiv K'_2 \equiv 0, \qquad K''_1 \equiv K''_2 = 0$$

влекли за собой эквивалентности

$$C_1 \equiv C_2 \equiv C_3 \equiv C_4 \equiv 0$$

и чтобы, несмотря на это, нельзя было рассматривать поверхность W как гомеоморфную самой себе так, чтобы циклам C_1, C_2, C_3, C_4 соответствовали циклы C'_1, C'_2, C'_3, C'_4; может ли быть, чтобы эквивалентности

$$K'_1 \equiv K'_2 \equiv 0$$

влекли за собой $C'_1 \equiv C'_3 \equiv 0$, и наоборот; и наконец, чтобы эквивалентности

$$K''_1 \equiv K''_2 \equiv 0$$

влекли за собой $C'_2 \equiv C'_4 \equiv 0$, и наоборот?

Этот вопрос, однако, мы разберем в другом месте.

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ НА ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ*

§ 1. Введение

В моих «Méthodes nouvelles de la mécanique céleste» я изучил свойства решений задачи трех тел и, в частности, периодических и асимптотических решений. Достаточно ознакомиться с тем, что я писал по этому вопросу, чтобы понять чрезвычайную сложность задачи; кроме основной трудности, зависящей от сущности самого предмета, обнаруживается много второстепенных затруднений, которые еще более усложняют работу исследователя. Поэтому было бы небезынтересно изучить сперва задачу, которая заключала бы основную трудность и одновременно была бы свободной от второстепенных затруднений. Такая задача существует — это задача о геодезических линиях на поверхности; она относится к динамике, так что налицо основная трудность, но из всех задач динамики она наиболее проста: имеются лишь две степени свободы. Кроме того, если взять поверхность без особой точки, то возникающие трудности не идут в сравнение с теми затруднениями, которые встречаются в задачах динамики при рассмотрении точек, где скорость равна нулю. В самом деле, в задаче о геодезических линиях скорость постоянна и ее можно считать заранее известной.

Это обстоятельство прекрасно понял Адамар и оно побудило его изучить геодезические линии поверхностей отрицательной кривизны; полное решение этого вопроса изложено им в чрезвычайно интересном мемуаре [1]. Однако траектории задачи трех тел сопоставимы не с геодезическими линиями на поверхностях отрицательной кривизны, а, наоборот, с геодезическими линиями на выпуклых поверхностях.

Поэтому я предпринял изучение геодезических линий на выпуклых поверхностях; к сожалению, эта задача значительно сложнее той, которая решалась Адамаром. Вследствие этого я был вынужден ограничиться некоторыми частными результатами, главным образом относящимися к замкнутым геодезическим линиям, которые играют тут такую же роль, как периодические решения в задаче трех тел.

---

* Transactions of the American Mathematical Society, July 1905, 6, 237—274.

§ 2. Фокусы и каустики

Пусть S — *выпуклая аналитическая* поверхность. Предположим, что оба ее главных радиуса кривизны постоянно остаются в пределах между L_1 и L_2 и, следовательно, ее полная кривизна содержится между L_1^2 и L_2^2. Очевидно, что радиус кривизны любой из ее геодезических линий будет постоянно заключаться между L_1 и L_2. Напомним сперва существенные свойства *фокусов* и *каустик*.

Пусть O — фиксированная точка на поверхности S. Рассмотрим геодезическую линию OM, проходящую через точку O; пусть OH — другая фиксированная геодезическая линия, проходящая через ту же точку O. Пусть, далее v — угол, под которым обе эти геодезические линии пересекаются в O; пусть u — дуга OM, определенная на геодезической линии. Эти две величины u и v можно рассматривать как координаты, определяющие положение точки M на поверхности; в некотором роде это будут полярные координаты, причем точка O будет играть роль полюса, а геодезическая линия OH — роль полярной оси. Квадрат элемента дуги будет иметь вид

$$ds^2 = du^2 + \lambda^2 dv^2,$$

где λ — функция от u и от v.

Следует заметить, что каждой точке M поверхности соответствует бесконечное число пар значений координат u и v; действительно, существует бесконечно много возможностей перехода от O к M, следуя по геодезической линии. Например, если S — сфера радиуса, равного единице, то

$$ds^2 = du^2 + \sin^2 u dv^2$$

и пары значений

$$(u, v), (u+2\pi, v), (u+4\pi, v), \ldots$$

соответствуют одной и той же точке M.

Рассмотрим две геодезические линии, исходящие из точки O и бесконечно мало отличающиеся друг от друга, и предположим, что они снова пересекаются в некоторой точке M. Мы получим для точки пересечения две пары значений координат; первая или вторая получаются в зависимости от того, приходим ли мы к точке M, следуя по первой геодезической линии или по второй, слегка от нее отличающейся. Так как эти две геодезические линии отличаются друг от друга бесконечно мало, то две пары значений координат также будут весьма мало отличаться друг от друга, это будут, например, (u, v) и $(u+du, v+dv)$. Поскольку точка M, представленная этими двумя парами, одна и та же, то отсюда

$$ds^2 = du^2 + \lambda^2 dv^2 = 0$$

и

$$du = 0, \qquad \lambda = 0.$$

Если теперь мы рассмотрим две геодезические линии, бесконечно близкие и исходящие из точки O, то они будут пересекаться последовательно в бесконечном числе точек, в соответствии с одной теоремой Адамара [2]; точки последовательных пересечений можно обозначить через $F_1, F_2, \ldots F_n$. Точка F_n обычно называется *n-м полюсом* точки O; очевидно, что F_p есть $(p-q)$-й полюс F_q.

Огибающая всех геодезических линий, выходящих из точки O, называется *каустикой* и очевидно, что она является геометрическим местом фокусов точки O. Эта каустика, в соответствии с изложенным, определяется уравнением

$$\lambda=0.$$

Предположим на мгновение, что v постоянно и, следовательно, мы будем постоянно идти по одной из геодезических линий, выходящих из O. Обозначим через $\lambda', \lambda'', \ldots$ последовательные производные от λ по u. Известно, что $-\lambda''/\lambda$ представляет полную кривизну, так что

$$\frac{1}{L_1^2}<\frac{\lambda''}{\lambda}<\frac{1}{L_2^2}. \tag{1}$$

Из этих неравенств легко выводится:

1) что λ, λ' и λ'' всегда конечны;

2) что корни уравнения $\lambda=0$ перемежаются с корнями $\lambda'=0$, и наоборот;

3) если u_0 является одним из корней уравнения $\lambda=0$ и u_1 одним из корней уравнения $\lambda'=0$, если между u_0 и u_1 нет ни одного корня ни уравнения $\lambda=0$, ни уравнения $\lambda'=0$, то будут иметь место неравенства *

$$\frac{\pi}{2}L_2<|u_1-u_0|<\frac{\pi}{2}L_1. \tag{2}$$

Итак, если мы будем рассматривать u и v в качестве *полярных* координат некоторой точки на плоскости и построим на этой плоскости кривые $\lambda=0$, $\lambda'=0$, то увидим, что эти кривые состоят из ряда замкнутых овалов, охватывающих друг друга и окружающих полюс, так что если удаляться от полюса, следуя по радиусу-вектору, то встречаются попеременно овал, принадлежащий к $\lambda=0$, и овал, принадлежащий к $\lambda'=0$; расстояние между двумя последовательными овалами заключается между $\pi/2L_2$ и $\pi/2L_1$. Имеем к тому же для $u=0$

$$\lambda=0,\quad \lambda'=1,$$

и, таким образом, можно рассматривать полюс как один из овалов кривой $\lambda=0$, причем в этом случае овал сводится к одной точке.

* Имеется в виду применимость в данном случае рассуждений, использованных Штурмом в его известном методе. См. например: Б. М. Левитан. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. М.—Л., 1950. (*Прим. ред.*).

Первые фокусы находятся на первом овале, вторые — на втором и т. д. Следовательно, фокусы различных порядков полностью отделены одни от других. Это и позволяет нам определить *n-ю каустику* как геометрическое место *n-х фокусов.*

Будем обозначать через P плоскость, на которой мы представим таким же образом точки S, приняв в качестве координат u и v. В этой плоскости обозначим через C_1, $C_2 \ldots$ последовательные овалы кривой $\lambda=0$ (C_0 сводится к полюсу); обозначим через C'_1, C'_2, ... последовательные овалы кривой $\lambda'=0$. В случае, когда S является поверхностью вращения, а точка O является полюсом, λ будет зависеть лишь от u, а овалы C и C' сводятся к концентрическим окружностям.

Пусть x, y, z — координаты точки M и

$$F(x, y, z)=0$$

— уравнение поверхности S. Уравнения геодезической линии можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{du^2}=\mu\frac{dF}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{du^2}=\mu\frac{dF}{dy}, \qquad \frac{d^2z}{du^2}=\mu\frac{dF}{dz}, \tag{3}$$

где μ определяется из уравнения

$$\sum\frac{d^2F}{dx^2}\left(\frac{dx}{du}\right)^2+2\sum\frac{d^2F}{dxdy}\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}+\mu\sum\left(\frac{dF}{dx}\right)^2=0. \tag{4}$$

Начальные значения x, y, z будут координатами точки O; что же касается начальных значений dx/du, dy/du, dz/du, то они будут линейно зависеть от $\cos v$ и от $\sin v$.

Дифференциальные уравнения (3), (4) не могут допускать особую действительную точку. В самом деле, они могли бы допустить ее, если бы μ стало бесконечным, т. е. если бы $\sum (dF/dx)^2$ стало нулем, иначе говоря, при одновременном выполнении условий

$$\frac{dF}{dx}=\frac{dF}{dy}=\frac{dF}{dz}=0,$$

или, что то же, если бы поверхность S имела особую точку, чего на самом деле нет. Следовательно, мы совершенно уверены в том, что рассматриваемое решение дифференциальных уравнений не пройдет ни через какую особую точку. В таком случае я могу применить к нему теорему, доказанную мною в пунктах 23—28 первого тома «Новых методов небесной механики». Отсюда следует, что x, y и z являются голоморфными функциями от u и от начальных значений и поэтому от u и v; я хочу сказать, что x, y и z можно разложить по степеням $u-u_0$, $v-v_0$, если только $|u-u_0|$ и $|v-v_0|$ будут достаточно малыми, независимо от значений u_0 и v_0.

Вернемся к нашим каустикам. Пусть Q_1 и Q_2 будут две точки некоторой каустики, между которыми, по нашему предположению, нет никакой

особой точки. Какой будет (на поверхности S) дуга каустики, заключенная между этими двумя точками? Если u_1 и u_2 являются значениями u, соответствующими этим двум точкам, то дуга будет $|u_1-u_2|$.

Это можно установить с помощью рассуждения, подобного тому, которое дает дугу развертки плоской кривой.

Следовательно, элемент дуги каустики равен du.

Возвратимся к рассмотрению двух бесконечно близких геодезических линий, выходящих из точки O и соответствующих углам v и $v+dv$. Расстояние от некоторой точки первой геодезической линии до второй будет, очевидно, $\lambda\, dv$; при приближении к фокусу это расстояние будет стремиться к 0, так как λ будет стремиться к 0; обе геодезические линии пересекутся под углом $\lambda' dv$. Следовательно, угол геодезического вращения каустики равен $\lambda' dv$. Геодезическая кривизна каустики, следовательно, будет

$$\frac{(d\lambda/du)^2}{d\lambda/dv}.$$

Установив это, вернемся к уравнению $\lambda=0$; ни в одной точке не может быть $\lambda'=0$: две кривые $\lambda=0$, $\lambda'=0$ не могут пересечься, так как расстояние между двумя овалами C и C' по меньшей мере равно $\pi/2L_2$, а следовательно, уравнение $\lambda=0$ может быть разрешено относительно u, и u есть голоморфная функция от v. Так как x, y, z являются голоморфными функциями u и v, то очевидно, что в *уравнении каустики координаты x, y, z являются голоморфными функциями v.*

Всякий раз, когда $d\lambda/dv$ не равно нулю, уравнение $\lambda=0$ может быть решено относительно v, и v — голоморфная функция u. *Координаты некоторой точки каустики являются, следовательно, голоморфными функциями дуги u.* Итак, все особые точки каустики будут определяться уравнением $d\lambda/dv=0$. Можно добавить, что геодезическая кривизна каустики не может ни стать равной нулю, ни переменить знак, так как не может стать нулем $d\lambda/du$. Следовательно, тут нет ничего, что соответствовало бы какой-либо точке перегиба.

Особые точки каустики соответствуют, таким образом, корням уравнения $d\lambda/dv=0$, т. е. минимуму u при описывании одного из овалов C в плоскости P.

Чтобы отдать себе отчет в природе этих особых точек, возьмем в качестве начальной точки особую точку, в качестве плоскости xy — касательную плоскость, в качестве оси x — касательную к кривой и подберем начало отсчета угла v так, чтобы в особой точке удовлетворялось условие $v=0$. Тогда x и y можно разложить по степеням v; первый член разложения будет v^n для x и v^m для y. При этом целые числа m и n удовлетворяют неравенству

$$m < n.$$

Если λ становится равным нулю, так же, как и p ее первых производных по v, а $(p+1)$-я не становится равной нулю, так же, как и $d\lambda/du$, то очевидно, что разложение u начинается с члена v^{p+1}. Тогда получим

$$m=p+1.$$

С другой стороны, $d\lambda/dv$ начинается с члена v^p, так что для некоторой точки, весьма близкой к особой точке, геодезическая кривизна будет иметь порядок v^{-p}.

Но так как выражение для этой кривизны дается в форме

$$\frac{\dfrac{dx}{dv}\dfrac{d^2y}{dv^2}-\dfrac{dy}{dv}\dfrac{d^2x}{dv^2}}{\left[\left(\dfrac{dx}{dv}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dv}\right)^2\right]^{3/2}}\ *,$$

то, следовательно, она имеет порядок

$$m+n-3-3(m-1)=n-2m.$$

Итак, имеем

$$n-2m=-p,$$

откуда в окончательном виде

$$m=p+1, \quad n=p+2.$$

Самым простым случаем будет тот, когда

$$p=1, \quad m=2, \quad n=3$$

и при этом особая точка является обычной точкой возврата.

Эти точки возврата соответствуют максимумам и минимумам u, но следует различать оба эти случая. Если имеет место минимум и точка R является соответствующей точкой перегиба, то обе ветви каустики касаются не геодезической линии OR, а ее продолжения; если речь идет о максимуме, то обе ветви каустики направлены от R к O.

Итак, мы пришли к заключению, что можно различать четыре вида фокусов:

1. *Обычные фокусы*, соответствующие неособым точкам каустики $(p=0)$.

2. *Противошерстные фокусы*, соответствующие обычным точкам перегиба $(p=1)$ и являющиеся минимумами u.

3. *Пошерстные фокусы*, соответствующие обычным точкам перегиба $(p=1)$, которые являются максимумами u**.

---

* См.: В. Бляшке. Дифференциальная геометрия. Перевод с нем. М. Я. Выгодского. М.—Л., ОНТИ, 1935, § 103. (*Прим. ред.*).

** В соответствии с одной теоремой Каратеодори, каустика точки O имеет по меньшей мере два пошерстных фокуса. (*Р. Г.*).

Оба эти выражения заимствованы нами из железнодорожной техники: я представляю себе разветвление, в котором мы имеем основной путь, представленный геодезической линией OR, и два ответвления, представленные двумя ветвями каустики; поезд, который следовал бы по главному пути, следуя из O в R, встретил бы отходящие пути у противошерстной стрелки в первом случае и сходящиеся у пошерстной — во втором *.

4. *Особые фокусы*, соответствующие особым точкам более высокого порядка ($p > 1$). Из сказанного выше ясно, что эти особые точки входят во всех случаях в весьма специальный класс.

Введем теперь понятие *линии разделения*. Предположим, что каждая точка поверхности S соединяется с точкой O наиболее коротким путем. Этот кратчайший путь будет дугой геодезической линии. Если $OAPM$ является кратчайшим путем из O в M, причем точка P находится на дуге $OAPM$, то дуга OAP будет, очевидно, кратчайшим путем от O к P. Из этого следует, что кратчайший путь от O к M никогда не может пересечь кратчайшего пути от O к M'.

Пусть OM будет любой геодезической линией, проходящей через O; на этой линии можно найти такую точку P, что кратчайшим путем от O до некоторой точки Q, находящейся на геодезической линии OM между O и P, будет в точности дуга OQ этой геодезической линии OM, однако это уже не будет верно, если точка Q находится за P. В таком случае будем говорить, что P есть *оконечность* кратчайшего пути OP.

Итак, мы можем заключить, что через каждую точку на S проходит некоторый кратчайший путь, причем только один. Есть исключения для оконечностей различных кратчайших путей: если P — одна из этих оконечностей, то от точки O отходят *по крайней мере два* кратчайших пути, причем оконечности обоих этих путей будут находиться в P. Все кратчайшие пути, концы которых находятся в P, имеют одну и ту же длину.

Геометрические места точек, являющихся оконечностями двух или большего числа кратчайших путей, образуют множество линий, которые можно назвать *линиями разделения*. Если из точки P выходят только два кратчайших пути, то через точку P проходит одна-единственная линия разделения, касательная к которой является биссектрисой угла, образованного касательными к обоим кратчайшим путям.

Если из точки P выходит более двух кратчайших путей, то к точке P примыкают несколько линий разделения, касательные к которым являются биссектрисами углов, образованных касательными к каждым двум последовательным кратчайшим путям.

Совокупность линий разделения не делит поверхность S на две области, так как от точки O можно перейти к любой точке M поверхности, не пересекая никакой линии разделения; для этого достаточно перейти от O к M кратчайшим путем.

---

* По-французски пошерстные и противошерстные стрелки называются «en talon» и «en pointe» («с пятки» и «с носка»). (*Прим. ред.*).

Итак, совокупность линий разделения, или также часть этих линий, никогда не может составить замкнутого многоугольника; она образует нечто вроде *ветвящейся системы*, где бифуркации будут представлены точками, в которых оканчивается более двух кратчайших путей. Что же будут представлять тогда концы ветвей? Предположим, что мы следуем по линии разделения PQR и точка R будет крайней точкой этой линии. Из точки Q выйдут два кратчайших пути одной и той же длины; если продвигать точку Q из P в R, то эти два кратчайших пути будут изменяться непрерывным образом. В точке R они должны слиться в один.

Нетрудно видеть, что точки R являются единственными точками линий разделения, которые находятся на первой каустике (совершенно понятно, я хочу этим сказать, что ни в какой иной точке линии разделения один из кратчайших путей, заканчивающихся в ней, не касается первой каустики). Кроме того, ясно, что эти точки R не могут быть обычными фокусами, а лишь противошерстными фокусами *.

§ 3. Геодезические линии на сфероиде

Будем искать геодезические линии на поверхности, весьма мало отличающейся от сферы; с этой целью нам придется применить метод варьирования постоянных Лагранжа. Геодезические линии на сфере — это ее большие круги и можно принять в качестве элементов, определяющих движение точки по такому большому кругу, подобно тому, как эллиптические элементы определяют кеплерово движение планеты, следующие четыре величины: координаты полюса большого круга, постоянную скорость движения или функцию этой скорости, долготу подвижной точки на этом большом круге, считая от некоторого начала. Но сперва было бы удобно привести уравнения к каноническому виду. Если мы представим линейный элемент какой-либо поверхности в виде

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,$$

то для половины живой силы T, фигурирующей в уравнениях Лагранжа или Гамильтона, получим

$$T=\frac{1}{2}\left(Fu'^2+2Fu'v'+Gv'^2\right),$$

откуда

$$U=\frac{dT}{du'}=Eu'+Fv',$$

$$V=\frac{dT}{dv'}=Fu'+Gv',$$

---

* См. по этому вопросу: J. Hadamard. Leçons sur le calcul des variations. Paris, Hermann, 1910, p. 406—407. (*Р. Г.*).

и

$$T=\frac{1}{2}(\mathfrak{E}U^2+2\mathfrak{F}UV+\mathfrak{G}V^2),$$

где $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ имеют значения, которые нетрудно вычислить. В случае сферы имеем просто

$$T=\frac{1}{2}(u'^2+\sin^2 u\cdot v'^2),$$

откуда

$$T=\frac{1}{2}\left(U^2+\frac{1}{\sin^2 u}V^2\right).$$

В случае поверхности, весьма мало отличающейся от сферы, имеем

$$T=T_0+\mu T_1,$$

где

$$T_0=\frac{1}{2}\left(U^2+\frac{1}{\sin^2 u}V^2\right),$$

где μ будет очень малым и где

$$T_1=\frac{1}{2}(eU^2+2fUV+gV^2)$$

e, f и g являются некоторыми функциями от u и v.

Построим уравнение Якоби.

Предположим сперва, что $\mu=0$, так что наш сфероид превращается в сферу.

Пусть θ будет долгота узловой точки круговой орбиты, описанной точкой на сфере, в плоскости экватора; пусть, далее, i — наклонение этой орбиты; λ — долгота подвижной точки на сфере, принимая узловую точку в качестве точки отсчета; ω — скорость циркуляции (радиус сферы принят за единицу, так же как и масса подвижной точки); тогда половина живой силы будет равна $\omega^2/2$; постоянная площадей будет равна ω в плоскости орбиты и $\omega\cos i$ в экваториальной плоскости.

Нетрудно выразить теперь u, v, U, V в функции от θ, λ, i, ω и так же, как и в небесной механике, получим, полагая $G=\omega\cos i$, что

$$\omega d\lambda+Gd\theta+Udu-Vdv$$

есть точный дифференциал.

Если мы более не будем предполагать, что $\mu=0$, то все же сможем считать, что новые переменные θ, λ, i, ω связаны с u, v, U и V теми же соотношениями, как и в случае сферы, и будем рассматривать их как элементы

оскулирующей орбиты. Тогда уравнения сохранят свою каноническую форму и их можно будет записать в виде

$$\omega dt = d\tau, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{dT}{d\omega}, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{dT}{d\lambda}, \quad \frac{dG}{dt} = -\frac{dT}{d\theta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{dG}.$$

Какого же вида будет T? Заметим сперва, что $T_0 = \omega^2/2$. Отметим затем, что u, v, u'/ω, v'/ω, U/ω, V/ω и, следовательно, T/ω^2 зависят только от i, λ, θ. Итак, положим

$$T = \omega^2 S, \quad T_0 = \omega^2 S_0, \quad T_1 = \omega^2 S_1;$$

тогда наши уравнения примут вид

$$\frac{d\omega}{\omega dt} = -\frac{dS}{d\lambda}, \qquad \frac{di}{d\tau}\sin i = \frac{dS}{d\theta} - \frac{dS}{d\lambda}\cos i,$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = 2S + \frac{dS}{di}\operatorname{ctg} i, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{\sin i}\frac{dS}{di},$$

и они будут иметь, как и должно быть, интеграл $\omega^2 S = \mathrm{const}$.

Поскольку S_0 сводится к $^1/_2$, можем записать

$$\frac{di}{d\tau} = \frac{\mu}{\sin i}\frac{dS_1}{d\theta} - \mu\operatorname{ctg} i\,\frac{dS_1}{d\lambda}, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{\mu}{\sin i}\frac{dS_1}{di},$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = 1 + 2\mu S_1 + \mu\operatorname{ctg} i\,\frac{dS_1}{di}.$$

Так как μ очень мало, то мы можем заменить неизвестные в правых частях их приближенными значениями, теми самыми, которые соответствуют случаю сферы; иначе говоря, постоянными значениями для i и θ и приближенным значением $\tau + \mathrm{const}$ для λ.

С той точки зрения, которая нас сейчас интересует, было бы предпочтительнее принять за независимую переменную λ и записать

$$\frac{di}{d\lambda} = \frac{\dfrac{\mu}{\sin i}\dfrac{dS_1}{d\theta} - \mu\operatorname{ctg} i\,\dfrac{dS_1}{d\lambda}}{1 + 2\mu S_1 + \mu\operatorname{ctg} i\,\dfrac{dS_1}{di}},$$

откуда, пренебрегая μ^2,

$$\frac{di}{d\lambda} = \frac{\mu}{\sin i}\frac{dS_1}{d\theta} - \mu\operatorname{ctg} i\,\frac{dS_1}{d\lambda} \tag{1}$$

и, подобно этому,

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{\mu}{\sin i}\frac{dS_1}{di}. \tag{2}$$

В правых частях мы сохраним λ и заменим i и θ их приближенными значениями, которые являются постоянными.

Выясним теперь геометрический смысл функции S_1; каким образом сможем мы установить соответствие между точками сфероида и точками сферы? Выбор такого соответствия произволен в достаточно широких пределах. Самое простое — установить соответствие между точками касания плоскостей одного и того же направления, следовательно, принять то, что называется сферическим представлением поверхностей. При этих условиях, если воспользоваться геодезической терминологией, u и v представят на сфероиде *астрономические* дополнение широты и долготу.

Рассмотрим теперь на сфероиде две бесконечно близкие точки M и M', а на сфере — две соответственные точки M_1 и M_1'. Пусть u и v координаты точки M (или M_1); $u+u'dt$, $v+v'dt$ — координаты точки M' (или M_1'). Обозначим затем дугу MM' через ds и дугу M_1M_1' через ds_1. Очевидно, что отношение ds/ds_1 зависит не только от положения точки M, но и от ориентации дуги MM'; если эта дуга принадлежит линии кривизны, то указанное отношение является не чем иным, как соответствующим главным радиусом.

Если M и M' представляют два положения подвижной точки на сфероиде в моменты времени t и $t+dt$, то для кинетической энергии будем иметь выражение

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Совершенно ясно, что две пары точек MM' и M_1M_1' соответствуют одним и тем же значениям u, v, u', v', но не соответствуют одним и тем же значениям u, v, U, V, а следовательно, и i, θ, ω, λ, ибо соотношение, связывающее U и V с u, v, u', v', не одно и то же для $\mu>0$, т. е. для сфероида, и для $\mu=0$, т. е. для сферы. Пусть к сфере относится пара бесконечно близких точек M_1, M_2', выбранных так, чтобы они соответствовали тем же значениям u, v, U, V (или i, θ, ω, λ), что и пара точек M, M' сфероида.

Пусть теперь u и v будут координатами точки M_1, $u+u_0'dt$ и $v+v_0'dt$ координатами точки M_2'; пусть затем ds_2 — дуга M_1M_2'. Тогда i и θ будут обозначать дополнение широты и долготу полюса большого круга, проходящего через M_1 и M_2'; λ будет дугой этого большого круга, заключенной между точкой M_1 и экватором; тогда будем иметь

$$M_1M_2'=ds_2=\omega dt.$$

Пусть

$$T_0=\frac{1}{2}(u'^2+v'^2\sin^2 u),$$

$$T_0'=\frac{1}{2}(u_0'^2+v_0'^2\sin^2 u);$$

тогда, очевидно,

$$T_0=\frac{1}{2}\left(\frac{dS_1}{dt}\right)^2, \qquad T_0'=\frac{1}{2}\left(\frac{ds_2}{dt}\right)^2=\frac{\omega^2}{2}.$$

Если мы также обозначим через T_1' результат замены в T_1 величин u' и v' через u_0' и v_0', то разность $T_1' - T_1$ будет порядка μ так же, как и $dT_1'/du_0' - dT_1/du'$. Так как U и V должны иметь одинаковые значения для пары MM' на сфероиде и для пары M_1M_2' на сфере, то, следовательно,

$$U = \frac{dT_0'}{du_0'} = \frac{dT}{du'},$$

$$V = \frac{dT_0'}{dv_0'} = \frac{dT}{dv'},$$

откуда, пренебрегая μ^2,

$$\frac{dT_0'}{du_0'} = \frac{dT_0}{du'} + \mu \frac{dT_1'}{du_0'},$$

$$\frac{dT_0'}{dv_0'} = \frac{dT_0}{dv'} + \mu \frac{dT_1'}{dv_0'}.$$

Я умножу первое выражение на u_0', а второе — на v_0' и затем сложу их. Тогда я получу, в соответствии со свойствами квадратичных форм,

$$\sum u_0' \frac{dT_0}{du_0'} = \sum u_0' \frac{dT_0}{du'} + \mu \sum u_0' \frac{dT_1'}{du_0'} = \sum u' \frac{dT_0}{du_0'} + 2\mu T_1',$$

откуда

$$\sum (u_0 - u') \frac{dT_0'}{du_0'} = 2\mu T_1'.$$

С другой стороны, мы можем разложить T_0 в ряд Тейлора по возрастающим степеням $u' - u_0'$, $v' - v_0'$; тогда, пренебрегая μ^2, т. е. пренебрегая членами второго порядка, получим

$$T_0 = T_0' + \sum \frac{dT_0'}{du_0'} (u' - u_0') = \frac{\omega^2}{2} - 2\mu T_1'$$

или, опять-таки пренебрегая μ^2,

$$T_0 = \frac{\omega^2}{2} - 2\mu T_1,$$

откуда

$$T = \frac{\omega^2}{2} - \mu T_1.$$

Из двух соотношений

$$T = T_0' - \mu T_1, \qquad T = T_0 + \mu T_1$$

выводим сперва

$$2T = T_0 + T_0',$$

т. е.

$$2ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2,$$

откуда, пренебрегая μ^2,

$$2ds = ds_1 + ds_2.$$

То, что мы называем S_1, это отношение $\frac{T - \omega^2}{\mu\omega^2}$, т. е.

$$\frac{ds^2 - ds_2^2}{\mu ds_2^2},$$

где, пренебрегая высшими степенями μ,

$$S_1 = \frac{ds_1^2 - ds^2}{\mu ds^2} = \frac{2}{\mu} \frac{ds_1 - ds}{ds} = \frac{2}{\mu} \frac{2s_1 - ds}{ds_1}.$$

Таков геометрический смысл S_1.

Вернемся теперь к уравнениям (1) и (2). Правые части здесь — периодические функции от λ. Для того чтобы i и θ также были периодическими функциями от λ, т. е. для того, чтобы геодезическая линия была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы *среднее значение* этой правой части, рассматриваемой в качестве периодической функции от λ, равнялось нулю.

Каким же будет это среднее значение? Разложим S_1 в ряд по степеням косинусов и синусов кратных λ, и пусть R будет средним значением S_1, т. е. совокупностью членов, не зависящих от λ. Ясно, что dR/di будет средним значением dS_1/di и $dR/d\theta$ — средним значением $dS_1/d\theta$. Что касается среднего значения $dS_1/d\lambda$, то оно будет равно нулю.

Для того чтобы средние значения наших правых частей были нулями, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{dR}{di} = \frac{dR}{d\theta} = 0.$$

Замкнутые геодезические линии будут, таким образом, соответствовать максимальным, минимальным и минимаксимальным значениям функции R. По примеру англичан, я называю минимаксами точки, в которых становятся нулями производные первого порядка от функции двух переменных, но не имеет места ни максимум, ни минимум.

Сперва следовало бы установить геометрический смысл функции R. Если мы придадим i и θ постоянные значения и будем варьировать λ, то как будет перемещаться в этом случае точка M? Точка M_1 опишет на сфере большой круг; плоскость, касательная в точке M, останется параллельной прямой D, направление которой определено дополнением широты i и долготой θ. Построим цилиндр, описанный вокруг сфероида, образующие которого параллельны D; он будет касаться сфероида по замкнутой кривой C. *Точка M останется на этой кривой C.* Эта кривая C будет, если воспользоваться геодезической терминологией, большим астрономическим кругом.

Итак, имеем

$$R=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_1 d\lambda.$$

Пусть M, M' будут две точки, бесконечно близкие друг к другу и находящиеся на кривой C; M_1, M' — две соответствующие точки на сфере. Пусть будет, как и выше,

$$MM'=ds,\quad M_1M_1'=ds_1.$$

Тогда $ds_1=d\lambda$ и

$$S_1=\frac{2}{\mu}\frac{ds_1-ds}{ds_1},$$

откуда

$$R=\frac{1}{2\pi}\int\frac{2}{\mu}\frac{ds_1-ds}{d\lambda}d\lambda=\frac{1}{\pi\mu}(s_1-s).$$

Здесь 2π — полная длина большого круга сферы, а s — полная длина кривой C.

Таким образом, максимальные, минимальные и минимаксимальные значения R соответствуют минимальным, максимальным и минимаксимальным значениям полной длины кривых C.

Рассмотрим на сфере большой круг, который соответствует кривой C. Пусть P и P' будут два полюса этого большого круга; дополнение широты и долготы точки P будут i и θ, а R будет функцией от i и от θ. Заметим, что эта функция имеет одно и то же значение для двух диаметрально противоположных точек P и P'. Построим кривые $R=\text{const}$, т. е. кривые, проходящие через различные точки P, в которых функция R имеет одно и то же значение. Мы получим ряд таких кривых, что через каждую точку сферы пройдет одна из этих кривых, и притом только одна. Минимальным и максимальным значениям R соответствуют изолированные точки этих кривых, а минимаксимальным значениям — двойные точки с действительными касательными. Одна из топологических теорем доказывает нам, что общее число минимумов и максимумов, т. е. изолированных точек, превосходит на два число минимаксов, т. е. двойных точек. По этому вопросу я ограничусь ссылкой на мой мемуар о кривых, определяемых дифференциальными уравнениями *.

Общее число минимумов, максимумов и минимаксов является, следовательно, кратным 4 плюс 2. Но каждой кривой C соответствуют два полюса P и P', диаметрально противоположные, следовательно, каждой замкнутой геодезической линии соответствуют *два* минимума, максимума

---

* См. А. Пуанкаре. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.—Л., 1947, стр. 43. (*Прим. ред.*).

или минимакса. *Следовательно, полное число замкнутых геодезических линий является нечетным*, ибо оно равно половине общего числа максимумов, минимумов и минимаксов.

Совершенно понятно, что здесь идет речь лишь о тех геодезических замкнутых кривых, которые продолжают существовать, *каким бы малым ни было* μ. Может существовать и существует бесконечное число иных. Остается обсудить один вопрос. Существование замкнутых геодезических кривых, о которых мы говорили, было установлено с помощью приближенного подсчета, ибо мы пренебрегли μ^2. Можно ли строго доказать их существование? Или, иначе, нельзя ли вывести точное доказательство существования непосредственно из нашего приближенного подсчета? Да, это можно сделать, и притом с помощью известного метода: следует лишь применить принципы, изложенные в III главе I тома моего труда «Новые методы небесной механики».

§ 4. Принцип аналитического продолжения

Пусть S и S' будут две произвольные поверхности, удовлетворяющие условиям, наложенным нами в предыдущих параграфах, которые я для сокращения назову условиями A. *Всегда можно перейти от одной поверхности к другой непрерывным способом.* Я хочу сказать, что можно предположить переменную поверхность Σ, которая в качестве общего уравнения будет иметь

$$F(x, y, z, t)=0,$$

где левая часть F является *аналитической* функцией координат x, y, z и переменного параметра t и остается аналитической по крайней мере для всех систем значений x, y, z, t, таких, что

1) t будет заключаться между 0 и 1;

2) x, y, z будут действительными;

3) F равна нулю.

1. При этом поверхность Σ преобразуется в S для $t=0$ и в S' для $t=1$.

2. Когда t изменяется непрерывным образом от 0 до 1, поверхность Σ постоянно удовлетворяет условиям A.

Таким образом, когда t непрерывно меняется между 0 и 1, поверхность Σ остается выпуклой и аналитической, а ее радиусы кривизны — заключенными в определенных пределах. Рассмотрим на этой переменной поверхности Σ геодезическую линию, удовлетворяющую какому-то определенному условию, например условию замкнутости. Пусть $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$ будут уравнения этой геодезической линии. Определим последнюю с помощью начальных значений; обозначим, например, через y_0 и z_0 значения y и z для $x=0$, так, что

$$y_0=\varphi(0), \qquad z_0=\psi(0).$$

Пусть аналогично y'_0, z'_0 будут начальными значениями dy/dx и dz/dx так, что

$$y'_0 = \varphi'(0), \qquad z'_0 = \psi'(0).$$

Эти заданные начальные величины y_0, z_0, y'_0, z'_0 достаточны для того, чтобы отличить нашу геодезическую линию от всех прочих геодезических линий, нанесенных на поверхности Σ.

Принимая это во внимание, если мы запишем теперь, что геодезическая линия замкнута, получим определенные соотношения между y_0, z_0, y'_0, z'_0, которые будут аналитическими. Итак, y_0, z_0, y'_0, z'_0 связаны с t аналитическими соотношениями; если мы будем рассматривать y_0, z_0, y'_0, z'_0, t как координаты некоторой точки в пространстве пяти измерений, то эти соотношения определят некоторую аналитическую кривую, которую я назову C. Рассмотрим одну из ветвей этой аналитической кривой, которую я назову B. Нетрудно определить эту ветвь и отличить ее от других по непрерывности. В соседстве с $t=t_0$ величины y_0, y'_0, z_0, z'_0 выражаются в виде одного или нескольких разложений, и каждое из них — по степеням $(t-t_0)^{1/q}$. Ветвь B составится из всех действительных точек кривой C, которые соответствуют одному из этих разложений; когда разложение более не будет иметь места, то ветвь будет продлена с помощью аналитического продолжения. Если q нечетно, то эта ветвь будет заключать одну и только одну точку как для $t=t_0-e$, так и для $t=t_0+e$; если q четно, то она включит две точки для $t=t_0-e$ и ни одной для $t=t_0+e$, или наоборот.

Мы скажем, что замкнутые геодезические линии, принадлежащие различным точкам одной и той же ветви B, составляют часть одного и того же *непрерывного ряда.*

Рассмотрим различные замкнутые геодезические линии одного и того же непрерывного ряда, принадлежащие одной и той же поверхности Σ. Они соответствуют точкам пересечения ветви B с плоскостью $t=t_0$. Число этих точек может изменяться лишь тогда, когда t_0 принимает такое значение, что число, обозначенное нами выше через q, будет четным. В этом случае это число изменяется на две единицы. Отсюда вытекает следствие.

Число замкнутых геодезических линий поверхности Σ, которые входят в состав одного, двух или нескольких определенных непрерывных рядов, постоянно четно или постоянно нечетно.

Рассмотрим теперь различные виды замкнутых кривых, которые можно начертить на выпуклой поверхности. С точки зрения Analysis situs эти кривые разделятся на бесконечное число *типов*, характеризуемых числом и расположением двойных точек.

Рассмотрим непрерывный ряд замкнутых геодезических линий; последние могут принадлежать к различным типам; как они могут переходить из одного типа в другой? Во-первых, *они никогда не могут иметь точки возврата*, так как геодезические линии поверхностей, удовлетворяю-

щих условиям A, не имеют никакой особой точки. Затем, никогда не может случиться, чтобы две ветви этой геодезической кривой соприкоснулись, ибо две геодезические линии не могут соприкоснуться без того, чтобы не слиться, так как точка и касательная в этой точке на выпуклой поверхности полностью определяют геодезическую линию.

Отсюда следует, что *в одном и том же непрерывном ряде число двойных точек замкнутой геодезической линии остается постоянным.* В самом деле, это число могло бы измениться двумя способами:

1) если двойная точка с действительными касательными станет изолированной точкой с мнимыми касательными, но в таком случае пришлось бы пройти через точку возврата;

2) если две двойные действительные точки становятся сопряженными мнимыми; но тогда обе ветви кривой обязательно соприкоснулись бы при переходе.

Мы видели, что все это невозможно.

Остается осветить еще один вопрос. Я указал, что две геодезические линии не смогут соприкоснуться, *если только они не сольются.* Не будет ли возможным случай, когда для некоторых значений t замкнутая геодезическая линия выродится, так как две из ее частей сольются между собой? Ясно, что это возможно. Замкнутая кривая определенного типа может, вырождаясь, свестись к замкнутой кривой другого типа, пробегаемой несколько раз. Это подобно тому, как улитка Паскаля может в пределе свестись к окружности, пробегаемой два раза. Нет основания предполагать, что подобное не может случиться с геодезической линией, и в действительности такое случается.

Если замкнутая кривая типа T может выродиться в замкнутую кривую типа T', пробегаемую несколько раз, то мы определим тип T' как *подчиненный* типу T.

Итак, предположим, что мы рассматриваем непрерывный ряд замкнутых геодезических линий, соответствующий ветви кривой B, определенной выше, и пусть M, M', M'' будут три бесконечно близкие точки этой ветви, причем M' находится между M и M''; пусть в M геодезическая линия принадлежит к типу T, а в M' она сводится к замкнутой кривой типа T', пробегаемой несколько раз, и пусть в M'' она принадлежит к типу T'', который к тому же может быть идентичным типу T. Тип T', таким образом, подчинен как T, так и T''. Можно задать вопрос, изменилось ли число двойных точек при переходе от M к M''.

Пусть t_0 будет значение t, соответствующее точке M'; положим $\tau = (t-t_0)^{1/q}$, подбирая целое число q таким образом, чтобы y_0, z_0, y'_0, z'_0 были разложимы по степеням τ. Рассмотрим одну из двойных точек нашей геодезической линии; когда t стремится к t_0, эта точка приближается к определенной точке D особенной геодезической линии типа T'. Примем эту точку за начало и выберем оси таким образом, чтобы плоскость yz не была касательной ни к какой из ветвей геодезической линии, которые проходят через эту точку. При этих условиях мы можем выразить урав-

нения какой-либо из наших ветвей геодезической линии в следующем виде:

Так как величины y и z можно разложить по степеням x и τ, то рассмотрим две из этих ветвей, и пусть

$$y=\sum \tau^m \varphi_m(x), \qquad z=\sum \tau^m \psi_m(x),$$
$$y=\sum \tau^m \varphi'_m(x), \qquad z=\sum \tau^m \psi'_m(x)$$

будут их уравнениями. Я предполагаю, что обе эти ветви сливаются при $\tau=0$; имеем, следовательно,

$$\varphi_0(x)=\varphi'_0(x), \quad \psi_0(x)=\psi'_0(x).$$

Будем искать двойные точки, т. е. точки пересечения двух ветвей. Они будут даны уравнением

$$\sum \tau^m [\varphi_m(x)-\varphi'_m(x)]=0,$$

которое к тому же влечет за собой другое уравнение

$$\sum \tau^m [\varphi_m(x)-\psi'_m(x)]=0,$$

принимая во внимание уравнение поверхности Σ.

Пусть $\varphi_p(x)-\varphi'_p(x)$ будет первым из коэффициентов $\varphi_m(x)-\varphi'_m(x')$, который тождественно не становится нулем; если τ будет стремиться к нулю, то двойные точки будут стремиться к пределам, являющимся решениями уравнения

$$\varphi_p(x)-\varphi'_p(x)=0.$$

По предположению, точка $x=0$ является одним из этих пределов; следовательно, имеем

$$\varphi_p(0)-\varphi'_p(0)=0.$$

Таким образом, наши двойные точки даны уравнением

$$\sum \tau^{m-p} [\varphi_m(x)-\varphi'_m(x)]=0,$$

первый член которого, разлагаемый по степеням x и τ, становится нулем для $x=\tau=0$; из него можно получить x в виде разложения по степеням τ, что доказывает, что x остается действительным как для $\tau>0$, так и для $\tau<0$ и, следовательно, что действительная двойная точка, находящаяся, например, в M, не может стать мнимой в M'.

Исключение может быть лишь тогда, когда производная

$$\frac{d}{dx}[\varphi_p(x)-\varphi'_p(x)]$$

станет нулем при $x=0$. Но этого не может быть; это означало бы, что две

ветви пересекаются в двух бесконечно близких точках, т. е. что точка сливается со своим собственным фокусом или может стать к нему как угодно близкой, считая расстояния по геодезической линии. Однако выше мы видели, что расстояние от точки до ее полюса по крайней мере равно

$$\frac{\pi}{2} L_2.$$

Итак, даже и в этом случае число двойных точек не может измениться.

А может ли измениться расположение двойных точек? Да, но только следующим образом: предположим, что три ветви кривой пересекаются в трех двойных точках, так что они образуют маленький треугольник; в пределе этот треугольник сведется к точке, и три двойные точки сольются в одну тройную точку; затем три двойные точки опять разделятся, и три ветви снова образуют треугольник, но с новым расположением. Если первая ветвь, пробегаемая в каком-либо определенном направлении, в случае первого расположения встретит сперва вторую ветвь, а затем третью, то при втором расположении она встретит сперва третью ветвь, а затем вторую.

Нетрудно видеть, что если ветви кривой вместо треугольника определяют многоугольник с числом сторон больше трех, то расположение двойных точек измениться не сможет, так как для этого нужно было бы, чтобы две из этих ветвей касались друг друга *. Если таким путем можно перейти от типа T к типу T', то мы скажем, что два этих *типа эквивалентны*. Существуют типы, которые не эквивалентны ни с каким другим типом; таковым является, например, тип без двойной точки. Замкнутая кривая с двойными точками разделит выпуклую поверхность на некоторое число криволинейных многоугольников, из которых некоторые могут быть двуугольниками или одноугольниками. Если ни один из этих многоугольников не является треугольником, то предыдущая процедура неприложима, и тип не эквивалентен никакому другому. Рассмотрим теперь два непрерывных ряда геодезических линий; пусть G будет геодезической линией первого ряда, G' — второго ряда; число точек пересечения G и G' не может изменяться, если только эти две геодезические линии не станут касательными друг к другу, что невозможно.

Число точек пересечения двух геодезических линий, принадлежащих к двум определенным непрерывным рядам, неизменно.

Предположим, что для t, близкого к t_0, найдено, что число q, о котором шла речь выше и которое фигурирует в выражении $(t-t_0)^{1/q}$, является четным для первого ряда и равно единице для второго ряда. Тогда для $t < t_0$ получим две геодезические линии G и G'' первого ряда и для $t > t_0$ не получим ничего. Наоборот, мы всегда получим одну геодезическую ли-

---

* Доказательство этого утверждения кажется весьма конспективным. (*Р. Г.*).

нию G' второго ряда и только одну, каким бы ни было t. Мы можем положить

$$(t-t_0)^{\frac{1}{q}}=\tau$$

и изменять τ непрерывным образом. Тогда в первом ряде мы перейдем от геодезической линии G к геодезической линии G', а во втором — мы начнем с линии G' и в конце концов вернемся к той же линии G'.

Итак, число точек пересечения G и G' будет тем же, что и число точек пересечения G и G''.

Что касается относительного расположения двойных точек G и G' и их точек пересечения, то оно может меняться исключительно тем способом, который я изложил выше, когда речь шла о расположении двойных точек одной лишь геодезической линии.

В качестве первого приложения этого принципа, изучим замкнутые геодезические линии без двойной точки; эти геодезические линии образуют, очевидно, один или несколько непрерывных рядов. В соответствии со сказанным выше, эти непрерывные ряды могут содержать лишь замкнутые геодезические линии без двойной точки.

Однако полное число замкнутых геодезических линий без двойной точки является всегда четным или всегда нечетным. Но в предыдущем параграфе мы видели, что для сфероида это число является нечетным. Более того, можно перейти от сфероида к любой выпуклой поверхности непрерывным способом.

Итак, на произвольной выпуклой поверхности всегда имеется по крайней мере одна замкнутая геодезическая линия без двойной точки и число их всегда нечетно.

Например, для эллипсоида имеем три главных сечения плоскостями симметрии.

§ 5. Устойчивость и неустойчивость [3]

Изучим теперь геодезические линии, мало отличающиеся от замкнутой геодезической линии (с двойной точкой или без нее). Для этого воспользуемся следующей координатной системой. Пусть G_0 будет замкнутой геодезической линией, O — фиксированная точка на этой линии; отложим по G_0, начиная от точки O, длину $OP=u$; в точке P проведем геодезическую линию G_1, нормальную к G_0; на G_1, исходя из P, отложим длину $PM=v$; координаты точки M будут u и v. Элемент дуги дается выражением

$$ds^2=dv^2+h^2du^2.$$

Очевидно, что $h=1$ и $dh/dv=0$ для $v=0$, каким бы ни было u. Уравнения геодезической линии будут

$$\frac{d}{du}\frac{v'}{\sqrt{v'^2+h^2}}=h\frac{dh}{dv},$$

где v' — производная от v по u. Предполагая v очень малым, чтобы разыскать геодезические линии, весьма близкие к G_0, получим

$$v'' = h''v, \tag{1}$$

где h'' — значение dh^2/dv^2 для $v=0$. Тогда — h'', представляющее кривизну поверхности в точке $(x, 0)$, является функцией u, которая к тому же периодическая, так как g_0 замкнутая.

Уравнение (1) является линейным уравнением с периодическими коэффициентами; оно имеет два замечательных решения следующего вида:

$$v = e^{\alpha u}\varphi(u), \qquad v = e^{-\alpha u}\psi(u), \tag{2}$$

где $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ периодические по u.

Здесь могут быть четыре случая:

1. α чисто мнимое число, и оба решения (2)—комплексно сопряженные. Тогда говорят, что G_0 *устойчива*.

2. α действительно и отлично от нуля, и оба решения (2) действительны. В таком случае говорят, что G_0 *неустойчива*.

3. $\alpha = \alpha' + i\pi/u$, где α' действительно, а V — полная длина G_0; в таком случае оба решения можно привести к виду $v = e^{\alpha' y}\varphi'(u)$, $v = e^{-\alpha' u}\psi_1(u)$, где функции φ_1 и ψ_1 действительные и удовлетворяют условиям

$$\varphi_1(u + U) = \varphi_1(u), \qquad \psi_1(u + U) = -\psi_1(u).$$

Также и в этом случае G_0 определяют как *неустойчивую*.

4. Может быть, что α кратно $i\pi/U$; это составляет предельный случай, который может встретиться лишь при частных допущениях, и поэтому его мы пока рассматривать не будем. Для него выражения (2) могут вырождаться и тогда в них будет фигурировать $\log U$, как это бывает в случае кратных корней у линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Исследуем сперва первый случай и пусть ρ и θ будут модуль и аргумент первого решения (2); тогда уравнение (1) будет иметь в качестве частных решений

$$v = \rho e^{i\theta}, \qquad v = \varphi e^{-i\theta},$$

а в качестве общего решения —

$$v = A\ \rho \sin(\theta - \beta), \tag{3}$$

где β и A являются постоянными интегрирования.

Пусть, в частности,

$$v_1 = \rho \sin\theta, \qquad v_2 = \rho\cos\theta,$$

тогда будет

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_1}{v_2} = B\int\frac{du}{v_2^2}, \tag{4}$$

где B — постоянная. Формула (4), где все величины, впрочем, действительны, показывает, что $\operatorname{tg}\theta$ изменяется всегда в одном направлении, например всегда возрастает; ибо, если бы tg постоянно уменьшался, то для нас достаточным было бы поменять роль двух решений (2). Следовательно, θ есть возрастающая функция u.

Предположим, что единица длины подобрана таким образом, что полная длина G_0 станет равной 2π. Что произойдет, когда u увеличится на 2π? Произойдет то, что ρ не изменится, а θ увеличится на $2\alpha\pi/i$ (это показывает нам к тому же, что α/i должно быть положительным, если мы хотим, чтобы возрастало θ).

Условившись так, назовем *приведенным аргументом* точки на замкнутой геодезической линии G_0 величину $i\theta/\alpha$. Если у нас имеется произвольная единица длины, а U — полная длина G_0, то приведенный аргумент будет $2i\pi\theta/\alpha U$. Отсюда следует, что приведенный аргумент постоянно возрастает от 0 до 2π, когда геодезическая линия пробегается полностью.

Итак, этот приведенный аргумент может служить для определения положения точки на G_0.

Вернемся к общему решению (3); оно представляет геодезическую линию G, весьма мало отличающуюся от G_0; последовательные точки пересечения G и G_0 даются формулой

$$\theta=\beta+k\pi,$$

где k — произвольное целое число.

Итак, k-м фокусом точки $\theta=\beta$ будет точка $\theta=\beta+k\pi$; отсюда вытекает следствие: *приведенные аргументы точки и ее k-го фокуса отличаются на постоянную и положительную величину*

$$\frac{ki\pi}{\alpha}\cdot\frac{2\pi}{U}.$$

Приведенный анализ не отличается от анализа в п. 347 тома III «Новых методов небесной механики»*. В п. 349 я рассмотрел неустойчивые решения и показал, что их можно разделить на три категории:

1. α действительно, а $\varphi(u)$ никогда не становится нулем (неустойчивые решения первой категории). Тогда будем иметь

$$e^{-2\alpha u}\frac{\psi(u)}{\varphi(u)}=B\int\frac{du}{e^{-2\alpha u}\varphi^2(u)},$$

откуда видно, что первый член, всегда конечный и возрастающий, может стать нулем лишь один раз; поскольку же $e^{-2\alpha u}$ не становится нулем, то и $\psi(u)$ может стать нулем лишь один раз. А так как $\psi(u)$ является

---

* См. выше, настоящий том. (*Прим. ред.*).

периодической, то $\psi(u)$ никогда не станет нулем. Общее решение (1) будет опять-таки иметь вид

$$v = e^{\alpha u}\varphi(u) B \int \frac{du}{e^{-2\alpha u}\varphi^2(u)}, \tag{5}$$

а это показывает, что v может стать нулем лишь один раз; *ни одна точка* G_0 не имеет, следовательно, фокуса.

2. α является действительным, а $\varphi(u)$ становится нулем (неустойчивые решения второй категории).

Формула (5) показывает нам, что, поскольку интеграл в правой части всегда возрастает и становится бесконечным (когда φ становится нулем), между двумя последовательными нулями $\varphi(u)$ есть один и только один нуль v.

В частности, между двумя нулями $\varphi(u)$ есть один и только один нуль $\psi(u)$. Если теперь $u_0, u_1, u_2 \ldots$ — последовательные нули $\varphi(u)$, то значения $\psi(u_0)$, $\psi(u_1)$, $\psi(u_2)$, ... будут попеременно положительными и отрицательными; однако, так как функция $\psi(u)$ периодична, то она должна возвратиться к прежнему значению после полного оборота по G_0. Итак, *число нулей* $\varphi(u)$ *всегда четно*. Пусть, следовательно,

$$u_0, \; u_1, \; u_2, \; \ldots, \; u_n$$

— последовательные нули $\varphi(u)$ (n — четное). Каждая точка, находящаяся между u_0 и u_1, будет иметь фокус между u_1 и u_2, и, когда аргумент точки будет возрастать от u_0 до u_1, аргумент ее фокуса будет *постоянно* расти от u_1 до u_2; ибо, если бы он перестал возрастать, это означало бы, что одна и та же точка имеет несколько фокусов, что невозможно.

Предположим, что α будет положительным; тогда для u положительного и очень большого v будет пропорционально $e^{\alpha u}\varphi(u)$; для u отрицательного и очень большого v будет пропорционально $e^{\alpha u}\psi(u)$.

Фокусы положительного и очень большого порядка будут, следовательно, весьма близкими к одному из нулей $\varphi(u)$.

Фокусы отрицательного и очень большого порядка будут весьма близки к одному из нулей $\psi(u)$.

Пусть теперь

$$u'_0, \; u'_1, \; \ldots, \; u'_n$$

будут последовательные нули $\psi(u)$, при u'_0 заключающиеся между u_0 и u_1.

Пусть M_i и M'_i будут точки G_0, соответствующие u_i и u'_i. Пусть F_0 — произвольная точка, расположенная между M_0 и M'_0, а k-й ее полюс будет F_k. Тогда для $k < n$ F_k будет заключаться между M_k и M'_k; отсюда следует, что F_n заключено между M_0 и M'_0; я буду говорить — между M_0 и F_0. Если бы в действительности F_n было заключено между M_0 и F_0, F_{2n} было бы заключено между M'_0 и F_n и, следовательно, между

M'_0 и F'_0; вообще F_{kn} было бы заключено между M'_0 и F_0. Следовательно, F_{kn} не могло бы стремиться к одному из нулей $\varphi(u)$, когда k стремится к $+\infty$. Следовательно, точки

$$F_n,\ F_{2n},\ \ldots,\ F_{kn},\ \ldots.$$

заключены между M'_0 и F_0 и, когда k возрастает непрерывно и неограниченно, они непрерывно и неограниченно приближаются к M'_0. Нули $\varphi(u)$ и нули $\psi(u)$ можно, следовательно, назвать *предельными фокусами*. Таким является закон распределения фокусов для замкнутых неустойчивых геодезических линий второй категории.

3. Наконец, α может иметь вид $\alpha' + i\pi/u$, причем α действительно (неустойчивые решения третьей категории).

В соответствии с тем, что мы видели в п. 359 «Новых методов. . .», эти решения обладают теми же свойствами, что и решения второй категории. В соответствии с изложенным выше, имеем два решения вида

$$v = e^{\alpha' u}\varphi_1(u), \qquad v = e^{-\alpha' u}\psi(u),$$

причем

$$\varphi_1(u+U) = -\varphi_1(u),\ \ \psi_1(u+U) = -\psi_1(u)$$

и общее решение записывается

$$v = e^{\alpha' u}\varphi_1(u)\, B \int \frac{du}{e^{-2\alpha' u}\varphi_1^2(u)}. \tag{5}$$

Мы видим, что $\varphi_1(u)$ должно стать нулем, так как эта функция меняет знак, и что между двумя нулями $\varphi_1(u)$ есть один нуль $\psi_1(u)$, и притом только один.

То, что мы сказали относительно распределения последовательных фокусов и их связи с нулями φ и ψ (роль которых играют здесь нули φ_1 и ψ_1), остается без изменения; единственное различие заключается в том, что *число нулей $\varphi_1(u)$ вместо того, чтобы быть всегда четным, будет всегда нечетным*.

В самом деле, функция $\psi_1(u)$ не должна возвращаться к исходному значению, а, наоборот, менять знак при полном обходе по G_0.

В случае выпуклых поверхностей каждая точка имеет фокус, расстояние от которого до этой точки ниже заданного предела; следовательно, неустойчивые замкнутые геодезические линии первой категории отсутствуют; наоборот, они имеются для поверхностей отрицательной кривизны * [4].

---

* Это свойство было указано без доказательства К. Г. Я. Якоби (Лекции по динамике, М.—Л., 1936, гл. 4). Оно легко выводится из формулы О. Бонне. См. по этому поводу: J. Hadamard. J. Math. pures et appl., 5e série, 1898, 4, 50; Selecta. Jubilé scientifique de M. Jacques Hadamard. Paris, Gauthier-Villars, 1935, p. 189 et saiv. (*Р. Г.*).

В п. 355 «Новых методов небесной механики» я показал, что необходимое и достаточное условие для того, чтобы замкнутая траектория соответствовала минимуму действия, заключается в том, что она должна быть неустойчивой первой категории. Из этого следует, что на выпуклой поверхности отсутствует такая замкнутая геодезическая линия, которая была бы короче всех замкнутых бесконечно близких кривых. Это нетрудно установить и непосредственно.

Рассмотрим эллипсоид и три его основных эллипса; наименьший и наибольший являются устойчивыми замкнутыми геодезическими линиями; средний же представляет собой неустойчивую замкнутую геодезическую линию второй категории. На однополостном гиперболоиде эллипс горловины является неустойчивой замкнутой геодезической линией первой категории.

Нетрудно видеть (п. 378), что если две замкнутые геодезические линии совпадут, чтобы затем исчезнуть, становясь мнимыми (если изменять непрерывным образом параметр, обозначенный нами в предыдущем параграфе t), то одна из них будет устойчивой, а другая — неустойчивой. Откуда следует, что в одном и том же непрерывном ряде превышение числа устойчивых геодезических линий над числом неустойчивых постоянно. Однако мы видели, что замкнутые геодезические линии без двойной точки образуют один или несколько непрерывных рядов, и, с другой стороны, всегда можно перейти непрерывным образом от произвольной выпуклой поверхности к какой-либо другой.

Итак, *если на произвольной выпуклой поверхности рассмотрим все замкнутые геодезические линии без двойных точек, то превышение числа устойчивых линий над числом неустойчивых постоянно*, следовательно, оно то самое, что и для эллипсоида, и равно единице.

Итак, на выпуклой поверхности всегда есть по меньшей мере одна устойчивая замкнутая геодезическая линия без двойной точки.

Заметим, что α, называемое *характеристическим показателем* G_0, полностью определяется описанным образом. Можно было бы думать противоположное, ибо, если U является полной длиной G_0, то имеем

$$e^{\alpha u}\varphi(u) = e^{\left(\alpha+2\frac{i\pi}{U}\right)u}\left[\varphi(u)\,e^{-\frac{2i\pi u}{U}}\right],$$

где $\varphi(u)\,e^{2i\pi u/U}$ так же, как и $\varphi(u)$, является периодической функцией. Следовательно, как будто можно заменить α через $\alpha+2i\pi/U$ или через $\alpha+$ $+2ki\pi/U$ (где k — целое положительное или отрицательное). Но в случае неустойчивых геодезических линий только одна из величин $\alpha+2ki\pi/U$ является действительной, ее и следует выбрать.

В случае устойчивых геодезических линий α полностью определяется условием, что аргумент θ увеличивается на $\alpha U/i$, когда полностью пробегается геодезическая линия G_0. Другое замечание: рассмотрим неустойчивую геодезическую линию второй или третьей категории; она войдет в состав непрерывного ряда в смысле § 4. Я утверждаю, что число нулей

$\varphi(u)$, от которого зависит, как мы убедились, закон распределения фокусов, остается постоянным; это число могло бы меняться лишь при одновременном равенстве нулю $\varphi(u)$ и $\varphi'(u)$, что невозможно. Непрерывный ряд можно разделить на *отрезки* таким образом, что, например, в одном отрезке все геодезические линии будут устойчивыми, в следующем — неустойчивыми, в следующем — устойчивыми и т. д. В тех точках, в которых происходит переход от одного отрезка к другому, характеристический показатель является кратным $i\pi/U$. Итак, *в одном и том же отрезке одного и того же непрерывного ряда число ограниченных фокусов неизменно.*

В случае неустойчивых геодезических линий есть несколько способов определения показателя α; мы можем, как мы это делали до сих пор, предположить, что α действительно для линий первой и второй категории, тогда как для линий третьей категории мнимая часть α предполагается равной $i\pi/U$. Но можно исходить и из другого решения.

Можно предположить, что мнимая часть α равна $ni\pi/U$, где n — число нулей $\varphi(u)$ (или φ_1); следующий пример поможет понять причины, оправдывающие такое допущение.

Рассмотрим поверхность

$$x^2+y^2+\frac{q^2z^2}{4}-\frac{q_1z^2x}{4}=1$$

где q и q_1 – две постоянные величины.

Эта поверхность выпуклая и замкнутая, если q_1 достаточно мало, так как она очень мало отличается от эллипсоида вращения

$$x^2+y^2+\frac{q^2z^2}{4}=1.$$

Она допускает замкнутую геодезическую линию, которая является окружностью

$$z=0, \quad x^2+y^2=1.$$

Если для этой окружности мы выразим x и y в функции от дуги u, то найдем

$$x=\cos u, \quad y=\sin u.$$

Уравнение геодезических линий, бесконечно мало отличающихся от этой окружности, будет

$$v''=\frac{1}{4}(q^2-q_1\cos u)\,v=0.$$

Мы узнаем уравнение, которое служило предметом многочисленных работ («Новые методы небесной механики», т. II, гл. XVII); здесь приняты те же обозначения, что и в главе XVII, следует лишь заменить x на v, а $2t$ — на u. Роль показателя α будет той же, какую играло в упомянутой

работе количество $ih/2$. Если теперь q_1 мало, то приближенно получим

$$\alpha = \frac{iq}{2}.$$

К тому же, α является мнимым, а геодезическая линия устойчива, если только q не близко к целому числу.

Если q близко к целому числу n таким образом, что на рисунке на стр. 543 (цит. выше работа) точка с координатами q, q_1 находится в одной из заштрихованных областей, то геодезическая линия неустойчива. В соответствии с п. 352 в т. III «Новых методов небесной механики» она всегда будет относиться ко второй или третьей категории.

Каким же будет число нулей $\varphi(u)$ или $\varphi_1(u)$? Достаточно заметить, что на одной из кривых, ограничивающих заштрихованные области (п. 352), функция φ или φ_1 будет нечетной и в основном сводится (по причине малости q_1) к $\sin qu/2$ или к $\sin nu/2$, ибо q весьма близко к n.

Число нулей $\varphi(u)$ или $\varphi_1(u)$ равно, следовательно n, а число предельных фокусов — $2n$, из которых n соответствуют нулям $\varphi(u)$ и n — нулям $\psi(u)$. Это показывает нам:

1) что существуют поверхности, которые допускают неустойчивые замкнутые геодезические линии второй и третьей категории, причем число предельных фокусов может быть произвольным;

2) что если желательно, чтобы α была непрерывной функцией, то следует взять в качестве ее мнимой части $ni\pi/U$, где $2n$ будет числом предельных фокусов.

6. О некоторых типах замкнутых геодезических линий

Пусть G_0 будет устойчивая замкнутая геодезическая линия, полная длина которой равна U и которая принадлежит некоторому непрерывному ряду. Пусть α будет ее характеристическим показателем. Ясно, что U и α являются непрерывными функциями параметра, который обозначен нами в § 1 через t и соответствует этому непрерывному ряду.

Предположим, что для определенного значения t, например для $t = t_0$, произведение α будет соизмеримо с $i\pi$, например будет равно $2mi\pi/n$, где m и n — два целых взаимно простых числа. Приведенные аргументы какой-либо точки и ее k-го фокуса отличаются на $\pi nk/m$, и это показывает, что каждая точка нашей геодезической линии G_0 совпадает со своим $2m$-м фокусом. Если будем рассматривать точку M на G_0 и геодезическую линию, выходящую из точки M и бесконечно близкую к G_0, то увидим, что она опять пройдет в бесконечной близости весьма высокого порядка к M, после того как пересечет G_0 $2m$ раз (включая точку M). Таким образом, она обойдет n раз геодезическую линию C_0. Принципы, изложенные в главе XXVIII «Новых методов небесной механики», дают нам возможность объяснить этот результат. Кроме геодезической линии G_0, существуют

еще две другие замкнутые геодезические линии G_1 и C'_1, обладающие следующими свойствами:

1) для $t < t_0$, например, эти две геодезические линии не существуют или, вернее, являются мнимыми;

2) для $t > t_0$ обе они действительны;

3) для $t = t_0$ они сливаются друг с другом и сводятся, как одна так и другая, к геодезической линии G_0, пробегаемой n раз;

4) они принадлежат одному и тому же непрерывному ряду;

5) одна из них устойчива, а вторая неустойчива.

Соотношения между G_1 и C'_1 с G_0 являются теми же самыми, как и те, с которыми мы встречаемся в небесной механике, — между периодическими решениями второго и третьего сорта и решениями второго сорта или между решениями второго рода и решениями первого рода. Непрерывный ряд S_1, к которому принадлежат G_1 и G'_1, можно рассматривать в качестве *порожденного* рядом S_0, к которому принадлежит G_0; поскольку произведение αU, изменяясь непрерывным образом, пройдет бесконечное число раз через значения, соизмеримые с $i\pi$, ряд S_0 породит бесконечность других непрерывных рядов. И так как одна из двух геодезических линий G_1 и G'_1 устойчива, ряд S_1, в свою очередь, породит таким же образом бесконечное число других рядов.

Мы видели, что всегда есть устойчивая замкнутая геодезическая линия без двойной точки. Обозначим ее G_0. Предположим, что она порождает, как мы только что объяснили, две другие замкнутые геодезические линии G_1 и G'_1; пусть $2mi\pi/n$ будет соответствующим значением αU. Для значений t, весьма близких к t_0, эти две геодезические линии будут очень мало отличаться от G, и мы получим их приближенные уравнения, обратившись к вычислениям предыдущего параграфа; тогда мы найдем (используя уравнения (3) предыдущего параграфа), что

$$v = A\rho \sin(\theta - \beta) \qquad \text{для} \quad G_1,$$

$$v = A'\rho \sin(\theta - \beta') \qquad \text{для} \quad G'_1,$$

где A, β, A', β' постоянные величины.

Точка пересечения G_0 и G_1, например, задается формулой

$$\theta = \beta + k\pi, \qquad (k \text{ — целое})$$

а соответствующие значения приведенного аргумента — выражением

$$\frac{2i\pi\beta}{\alpha U} + \frac{k\pi 2i\pi}{\alpha U} = \frac{n\beta}{m} + \frac{n}{m} k\pi.$$

Сколько различных значений может принимать выражение nk/m, если два значения не считаются различными, когда они отличаются на целое четное число? Очевидно, $2m$; итак, *число точек пересечения G_0 с G_1 и, следовательно, с любой геодезической линией ряда S_1, равно $2m$.*

Определим теперь число двойных точек. Предположим, что дана замкнутая геодезическая линия G_1, разделенная на $2m$ дуг при помощи своих $2m$ точек пересечения с G_0; эти дуги будут попеременно с одной и с другой стороны G_0; отсюда следует, что дуга четного ранга не может пересечь дугу нечетного ранга, но две дуги четного ранга или две дуги нечетного ранга могут пересечь друг друга.

Я замечаю затем, что v, равное действительной части $e^{\alpha u}\varphi(u)$, является однозначной функцией от u_1, так что двойные точки будут соответствовать тем значениям u, для которых будем иметь

$$v(u)=v(u+2k\pi), \tag{1}$$

где k — целое число, и других двойных точек быть не может. Мы получим, наконец,

$$\frac{v(u+2k\pi)}{v(u)}=B\int\frac{du}{v^2u},$$

так как $v(u)$ и $v(u+2k\pi)$ являются двумя интегралами линейного уравнения (1) предыдущего параграфа, что показывает, что отношение этих двух интегралов постоянно возрастает или постоянно уменьшается. Между двумя последовательными нулями $v(u)$, которые соответствуют значениям $+\infty$ и $-\infty$ этого отношения, оно примет, следовательно, один и только один раз значение, равное нулю, и один и только один раз значение, равное единице. Между двумя последовательными точками пересечения G_0 и ветви $v(u)$ геодезической линии G_1 (точками, заданными уравнением $v(u)=0$), будет одна точка пересечения G_0 и ветви $v(u+2k\pi)$ геодезической линии G_1 (точка, данная уравнением $v(u+2k\pi)=0$) и притом только одна. Кроме того, будет одна двойная точка, данная уравнением (1), и притом только одна.

Это дает нам возможность перенумеровать двойные точки. Дадим целому числу k определенное значение и будем изменять u от 0 до $2n\pi$; мы получим при этом $2m$ точек пересечения G_0 с ветвью $v(u)$, принадлежащей G_1; это даст нам $2m$ двойных точек. Давая теперь K значения 1, 2, ..., $n-1$, получим всего $2m(n-1)$ двойных точек. Но каждая двойная точка была просчитана дважды, так как, меняя u и k на $u+2k\pi$ и $n-k$, получаем в результате одно и то же.

Следовательно, полное число двойных точек геодезической линии G_1, которая бесконечно мало отличается от G_0, и соответственно, всех замкнутых геодезических линий ряда S_1, равно $m(n-1)$.

Для $n=1$ мы получаем замкнутые геодезические линии без двойных точек. Для $n=2$ устанавливаем следующее обстоятельство: различные дуги G_1 делят поверхность на $m+2$ областей, из которых m являются криволинейными двусторонними многоугольниками, а две — криволинейными многоугольниками с m сторонами. Если m не равно трем, то ни один из этих многоугольников не является треугольником, так что, в соответствии со сказанным в § 4, расположение двойных точек не может изме-

няться, если пробегать ряд S_1 непрерывным образом; *все геодезические линии этого ряда принадлежат, следовательно, к единому виду.*

Может показаться, что при $m=3$ существует исключение и что возможны два вида, представленные на рис. 1 и 2; однако расположение на рис. 2 невозможно. В самом деле, кривая рис. 2 ограничивает четыре области A, B, C, D; область D — это треугольник с углами, равными α, β, γ; полная кривизна D равна $\alpha+\beta+\gamma-\pi$; подобно этому полная кривизна областей A, B, C равна соответственно $\alpha+\pi$, $\beta+\pi$, $\gamma+\pi$, так что

$$A+B+C > D+4\pi > 4\pi,$$

где каждая из больших букв обозначает полную кривизну соответствующей области. Это означает, что общая кривизна трех объединенных областей A, B, C будет больше, чем кривизна всей поверхности; это очевидно, абсурдный результат.

Возьмем теперь геодезическую линию G_1 ряда S_1, которая может уже значительно отличаться от G_0. Рассмотрим соответствующее произведение αU и предположим, что оно проходит через значение $2m_1 i\pi/n_1$, соизмеримое с $i\pi$. В соответствии с тем, что мы видели, ряд S_1 породит другой ряд S_2; пусть G_2 будет одной из геодезических линий этого ряда, а именно, например, той, которая весьма мало отличается от геодезической линии G_1, пройденной n_1 раз. Очевидно, что она встретит G_0 в $2mn_1$ точках. А в скольких точках встретит она G_1? Точки пересечения будут двух сортов. Во-первых, каждой двойной точке G_1 будут соответствовать $2n_1$

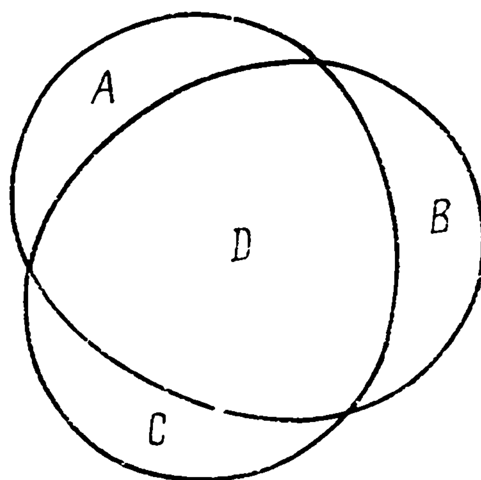


Рис. 1

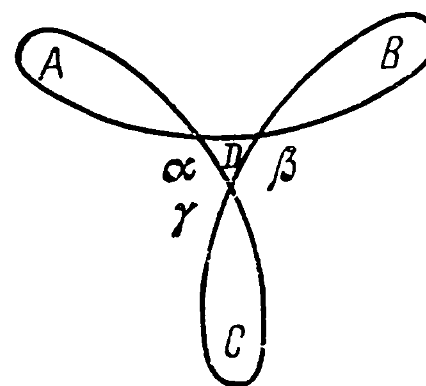


Рис. 2

точек пересечения. В самом деле, через каждую двойную точку будут проходить две ветви G_1; пусть это будут E и B'. Тогда B встретит n ветвей G_2, очень мало отличающихся от B', а B' встретит n_1 ветвей G_2, очень мало отличающихся от B. Таким образом, мы получим $2mn_1(n-1)$ точек пересечения. Сюда следует добавить $2m_1$ точек пересечения G_2 с соответствующей ветвью G_1, следовательно, всего точек

$$2mn_1(n-1)+2m_1.$$

Сколько же двойных точек будет иметь G_2? Каждая двойная точка G_1 нам даст сперва n_1^2 двойных точек G_2, так как у нас есть n_1 ветвей, весьма мало отличающихся от B, которые пересекают в n_1^2 точках n_1 ветвей, мало отличных от B'; затем мы имеем $m_1(n_1-1)$ двойных точек, полученных из уравнений, аналогичных (1), а всего точек —

$$mn_1^2(n-1)+m_1(n_1-1).$$

Таким образом, G_2 *и, следовательно, все геодезические линии ряда* S_2, *пересекут* G_0 *в* $2mn$ *точках,* G_1 — в $2mn_1(n+1)+2m_1$ *точках и будут* иметь $mn_1^2(n-1)+m_1(n-1)$ *двойных точек.*

Существует другая величина, которая остается неизменной во всех геодезических линиях одного и того же ряда: это полная кривизна области, ограниченной геодезической линией; для случая замкнутой кривой без двойной точки это будет 2π; для случая, показанного на рис. 1, это 4π, считая A, B и C один раз, а D — два раза, в соответствии с обычными условиями.

§ 7. Существование замкнутой геодезической линии

Выше мы видели, что всегда существует по крайней мере одна замкнутая геодезическая линия без двойной точки *. Хотя доказательство и не оставляет желать ничего большего с точки зрения простоты, я все же полагаю, что должен предложить здесь и второе, хотя значительно менее простое.

Пусть дана замкнутая геодезическая линия без двойной точки. Она разделит поверхность на две области, и полная кривизна каждой из этих двух областей будет равна 2π. Рассмотрим теперь все замкнутые кривые без двойных точек, которые разделят поверхность на две области, полная кривизна которых будет 2π. Длина одной из этих замкнутых кривых не может стать меньше всякой заданной величины; ибо если бы эту кривую можно было свести к бесконечно малому контуру, полная кривизна одной из областей, ограниченных таким контуром, сама стала бы бесконечно малой.

Среди этих кривых есть, таким образом, одна самая короткая, и я утверждаю, что это и есть геодезическая линия.

Чтобы понять сущность доказательства, ограничимся вначале его наброском.

Пусть C будет произвольная замкнутая кривая, а R — одна из областей, ограниченных G; пусть, затем

$$U=\int ds, \qquad \Omega=\int\frac{d\omega}{\rho}$$

---

* См. § 5.

будет общая длина C и полная кривизна R; в этих формулах ds обозначает элемент дуги C, $d\omega$ — элемент поверхности R, а ρ — произведение двух главных радиусов кривизны.

Рассмотрим кривую C', очень мало отличающуюся от C и ограничивающую область R'; пусть ζ будет расстояние между этими кривыми, отсчитываемое по нормали к C, $U+\delta U$ — длина C', а $\Omega+\delta\Omega$ — полная кривизна R'; тогда будут иметь место формулы:

$$\delta U=\int \gamma\zeta dS, \qquad \delta\Omega=\int \frac{\zeta ds}{\rho},$$

где γ представляет геодезическую кривизну C. Мы поставили себе в качестве условия $\Omega=2\pi$ и хотим, чтобы U было минимумом; следовательно, должно иметь место

$$\delta U=0; \qquad \delta\Omega=0;$$

эти два уравнения должны, следовательно, быть эквивалентными, т. е. должно выполняться соотношение

$$\gamma=\frac{K}{\delta},$$

где K — константа.

Но для произвольной замкнутой кривой C, ограничивающей область R, имеет место формула

$$\int \gamma\delta s=\Omega-2\pi.$$

В нашем случае $\Omega=2\pi$, откуда

$$K\int \frac{ds}{\rho}=0.$$

Так как поверхность выпукла, то ρ существенно положительно, и интеграл $\int \frac{ds}{\rho}$ не может стать равным нулю. Итак, будем иметь

$$K=0, \qquad \gamma=0,$$

а это означает, что *кривая C является геодезической линией.*

Рассмотрим теперь замечания, которые можно было бы сделать по поводу неполноты рассуждения. Рассмотрим множество замкнутых аналитических кривых C, без двойных точек, ограничивающих области R полной кривизны 2π. Очевидно, что длина этих кривых имеет нижний предел; но можно усомниться в том, будет ли в действительности достигнут этот предел, а если будет, то достигается ли он на кривой, входящей в наше множество.

А та кривая, для которой был бы достигнут минимум, будет ли она аналитической, так чтобы к ней можно применить правила вариационного исчисления?

А если она будет аналитической, то лишена ли она двойных точек или же может случиться, что, будучи бесконечно близкой к кривым без двойных точек, она сама имеет особые точки, в которых соприкасаются две из ее ветвей?

В действительности здесь перед нами два различных замечания.

Первое — аналитического порядка; его мы встречаем во всех аналогичных задачах; несмотря на его важность, я не буду его рассматривать, а ограничусь тем, что отошлю к недавним работам Д. Гильберта [5].

Второе, так сказать, физического порядка; оно относится к той задаче, которой мы сейчас занимаемся, и мы попробуем исследовать этот вопрос по возможности глубже.

Для того чтобы лучше понять суть дела, мы дадим физическое конкретное истолкование нашей задачи. Предположим сперва, что в некотором сосуде, частично деформируемом, находится газ. Газ этот производит на стенки сосуда давление, которое стремится увеличить объем сосуда; работа, выполненная давлением газа, зависит от изменения объема сосуда. Вместо газа мы можем предположить некоторую жидкость, сжимаемую подобно газу, но такую, что давление связано с объемом не законом Мариотта, но каким-то произвольным соотношением. Тогда виртуальная работа давления для произвольной виртуальной деформации сосуда будет равна $p\delta V$, где p — обозначает давление газа, которое должно быть постоянным, а δV — виртуальное приращение объема.

Если сосуд подвержен лишь определенным деформациям, то равновесие будет достигнуто, когда объем будет максимальным, в предположении, что все возможные деформации происходят без сопротивления. Если, наоборот, некоторые силы противодействуют деформации сосуда, то, обозначив виртуальную работу этих сил δW, получим условие равновесия в виде

$$p\delta V + \delta W = 0.$$

Предположим теперь, что наш сосуд ограничен: 1) нашей выпуклой поверхностью S; 2) другой выпуклой поверхностью S', бесконечно мало отличающейся от S и такой, что расстояние между двумя поверхностями, отсчитываемое по нормали к S, равно ε/ρ, где ε — бесконечно малая постоянная, а ρ — произведение радиусов кривизны; 3) бесконечно узкой лентой, края которой опираются на S и S' (эта лента примыкает по форме к замкнутой кривой C таким образом, что сосуд оказывается равным бесконечно тонкому промежутку, заключенному между областью S, которую мы обозначили через R, и соответствующей областью для S'). Объем сосуда будет в таком случае выражен интегралом

$$\int \frac{\varepsilon}{\rho}\, d\omega = \varepsilon\Omega.$$

Будем предполагать, что наша лента в большей или меньшей степени сопротивляется растяжению, но что она может изгибаться без сопротив-

ления; ее ширина, по предположению, будет несколько больше, чем самое большое значение ε/ρ таким образом, что ее края прилегают к поверхностям S, S' и как бы *склеиваются* с ними вследствие давления жидкости.

Давление жидкости будет стремиться удлинить ленту, вследствие чего лента будет сопротивляться растяжению, т. е. появится то, что называют натяжением ленты. Это натяжение постоянно вдоль всей длины ленты, так как давление жидкости нормально к ленте. Обозначим натяжение через T. Тогда

$$\delta W = -T\delta U,$$

где U — полная длина ленты, т. е. кривой C. Уравнение равновесия запишется в виде

$$p\varepsilon\delta\Omega = T\delta U.$$

Если нить нерастяжима, т. е. если очень малое увеличение U вызовет очень большое возрастание T, то длина U постоянна, и ее следует рассматривать как одну из данных нашей задачи, а равновесие будет достигнуто, когда Ω станет максимумом.

Если, наоборот, жидкость несжимаема, т. е. весьма малое уменьшение объема приводит к очень большому возрастанию p, то Ω постоянно и может рассматриваться как данное задачи (как в том случае, который занимал нас, когда $\Omega = 2\pi$), а равновесие достигается, когда U становится минимумом.

Рассмотрим очень малый сегмент ds ленты, ограниченный сторонами AB и $A'B'$. Все обстоит так, как если бы лента была разрезана по AB и $A'B'$ и находилась под действием двух сил, из которых одна приложена в середине AB, а другая — в середине $A'B'$, и которые представляют: одна — действие части ленты, расположенной вне AB, а другая — действие части ленты, расположенной за $A'B'$. Эти силы представляют собой не что иное, как натяжение ленты. Они, следовательно, равны по величине и равны T и должны уравновесить давление, производимое жидкостью на сегмент $ABA'B'$. Спроектируем все силы на нормаль к кривой C в плоскости, касательной к поверхности S. Проекция давления жидкости будет равна $p\varepsilon/\rho$, проекция напряжения — $Td\alpha$, где $d\alpha$ — угол геодезического вращения линии C. Тогда получим

$$\frac{p\varepsilon}{\rho}\,ds = Td\alpha.$$

Так как T, p и ε постоянные, то мы видим, что отношение геодезической кривизны $d\alpha/ds$ к $1/\rho$ должно быть постоянным; таким образом, мы получим в иной редакции тот же результат, что и выше.

Очевидно, некоторое равновесие достигается. При равновесии C будет замкнутой геодезической линией, если только (именно здесь мы встречаемся с затруднением, о котором речь шла выше) два отрезка ленты не склеятся друг с другом. В этом случае две части ленты, склеенные таким

образом, оказались бы под давлением жидкости с двух сторон, так что в результате действие этого давления исчезало бы.

И в таком случае уравнение равновесия для рассматриваемой части ленты было бы записано в виде

$$Td\alpha=0,$$

так что при нулевом угле геодезического вращения эта часть ленты примет форму геодезической линии.

Таким образом, мы должны различать *свободные части* ленты, которые должны удовлетворять условию

$$\rho\frac{dx}{ds}=\text{const},$$

и *склеенные части*, которые сводятся к дугам геодезических линий. Что же произойдет теперь в точках стыка? Я утверждаю, что различные части ленты должны касаться друг друга, т. е. подходить друг к другу под нулевым углом, так что на ленте не будет угловой точки.

Действительно, пусть BAC, EDF — два отрезка ленты, причем часть AB приложена к ED. Нам известно, что напряжение постоянно вдоль AB, так же, как и вдоль AC, ED и DF, но мы не знаем, совпадает ли оно, например, на AC и на AB.

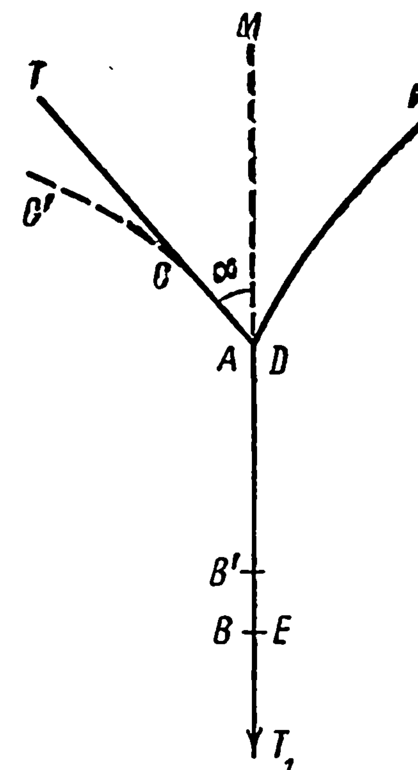


Рис. 3

Однако нетрудно установить, что это так. Отрезок BAC находится в равновесии под действием двух напряжений CT и ET_1, приложенных к двум его концам, под действием давления жидкости и под действием, производимым отрезком DE на отрезок AB, к которому он приложен. Это действие (равное, с точностью до знака, реакции, приложенной со стороны отрезка AB к DE) нормально к AB, ибо оба отрезка, хотя и приложены один к другому, могут свободно скользить один по другому. Предположим теперь, что отрезок BAC смещается, чтобы перейти в $B'AC'$ (т. е. скользит, проходя через неподвижную точку A); сумма виртуальных работ при этом должна равняться нулю. Но работа давления и работа реакции DE на AB равны нулю, так как эти силы нормальны к отросткам, на которые они действуют. Работы двух напряжений будут, следовательно, равны и иметь противоположные знаки, для чего необходимо, чтобы оба напряжения CT и BT были равны, а это и требовалось доказать.

Предположим теперь, что дуги AC и AB очень малы; пусть AM будет продолжением касательной в A к AB; пусть α — угол, образуемый CT с AM. Спроектируем на перпендикуляр к AM все силы, действующие на ABC. Давления будут пренебрежимыми, так как дуги очень малы, и, следовательно, отрезок BAC должен оказаться в равновесии под дей-

ствием двух напряжений и реакции DE на AB; итак, необходимо (так как напряжения равны), чтобы эта реакция была направлена по биссектрисе угла, образуемого напряжениями, т. е. чтобы она составляла с перпендикуляром к AB угол $\alpha/2$, но она нормальна к AB. Следовательно, угол α равен нулю, что и следовало доказать.

Таким образом, лента образует кривую без угловой точки и вдоль этой кривой напряжение T постоянно.

Следовательно, полная кривизна R будет опять-таки

$$\frac{p\varepsilon}{T}\int\frac{ds}{\rho}+2\pi,$$

где интеграл распространен на всю свободную часть ленты; тогда мы получим

$$\frac{p\varepsilon}{T}\int\frac{ds}{\rho}=0,$$

а это означает опять-таки, что $\rho=0$ или, иначе говоря, геодезическая кривизна повсюду равна нулю, т. е. что вся лента везде имеет форму замкнутой геодезической линии.

Если теперь AB и A_1B_1 будут две части ленты, склеенные одна с другой, и если AC и A_1C_1 — свободные части ленты за A и A_1, а BD и B_1D_1 — свободные части ленты за B и B_1, то все эти части должны принадлежать к одной и той же геодезической линии. Итак, AC является аналитическим продолжением AB, а A_1C_1 — аналитическим продолжением A_1B_1, что абсурдно, так как, по предположению, AB совпадает с A_1B_1, а AC не совпадает с A_1C_1. Следовательно, предположение, что две части ленты склеиваются друг с другом, следует отбросить.

Подобно этому мы должны отбросить и предположение, что две части ленты соприкоснутся в одной точке, ибо мы видели, что две геодезические линии не могут быть касательными друг к другу.

Следовательно, равновесие будет достигнуто лишь тогда, когда лента примет форму замкнутой геодезической линии без двойной точки.

§ 8. Исследование минимума

Кривая C, имеющая минимальную длину, должна, в соответствии со сказанным выше, свестись к геодезической линии; однако это условие, хотя и необходимое, не является достаточным; оно относится к первой вариации, а то, которое мы будем исследовать, относится ко второй.

Пусть C будет рассматриваемая кривая, которая представлена на рисунке как $AMBNEPA$. Предположим, что существует кривая AM_1BN_1E,

бесконечно мало отличающаяся от первой и подобно ей удовлетворяющая условию

$$\text{Геодезическая кривизна} = \frac{K}{\rho},$$

где K — постоянная, которая может иметь не то же значение, что для кривой C (т. е. значение нуль).

Я предполагаю, кроме того, что полная кривизна бесконечно малой области AM_1BMA будет равна полной кривизне области $BNEN_1B$ таким образом, что обе замкнутые кривые $AMBNEPA$ и AM_1BN_1EPA ограничивают области одной и той же полной кривизны.

Я рассматриваю углы, под которыми кривые $AMBNE$ и AM_1BN_1E пересекаются в A, B и E как бесконечно малые первого порядка, и замечаю сначала, что разность длин обеих кривых есть бесконечно малая третьего порядка.

Возьмем на AM_1B и AP две точки A'' и A', соседние с A, но не бесконечно близкие к ней (я предполагаю их просто достаточно близкими, чтобы геодезические линии, соединяющие их, будучи очень близкими к C, оставались кратчайшим путем от одной точки до другой) и, аналогично, возьмем на EN_1B и EP две точки E'' и E', соседние с E. Соединим дугами геодезической линии, обозначенными пунктиром, с одной стороны $A'A''$, а с другой — $E'E''$. Ясно, что:

1. Длина $A'A''$ будет меньше $A'A + AA''$, длина EE — меньше $E'E + EE''$, а разности дуг будут бесконечно малыми второго порядка (но не выше второго порядка). Действительно, так как $A'A''$ является геодезической линией, то, например, $AA' + AA'' - A'A''$ будет не меньше $\overline{AA'} + \overline{AA''} - A'A''$, где $\overline{AA'}$ и $\overline{AA''}$ обозначают геодезические линии, связывающие A с A' или с A'' (поскольку AA' является геодезической линией, то она совпадает с $\overline{AA'}$). Две геодезические линии пересекаются под бесконечно малыми углами первого порядка (но не высшего, так как расстояние от A'' до C — первого порядка) так, что $\overline{AA'} + \overline{AA''} - A'A''$ положительно и больше, чем бесконечно малые второго порядка.

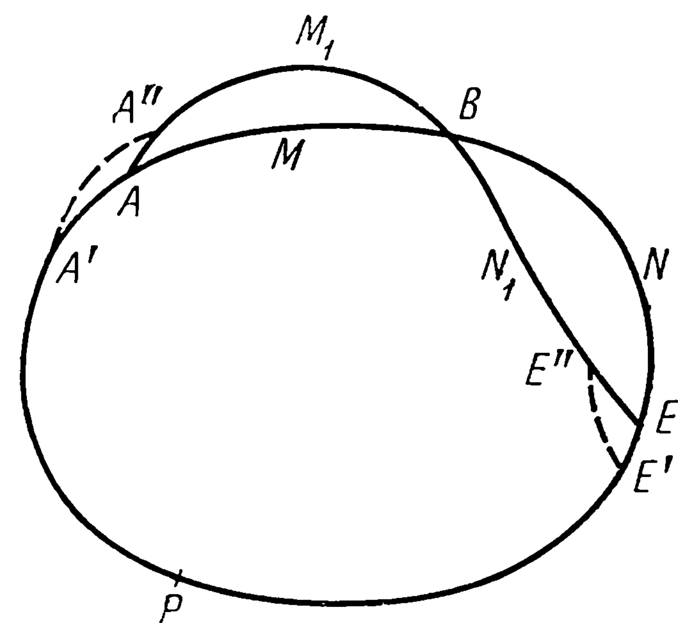


Рис. 4

Из всего этого следует, что замкнутая линия $A'A''M_1BN_1E''E'PA$ короче замкнутой кривой $AMBNEPA$, т. е. C.

2. Ясно затем, что точки A', A'', E', E'' можно расположить таким образом, чтобы два треугольника $AA'A''$ и $EE'E''$ имели одну и ту же полную кривизну. При этих условиях две кривые $AMBNEPA$ и $A'A''M_1BN_1E''E'PA$ ограничивают области, имеющие одинаковые полные кривизны.

Итак, если можно построить кривую AM_1BN_1E, расположенную так, как показано на рисунке и обладающую указанными свойствами, то кривая C заведомо не будет самой короткой из всех замкнутых кривых, которые ограничивают области с полной кривизной 2π. *Кривая C не соответствует настоящему минимуму.* Предположим теперь, что C является устойчивой замкнутой геодезической линией и что произведение $\alpha U/i$ больше 2π. Я утверждаю, что и тогда C не может соответствовать настоящему минимуму.

Действительно, пусть A будет произвольная точка кривой C, а AM_1B — замкнутая геодезическая линия, очень близкая к C и проходящая через A; она снова пересечет C в точке B, которая будет первым фокусом A, а затем в точке E, которая будет вторым фокусом A. Если $\alpha U/i > 2\pi$, то обе дуги AMB, BNE не покроют всего периметра C, и обе кривые будут расположены так, как показано на рисунке.

Если, кроме того, угол, под которым обе геодезические линии пересекаются в A, будет равным тому, под которым они пересекаются в E, то обе области AM_1BA и BN_1ENB будут иметь одну и ту же полную кривизну; мы окажемся в условиях предыдущей теоремы и C не будет настоящим минимумом.

Итак, надо решить следующий вопрос: можно ли выбрать точку A таким образом, чтобы оба рассматриваемые угла были равны?

Вернемся к обозначениям § 5; уравнением геодезической линии AM_1B будет

$$v = \rho \sin(\theta - \beta),$$

а точки A, B, E будут соответствовать

$$\theta = \beta, \quad \theta = \beta + \pi, \quad \theta = \beta + 2\pi$$

причем угол, под которым пересекаются обе геодезические линии в каждой из трех точек, будет представлен соответствующим значением величины $\rho d\theta/du$. Следовательно, необходимо удовлетворить условию

$$\left(\rho \frac{d\theta}{du}\right)_{\theta=\beta} = \left(\beta \frac{d\theta}{du}\right)_{\theta=\beta+2\pi}.$$

Но ρ и $d\theta/du$ периодические функции u, которые повторяются, когда u увеличивается на U. Следовательно, это также периодические функции приведенного аргумента $2i\pi\theta/\alpha U$. Итак, мы получим, что

$$\rho \frac{d\theta}{du} = F\left(\frac{2i\pi\theta}{du}\right),$$

где F разлагается в ряд Фурье по синусам и косинусам величин, кратных $2i\pi\theta/dU$.

Необходимо, следовательно, выяснить, можно ли определить β так, чтобы было

$$F\left(\frac{2i\pi\beta}{\alpha U} + \frac{4i\pi^2}{\alpha U}\right) - F\left(\frac{2i\pi\beta}{\alpha U}\right) = 0.$$

Но левая часть является периодической функцией от $2i\pi\beta/\alpha U$, разложимой в тригонометрический ряд по синусам и косинусам кратных $2i\pi\beta/\alpha U$, среднее значение которой равно нулю. Эта левая часть, следовательно, не может всегда иметь один и тот же знак и необходимо, чтобы она обращалась в некоторых точках в нуль. Итак, C не является истинным минимумом, что и следовало доказать.

Предположим теперь, что C неустойчиво; пусть n будет числом нулей $\varphi(u)$ (или $\varphi_1(u)$) и, следовательно, n будет числом нулей $\psi(u)$, а $2n$ — числом предельных фокусов. Пусть

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n = u_0 + U, u_{n+1} = u_1 + U$$

будут последовательными нулями $\varphi(u)$ (или $\varphi_1(u)$) и пусть

$$u_0', u_1', u_2', \ldots, u_{n-1}'; u_n' = u_0' + U, u_{n+1}' = u_1' + U$$

будут последовательными нулями $\psi(u)$.

Нули $\varphi(u)$ делят периметр C на n отрезков таким образом, что если одна точка окажется на k-м отрезке, то ее фокус будет на $(k+1)$-м отрезке, ее второй фокус — на $(k+2)$-м отрезке и т. д.

Вернемся теперь к рисунку; пусть A — произвольная точка C, так что B и E будут первым и вторым фокусами A. Если $n > 1$, то эта кривая располагается так, как показано на рисунке, и единственное условие, которому следует удовлетворить, для того чтобы можно было приложить нашу теорему, состоит в том, чтобы угол, под которым эта кривая пересекает C в A, был равен углу, под которым она пересекает C в E.

Пусть u_0 будет значением u в точке A и $F(u)$ — отношением угла, под которым обе кривые пересекаются в E, к углу, под которым они пересекаются в A. Отношение $F(u)$ всегда положительно, и возникает вопрос, можно ли распорядиться u таким образом, чтобы получить

$$F(u) = 1.$$

Пусть $u = u_0$; тогда уравнение геодезической линии AM_1BN_1E сведется к

$$v = e^{\alpha u}\Phi(u)$$

(или в случае неустойчивых геодезических линий третьей категории, к $v = e^{\alpha' u}\varphi_1(u)$). Эта линия пересечет C последовательно в точках A_0, A_1, ..., соответствующих аргументам u_0, u_1 так, что A_{k+1} будет фокусом A_k и пересечение будет происходить под углами $\theta(u_0)$, $\theta(u_1)$, ..., где

$$\theta(u) = e^{\alpha u}[\alpha\varphi(u) + \varphi'(u)].$$

Итак, будем иметь

$$F(u_0) = \frac{\theta(u_2)}{\theta(u_0)}, \quad F(u_2) = \frac{\theta(u_1)}{\theta(u_2)}, \quad \ldots, \quad F(u_{2n-2}) = \frac{\theta(u_{2n})}{\theta(u_{2n-2})},$$

откуда

$$F(u_0)\,F(u_2)\,\ldots\,F(u_{2n-2})=\frac{\theta(u_{2n})}{\theta(u_0)}=\frac{\theta(u_0+2u)}{\theta(u_0)}=e^{2\alpha u}>1,$$

и это доказывает, что по крайней мере один из сомножителей $F(u_0)$, $F(u_2)$, ..., $F(u_{2n-2})$ больше единицы, следовательно, $F(u)$ может стать больше единицы. Пусть теперь $u=u_0'$; геодезическая линия сводится к $v=$ $=e^{-\alpha u}\psi(u)$, и мы получаем

$$F(u_0')=\frac{\omega(u_2')}{\omega(u_0')},\quad F(u_2')=\frac{\omega(u_4')}{\omega(u_2'')},\quad \ldots,\quad F(u_{2n-2}')=\frac{\omega(u_{2n}')}{\omega(u_{2n-2}')};$$

полагая

$$\omega(u)=e^{-\alpha u}\,[\psi'(u)-\alpha\psi(u)],$$

получим

$$F(u_0')\,F(u_2')\,\ldots\,F(u_{2n-2}')=\frac{\omega(u_{2n})}{\omega(u_0)}=\frac{\omega(u_0+2u)}{\omega(u_0)}=e^{-2\alpha u}<1,$$

а это доказывает, что по крайней мере один из сомножителей

$$F(u_0'),\ F(u_2'),\ \ldots,\ F(u_{2n-1}')$$

меньше единицы и, следовательно $F(u)$ может стать меньше единицы.

Так как отношение $F(u)$ является функцией, непрерывной и периодической по u, и может стать <1 и >1, то оно может стать и равным 1.

Это опять-таки показывает, что C не дает истинный минимум.

Таким образом, для того чтобы замкнутая геодезическая линия C оказалась самой короткой из всех не имеющих двойной точки замкнутых кривых линий, которые ограничивают область с полной кривизной 2π, необходимо, если она устойчива, чтобы $\alpha u/i$ было меньше, чем 2π, а если она неустойчива, необходимо, чтобы число $2n$ предельных фокусов было равным двум.

Являются ли эти необходимые условия достаточными? Мне нет надобности разбирать здесь такой вопрос, так как он разрешим обычными методами вариационного исчисления *.

---

* D a r b o u x. Théorie des surfaces, t. III. Paris, Gauthier-Villars, 1894, n. 626, p. 95; J. H a d a m a r d. Leçons sur le calcul des variations. Paris, Herrmann, 1910, n. 321, 328. (*Р. Г.*).

ОБ ОДНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ *

§ 1. Введение

Никогда до сих пор я не выступал в печати с настолько незаконченной работой, поэтому считаю необходимым пояснить в нескольких словах, почему я решился на такую публикацию, а также — почему я занялся этой работой. Уже довольно давно я доказал существование периодических решений в задаче трех тел, однако результат не был полностью удовлетворительным, так как, если существование каждого вида решений и было установлено для малых значений масс, оставалось неясным, что случится для больших значений, какие из этих решений останутся и в каком порядке они исчезнут. Размышляя над этим вопросом, я пришел к убеждению, что ответ должен зависеть от справедливости или ложности некоторой геометрической теоремы, формулировка которой очень проста, по крайней мере, для случая ограниченной задачи и для задачи динамики только с двумя степенями свободы.

Итак, я должен был установить, справедлива ли эта теорема, или она неверна, однако я встретился с затруднениями, которых не ожидал. Мне пришлось по отдельности рассмотреть большое число особых случаев, но возможные случаи чересчур многочисленны, чтобы я смог их все изучить. Однако во всех случаях, которые мне удалось рассмотреть, теорема оказалась правильной. В течение двух лет я безуспешно пытался или найти общее доказательство, или же обнаружить такой пример, который привел бы к опровержению теоремы.

Итак, мое убеждение о том, что теорема справедлива, укреплялось со дня на день, но мне не удалось подвести под него солидное основание.

Представляется, что в подобном положении я должен был бы воздерживаться от какой бы то ни было публикации, пока не решу вопроса, однако после бесполезных попыток, которые я предпринимал в течение ряда долгих месяцев, мне показалось, что самым мудрым решением было бы предоставить проблеме созревать, а мне — отдохнуть от нее несколько лет. Однако это было бы правильно, если бы я был уверен в том, что смогу со временем снова взяться за эту проблему, но, учитывая мой возраст, я не могу за это поручиться. С другой стороны, значение предмета слиш-

---

* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1912, 33, 375—507.

ком велико (и я попытаюсь ниже разъяснить это), а совокупность уже полученных результатов слишком значительна, чтобы я решился бесполезно забросить их. Я могу надеяться, что геометры, которые заинтересуются этой проблемой и окажутся, вне всякого сомнения, счастливее меня, смогут извлечь некоторую пользу из этих результатов и применить их для того, чтобы найти нужный путь.

Надеюсь, что этих рассуждений мне достаточно для оправдания.

§ 2. Формулировка теоремы

Будем обозначать через x и y полярные координаты точки и рассмотрим круговое кольцо, заключенное между двумя окружностями, внешней окружностью $x=a$ и внутренней окружностью $x=b$. Рассмотрим точечное обратимое преобразование этого кольца T самого на себя. Обозначим через x и y координаты точки M, а через X и Y — координаты преобразованной точки, и наложим два следующих условия.

Первое условие. Так как T преобразует круговое кольцо самое в себя, то оно преобразует самих в себя и две граничные окружности, $x=a$ и $x=b$, так что получим $X=x$, когда $x=a$ или $x=b$; однако при этом $Y < y$ при $x=a$ и $Y > y$ при $x=b$ или наоборот. Иначе говоря, описанное преобразование преобразует друг в друга каждую из граничных окружностей, причем все точки *каждой* окружности продвигаются *в одном и том же направлении*, хотя вообще и на неравные величины, но таким образом, что вращения *обеих* окружностей происходят в *противоположные стороны*. Может показаться, что подобная формулировка не имеет смысла, поскольку y и Y определены лишь с точностью до кратных 2π, но если мы зададим в соответствии с каким-либо соглашением точное значение $Y-y$ в какой-либо точке кольца, то значение $Y-y$ полностью определится *вследствие непрерывности* во всех точках кольца.

Второе условие. Преобразование сохраняет площади или, более общим образом, оно допускает положительный интегральный инвариант, иначе говоря, существует положительная функция $f(x, y)$ такая, что

$$\iint f(x, y)\,dxdy \equiv \iint f(X, Y)\,dXdY,$$

причем эти два интеграла распространены на некоторую область и на соответствующую преобразованную область.

Если выполнены эти два условия, то я утверждаю, что всегда внутри кольца будут существовать две точки, которых преобразование не изменяет.

Будем для упрощения предполагать, что преобразование является аналитическим, но в этом нет ничего существенного.

Можно было бы попытаться наметить следующее доказательство. Достаточно будет пояснить его для простейшего случая $f(x, y)=1$. Тогда

X и Y, рассматриваемые как функции от x и y, должны будут удовлетворять уравнению в частных производных

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}=1,$$

т. е. условию, что

$$dZ=(X-x)\,dy-dX\,(Y-y)$$

есть точный дифференциал.

Нетрудно усмотреть, что Z есть однозначная функция x и y, периодическая по y; она должна иметь максимум и минимум, которые недостижимы на граничных окружностях. Итак, если бы x и y были однозначными функциями от X и y, то максимум мог бы быть достигнут только при

$$X=x, \quad Y=y$$

и можно было бы прийти к заключению, что внутри кольца существуют две такие точки, для которых $X=x$, $Y=y$, т. е. две инвариантных точки. Однако это не всегда так, и максимум может иметь место и для таких точек, для которых

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\left[(X-x)-(Y-y)\frac{\partial X}{\partial y}\right]=0,$$

что и показывает, что доказательство приложимо только к инфинитезимальным преобразованиям.

Эта теорема может быть представлена и в другом виде, совершенно эквивалентном, но в некотором роде противоположном изложенному выше. Представим себе, что преобразование T продолжает удовлетворять первому из условий, *но не второму*; взамен этого оно удовлетворяет третьему условию.

Третье условие. Внутри всего кольца не существует инвариантных точек.

Я утверждаю, что если дело обстоит именно так, то преобразование T не может удовлетворять второму условию, т. е. *иметь инвариантный положительный интеграл.*

Очевидно, что обе формулировки совершенно эквивалентны; если любое преобразование, удовлетворяющее первому и третьему условиям, не удовлетворяет второму условию, то всякое преобразование, удовлетворяющее первому и второму условиям, не может удовлетворить третьему условию; оно, следовательно, будет иметь по крайней мере одну инвариантную точку, и, следовательно, не менее двух таких точек, ибо Analysis situs (и, в частности, теорема Кронекера) непосредственно показывает, что число последних четно.

Теперь чтобы показать, что второе условие не может быть выполнено при выполнении первого и третьего условий, я постараюсь показать,

что можно построить замкнутый контур C, обладающий следующими свойствами:

1) он охватывает внутреннюю граничную окружность $x=b$ таким образом, что при полном его обходе y меняется от 0 до 2π;

2) он не пересекает свое преобразование C', так что он или целиком вне него, или целиком внутри него.

Если это так, то кольцевая площадь, заключенная между C и $x=b$, преобразуется в площадь, заключенную между C' и $x=b$.

Однако одна из этих площадей является частью другой. Если, например, C' полностью находится вне C, то площадь, заключенная между C' и $x=b$, состоит из площади, заключенной между C' и C, плюс площадь, заключенная между C и $x=b$. Следовательно, невозможно, чтобы при преобразовании площади сохраняли свои величины. Итак, не может быть и речи о том, чтобы преобразование допускало положительный интегральный инвариант.

В тех попытках доказательства, которые я намерен предпринять, я буду в основном рассматривать вторую форму теоремы, иначе говоря, я исследую тот случай, когда преобразования удовлетворят первому и третьему условиям; я классифицирую их и для каждого класса попробую построить тот контур C, который был определен выше. Наоборот, в приложениях удобнее будет применять теорему в ее первой форме.

§ 3. Применения теоремы

Если окажется возможным установить теорему, то это повлечет за собой несколько немедленных обобщений.

Действительно, сперва предположим, что граничная внутренняя окружность $x=b$ сводится к точке, тогда наше кольцо станет кругом. Если тогда на внешней окружности $x=a$ постоянно имеем $Y > y$, а вблизи центра $Y < y$ или наоборот; если, кроме того, преобразование допускает интегральный инвариант, то внутри круга будет по крайней мере две точки, не изменившиеся при преобразовании. С другой стороны, мы можем применить те же принципы и к произвольной степени T'' преобразования T.

Посмотрим теперь, как все это можно применить к задачам динамики в случае двух степеней свободы. Для упрощения я рассмотрю, в частности, простейшую из этих задач — проблему геодезических линий на выпуклой поверхности (по этому вопросу я написал мемуар *). Нам нужно сперва найти подходящее для нашего объекта геометрическое представление; определим то, что будем называть *элементом*, и постараемся каждому из этих элементов поставить в соответствие точку пространства. Элементом будет совокупность одной геодезической линии и одной точки этой геодезической линии. Одну и ту же геодезическую кривую следует рас-

---

* О геодезических линиях на выпуклых поверхностях (см. наст. том. — *Ред.*).

сматривать как две различные геодезические линии, в зависимости от того, в каком направлении она пробегается. Каждому элементу соответствует триэдр, определенный следующим образом: сперва проведем к поверхности в рассматриваемой точке нормаль, причем извне; затем проведем касательную к геодезической линии, в том направлении, в котором последняя пробегается; наконец, проведем к этим двум прямым перпендикуляр, также имеющий определенное направление. Перенесем затем при помощи поступательного движения наш прямоугольный триэдр так, чтобы его вершина совпала с началом. Таким образом, каждому прямоугольному триэдру с вершиной в начале соответствует один и только один *элемент*; так как поверхность выпуклая, то имеются только две точки, в которых касательная плоскость перпендикулярна к первому ребру триэдра и только в одной из этих точек *внешняя* нормаль будет параллельна этому ребру и иметь *то же направление*.

Через эту точку проходит геодезическая линия, причем только одна, касательная к которой будет параллельна второму ребру триэдра; направление, по которому мы идем вдоль этой геодезической линии, также тем самым определено.

Установив это, определим каждый триэдр с помощью кватерниона

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \rho\ (\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2=1),$$

который дает нам вращение, необходимое для того, чтобы привести триэдр из начального положения, определенного раз и навсегда, в действительное. Тогда косинус полуугла этого вращения будет равен λ, а его синус будет $\sqrt{\mu^2+\nu^2+\rho^2}$; направляющие косинусы оси вращения пропорциональны μ, ν, ρ.

Заметим при этом, что два кватерниона: λ, μ, ν, ρ и $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$, $-\rho$ представляют одно и то же вращение и. следовательно, один и тот же триэдр и один и тот же *элемент*.

Положим затем

$$\lambda=\frac{1-\xi^2-\eta^2-\zeta^2}{1+\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\qquad \mu=\frac{2\xi}{1-\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$
$$\nu=\frac{2\eta}{1+\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\qquad \rho=\frac{2\zeta}{1+\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

и представим наш элемент точкой пространства с прямоугольными координатами ξ, η, ζ. Каждой точке пространства соответствует один и только один элемент; каждому элементу соответствуют *две* точки пространства, которые можно вывести одну из другой при помощи инверсии с полюсом в начале и со степенью, равной -1.

Геодезическая линия, образованная бесконечным множеством подобных элементов, будет представлена в этом пространстве кривой. Через каждую точку этого пространства проходит одна и только одна из этих

кривых, причем определенным является и направление прохождения этой кривой. Я обозначу эти кривые через C.

В случае сферы геодезические линии являются большими кругами, а кривые C образуют семейство кругов, плоскости которых проходят через начало и степень которых относительно этого начала равна -1. Два из этих кругов C не могут встретиться и они всегда *сцеплены* друг с другом. В общем случае каждому периодическому решению проблемы, т. е. каждой замкнутой геодезической линии, соответствует замкнутая кривая C.

В качестве второго примера я возьму частный случай задачи трех тел, известный под названием *ограниченной* задачи. Отнесем систему трех тел, как это делается обычно, к вращающимся осям, и запишем интеграл Якоби (или интеграл живых сил в относительном движении) в форме

$$J=c,$$

где c — постоянная, а J — функция наших четырех переменных, которыми будут: x и y, координаты возмущенного тела x' и y', составляющие его скорости. Если рассматривать c в качестве заданной постоянной, то независимыми будут лишь три из этих переменных.

Можно записать, что

$$J=\frac{x'^2+y'^2}{2}+H,$$

где H зависит лишь от x и y. При этих условиях будем иметь

$$H<c.$$

Это неравенство определяет какую-то область на плоскости и в некоторых случаях, которыми мы ограничимся, эта область β ограничена замкнутой кривой α; в каждой точке области β скорость по величине определена уравнением Якоби, но направление ее остается произвольным; в каждой точке кривой α эта скорость равна нулю, так что направление не имеет значения. Итак, каждой точке β соответствует бесконечное количество *элементов*, каждой точке α соответствует только один элемент; это и приводит нас к следующему геометрическому представлению.

Мы можем сопоставить взаимно однозначно области β внутренность круга β', а кривой α — его окружность α'. Установив это, представим себе круг γ, плоскость которого перпендикулярна плоскости круга β', а степень его относительно центра β' равна квадрату радиуса β'; он пересечет плоскость β' в двух точках, из которых одна будет внутренней, вторая — внешней по отношению к окружности α'. Пусть M будет первой из этих точек, а x, y — соответствующей точкой области β. Тогда мы представим различные *элементы* с помощью точки пространства следующим образом: когда представляющая точка будет описывать круг γ, то x и y будут сохранять постоянные значения, соответствующие точке M,

а угол $\operatorname{arctg}(y'/x')$, определяющий направление скорости, будет изменяться от 0 до 2π. Тогда каждой точке β будет соответствовать бесконечное число элементов, представленных различными точками круга γ. Если точка M находится на α' и, следовательно, соответствующая ей точка на α, то круг γ сводится к точке, как и должно быть, поскольку каждой точке α соответствует только один элемент.

Итак, каждому элементу соответствует одна и только одна точка пространства *, и наоборот.

Траектория будет представлена кривой двоякой кривизны C; через каждую точку пространства проходит одна и только одна из этих кривых. Направление, в котором пробегается эта кривая, также является определенным. Замкнутые кривые C представляют собой периодические решения.

Предположим теперь, что в любом из двух предыдущих примеров замкнутая кривая C_0 представляет периодическое решение, а поверхность A ограничена этой кривой.

Будем предполагать, что поверхность A является односвязной и не пересекается сама с собой и, более того, что она *без контакта*, т. е. что ни в одной точке этой площади кривые C не касаются искривленной поверхности, часть которой составляет наша область.

Пусть теперь P — произвольная точка A; через эту точку проходит кривая C, причем только одна; проследим ход этой кривой до тех пор, пока она опять не встретит A в P'. Точку P' можно назвать *последующей* для P; преобразование T, с помощью которого осуществляется переход от некоторой точки к следующей, является точечным преобразованием поверхности A самой в себя. Необходимо заметить, что точка P' изменяется непрерывным образом, если непрерывно изменяется P. Действительно, можно допустить, что изменение будет прерывным, при одном из следующих обстоятельств.

1. Если, рассматривая последовательные точки $P, P', P'', P''', \ldots$ пересечения C с A, мы увидим, что в определенный момент P' и P'' совпадут, а затем станут мнимыми, так что с этого момента первой точкой пересечения C с A будет P''' а не P'.

2. Если, наоборот, в некоторый момент времени две новые точки пересечения P_1 и P_2 появятся таким образом, что первым пересечением C и A станет P_1, а не P'.

3. Если в некоторый данный момент времени P' выйдет из области A и первым пересечением с этого момента окажется P'', а не P'; или же, наоборот, если в область A войдет новая точка пересечения P_1, которая включится между P и P'.

Ни одно из этих обстоятельств не сможет представиться в рассматриваемом положении: первые два потому, что кривая C не может стать касательной к A, которая *лишена контакта*; третье благодаря тому, что

---

* Пополненного одной бесконечно удаленной точкой. (*Прим. ред.*).

через некоторую точку кривой C_0, ограничивающей A, никогда не сможет пройти кривая C иная, чем C_0.

Если точка P сливается с первой следующей за ней точкой P' или с какой-либо из последующих, то кривая C окажется замкнутой, а решение — периодическим. Отметим, кроме того, что преобразование T допускает положительный интегральный инвариант в соответствии с принципами, изложенными мною в другом месте *.

Теперь мы должны ввести понятие характеристических показателей, а также устойчивости периодических решений. Известно, что всякое периодическое решение допускает два равных характеристических показателя с противоположными знаками **. Если периодическое решение устойчиво, то эти два показателя сопряженные мнимые.

В этом случае мы можем ввести понятие приведенного аргумента («Новые методы небесной механики», т. III, п. 347) и понятие кинетических фокусов, что укажет нам, каким образом изменяется точка P', когда точка P весьма близка к граничной кривой C_0. Что же такое кинетический фокус? Рассмотрим кривую C_1, очень мало отличающуюся от C_0 и представляющую траекторию или некоторую геодезическую линию, очень мало отличающуюся от той, которую представляет C_0. Пусть G_0 и G_1 будут две геодезические линии и две траектории, представленные соответственно кривыми C_0 и C_1.

Для того чтобы написать уравнение кривой C_1, мы возьмем специальную систему координат u, v, w следующим образом:

1) координаты некоторой точки рассматриваемой траектории или геодезической линии зависят только от u и v, тогда как направление касательной зависит одновременно от u, v и w;

2) уравнениями кривой C будут $v=w=0$, а u изменяется от 0 до 2π при полном обходе замкнутой кривой C_0.

При этих условиях мы увидим, что *** если кривая C_0 соответствует устойчивой траектории, то уравнения кривой C_1, весьма мало отличающейся от C_0, могут быть записаны в виде

$$\frac{v}{a} = \rho \sin(\theta + h), \qquad \frac{w}{a} = \rho_1 \sin(\theta + h) + \rho_2 \cos(\theta + h),$$

где a и h являются постоянными интегрирования, причем первая из них очень мала; ρ, ρ_1, ρ_2 — периодические функции от u; θ — функция от u, *всегда возрастающая*, производная от которой является периодической. Можно будет записать, что

$$\theta = \alpha u + \varphi(u),$$

---

* См. «Новые методы небесной механики», т. I, II, III (т. I и II наст. издания. — *Ред.*).

** См. «Новые методы небесной механики», т. I, гл. IV.

*** См. «Новые методы небесной механики» или мемуар «О геодезических линиях на выпуклых поверхностях».

где $\varphi(u)$ — периодическая функция; тогда $i\alpha$ есть то, что называют характеристическим показателем.

Точки пересечения G_1 и G_0 можно получить, приравняв v нулю, что даст уравнение

$$\theta+h=K\pi,$$

где K — целое число. Если M является точкой пересечения G_0 и G_1, а M' — следующей точкой пересечения, то M' называется первым кинетическим фокусом M, и тогда, если θ и θ' — соответствующие значения θ, получим

$$\theta-\theta'=\pi.$$

Напишем теперь уравнение нашей поверхности A в форме

$$F(u, v, w)=0;$$

если мы разложим первый член по степеням v и w, то член нулевой степени будет равен нулю, так как поверхность A проходит через кривую C_0. Мы можем пренебречь членами порядка выше первого, так как мы должны придать v и w лишь весьма малые значения, и тогда останется

$$gv+g_1w=0,$$

где g и g_1 — периодические функции u. Если мы заменим v и w их значениями, то получим

$$\rho\sin(\theta+h)+\rho_1\cos(\theta+h)=0,$$

где ρ и ρ_1 — новые периодические функции от u. Если положим

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\operatorname{tg}\lambda,$$

то λ будет функцией от u, производная которой является периодической и которая не может отличаться от периодической функции от u более, чем на число, кратное u, которое я обозначу mu, тогда наше уравнение примет вид

$$\sin(\theta+\lambda+h)=0.$$

Итак, мы получим последовательные точки пересечения C_1 и A, написав, что этот синус равен нулю; аргумент синуса должен быть кратным π; но следует отметить, что поверхность A *ограничена* C_0 и не простирается вне этой кривой; следовательно, подходят только четные кратные, и надо написать, что

$$\theta+\lambda+b=2v-\pi.$$

Если теперь P и P' будут двумя последовательными точками пересечения и θ, λ и θ', λ' — соответствующими значениями θ и λ, то получим

$$(\theta'+\lambda')-(\theta+\lambda)=2\pi.$$

Следует заметить, что $\theta+\lambda$ — постоянно возрастающая функция от u; действительно, для очень малых v и w можно написать, что

$$F(u, v, w)=R\sin(\theta+\lambda+h),$$

где $R=\sqrt{\rho^2+\rho_1^2}$ есть периодическая функция от u. Тогда пересечения C_1 с A можно получить, приравняв F нулю, а *соприкосновения* C_1 с A, записав, что

$$F=F'=0,$$

где F' производная от F по u; это дает соотношения

$$F=R\sin(\theta+\lambda+h)=0,$$
$$F'=R'\sin(\theta+\lambda+h)+R(\theta'+\lambda')\cos(\theta+\lambda+h)=0.$$

Если бы имело место $\theta'+\lambda'=0$, то можно было взять $h=\theta-\lambda$ и условия оказались бы выполненными. Однако это невозможно, так как поверхность A, по предположению, *без контакта*. Производная от $\theta+\lambda$ не может, следовательно, стать нулем, и $\theta+\lambda$ постоянно изменяется в одном и том же направлении; при этом всегда можно сделать так, чтобы было возрастание.

Функция $\frac{\theta+\lambda}{\alpha+m}$ может быть названа *приведенным аргументом*, если несколько обобщить это понятие. Величина $\alpha+m$ отличается от α лишь на целое число

$$m=\frac{\lambda(u+2\pi)-\lambda(u)}{2\pi},$$

которое для обоих выбранных примеров оказывается равным нулю. Приведенный аргумент после каждого полного оборота по C_0 возрастает на 2π и так как это возрастающая функция от u, то ее можно использовать для определения положения точки на C_0; если P очень близко к C_0, то приведенный аргумент P отличается от приведенного аргумента своего преобразования P' на $\frac{2\pi}{\alpha+m}$.

Установив это, мы можем уподобить поверхность поверхности круга с точки зрения Analysis situs. Мы можем, следовательно, определить положение точки этой поверхности с помощью системы координат x и y, аналогичных полярным координатам, таким образом, чтобы уравнение кривой C_0 было

$$x=a$$

и чтобы на этой кривой y было равно приведенному аргументу. Наше преобразование T сохраняет, следовательно, кривую $x=a$ и оказывается таким, что

$$Y-y=\frac{2\pi}{\alpha+m}=\text{const}.$$

Теорема Кронекера учит нас в этом случае, что внутри A имеется *нечетное* число точек, не изменяемых преобразованием; каждой из этих точек соответствует периодическая траектория; по крайней мере, одна из этих траекторий устойчива.

Пусть P_0 будет соответствующей точкой; мы можем выбрать нашу координатную систему так, чтобы эта точка соответствовала полюсу

$$x=0.$$

Преобразование T сохраняет, таким образом, не только окружность $x=a$, но также и внутреннюю граничную окружность $x=0$, которая оказывается сведенной к точке.

Пусть C_0' — та замкнутая кривая C, которая проходит через P_0; введем систему координат u', v', w', которая будет для C_0' тем, чем для C_0 была система u, v, w. Предположим, кроме того, что в этой системе уравнением A будет $u'=0$. Это сделать мы можем, но лишь при условии, что откажемся от первого предположения, сделанного по поводу u, v, w (а именно, что точка геодезической линии или траектории не меняется, меняется лишь направление касательной при условии изменения w, тогда как u и v остаются постоянными). Сказать по правде, это предположение не играет никакой существенной роли, и мы приняли его лишь с целью облегчить формулировку определения кинетических фокусов. При этих условиях уравнения некоторой кривой C, близкой к C_0', будут

$$\frac{v'}{a'}=\rho' \sin(\theta'+h'), \quad \frac{w'}{a'}=\rho_1' \sin(\theta'+h')+\rho_2' \cos(\theta'+h')$$

и мы получим

$$\theta'=\beta u'+\varphi'(u),$$

где φ' периодическая; $i\beta$ — характеристический показатель. Таким образом, при возрастании u' на 2π θ' возрастает на $2\pi\beta$. Мы можем выбрать координатную систему x, y таким образом, чтобы в непосредственной близости от P_0, т. е. при очень малом x, с достаточной точностью соблюдались соотношения

$$\frac{v'}{x}=\rho' \sin y, \qquad \frac{w'}{x}=\rho' \sin y+\rho_2' \cos y,$$

причем для ρ', ρ_1', ρ_2' берутся значения, которые они принимают при $u'=0$.

Итак, когда u' увеличится на 2π, т. е. когда мы перейдем от точки P к точке P', $y=\theta'+h'$ возрастет на $2\beta\pi$, или, точнее (так как y определяется до кратного 2π), станет равным $2\pi(\beta+n)$, где n — целое число; тогда мы получим

$$Y-y=2\pi(\beta+n).$$

Сперва может показаться, что целое число n является произвольным, в противоположность m, но если целиком обойти область A, то разность $Y—y$ должна меняться непрерывным образом, что и определяет n.

Установив это, рассмотрим преобразование T^p, т. е. p-ю степень преобразования T; такое преобразование сохраняет $x=a$ и $x=0$ и оно допускает, как и T, *положительный интегральный инвариант*, в соответствии с принципами, изложенными в моей книге «Новые методы небесной механики»; оно даст нам, с другой стороны, на линии $x=a$

$$Y-y=2\pi\frac{p}{\alpha+m}$$

и при $x=0$

$$Y-y=2\pi p(\beta+n).$$

Оно существенно не будет отличаться от того, которое получается из него при замене Y на $Y+2q\pi$, где q — целое число, так как Y определяется лишь с точностью до кратного 2π. Для этого нового преобразования получим на $x=a$

$$Y-y=2\pi\left(\frac{a}{\alpha+m}+q\right),$$

а при $x=0$

$$Y-y=2\pi[p(\beta+n)+q].$$

За вычетом того случая, когда

$$(\beta+n)(\alpha+m)=1,$$

можно найти бесконечное число пар целых чисел p и q таких, что

$$\left(\frac{p}{\alpha+m}+q\right)[p(\beta+n)+q]<0,$$

т. е.

$$\frac{1}{\alpha+m}>-\frac{q}{p}>\beta+n$$

или

$$\frac{1}{\alpha+m}<-\frac{q}{p}<\beta+n.$$

Итак, теорема будет применима и окажутся по крайней мере две такие точки, которые не меняются при нашем преобразовании. Эти две точки дадут нам два периодических решения.

Так как p и q могут принимать бесконечно много значений, то мы получаем в результате *бесконечное число периодических решений* (что до сих пор было доказано лишь для малых значений масс).

Предположим, что для определенных значений данных задачи построены кривые C_0 и C'_0, а также область A. Будем теперь менять данные задачи. C_0 будет меняться непрерывным образом; можно также менять непрерывным образом A, сохраняя притом ее существенные свойства, в частности, отсутствие контакта. Никаких препятствий мы при этом не встретим, пока будет существовать C_0. Итак, пока будут существовать C_0 и C'_0, все то, что мы высказали, остается в силе. Периодические решения, соответствующие паре целых чисел p, q, смогут исчезнуть полностью лишь после слияния с C_0 или C'_0, что происходит при

$$-\frac{q}{p}=\frac{1}{\alpha+m} \text{ или } =\beta+n.$$

Это разъясняет взаимоотношения между периодическими решениями и может быть приложено также к исследованию периодических решений второго рода.

Я предвижу также, однако значительно менее ясным образом, что то же самое можно было бы использовать для того, чтобы показать, что периодические решения везде плотны.

Посмотрим теперь, что получается в тех двух частных примерах, рассмотренных нами выше, а сначала в том из них, в котором рассматриваются геодезические линии. Предположим, что поверхность очень мало отличается от сферы; мы видели в этом случае, что замкнутые геодезические линии без двойных точек * соответствуют максимумам, минимумам и минимаксам некоторой величины, являющейся не чем иным, как длиной большого астрономического круга.

Число этих максимумов равно $4n+2$, где n — целое число. Однако если не считать различными две геодезические линии, совершенно идентичные, но пробегаемые в противоположных направлениях, то мы получим для геодезических линий нечетное число, равное $2n+1$; именно так я поступал в указанном мемуаре. Здесь же, наоборот, две геодезические линии, отличающиеся лишь направлением пробегания, считаются двумя различными кривыми C. Число замкнутых кривых C, относящихся к этой категории, следовательно, четно; все они пересекают A в одной точке, за исключением C_0, ограничивающей A. Следовательно, число кривых C, пересекающих A, нечетно, как это и должно быть. При желании можно подобрать C'_0 таким образом, чтобы C_0 и C'_0 соответствовали двум геодезическим линиям, различающимся лишь по своему направлению.

Если поверхность S сводится к сфере, то кривая C_0 станет окружностью и в качестве A можно принять плоскую область, ограниченную этой окружностью.

---

* См. мемуар «О геодезических линиях на выпуклых поверхностях» (наст. том, стр. 748. — *Ред.*).

В ограниченной проблеме будем исходить из случая, для которого возмущающая масса равна нулю: в таком случае для возмущенного тела будут иметь место две круговые орбиты, соответствующие уравнению Якоби (см. выше). Эти орбиты и соответствуют C_0 и C'_0.

§ 4. Определения и обозначения

После того как я объяснил ту роль, которую смогла бы сыграть исследуемая теорема, если бы она оказалась верной, я должен изложить соображения, которые побуждают меня верить в ее справедливость. Для этого я возьму теорему в ее второй форме; иными словами, буду предполагать, что преобразование T не оставляет неизменной ни одной точки, и постараюсь установить, что оно не допускает интегрального инварианта.

Для удобства я буду пользоваться двумя способами представления: иногда буду применять само круговое кольцо, так что x и y станут полярными координатами; это то, что я назову *круговым изображением*. Иногда же буду рассматривать x и y в качестве ортогональных координат, и предположу, вопреки обычаю, что ось x вертикальна, а ось y горизонтальна; я буду называть это *спрямленным изображением*. Нетрудно перейти от одного изображения ко второму: кривые $x=\text{const}$ являются окружностями при первом способе и горизонталями при втором; кривые $y=\text{const}$ будут радиусами-векторами при первом и вертикалями при втором.

Необходимо все же заметить, что одной точке кругового изображения соответствует бесконечное число точек спрямленного изображения (x, y; x, $y+2\pi$; x, $y+4\pi$; . . .).

Таким образом, мы будем различать кривые, замкнутые в *широком* и в *узком смысле*; первые являются замкнутыми на круговом изображении и не замкнуты на спрямленном; вторые являются замкнутыми на обоих изображениях.

Предполагается, что преобразование T всегда однозначно: координатами точки M будут x и y, а координатами преобразованной точки M' будут X и Y; координатами же преобразованной точки в случае обратного преобразования T^{-1} будут (X) и (Y).

Наше круговое кольцо ограничено двумя граничными окружностями

$$x=X=a, \qquad x=X=b,$$

из которых первая внешняя, а вторая внутренняя; обе сохраняются при преобразовании.

Замечательные кривые, которые нам придется исследовать, следующие:

1) окружности (или горизонтали) $x=c$;

2) кривые $X=c$, преобразованиями которых являются кривые $x=c$; последние, как и первые, должны быть замкнутыми в узком смысле;

3) кривые $X=x$, причем две из этих кривых рассматриваются как различные, хотя они и имеют одно и то же уравнение, если от одной из них нельзя перейти к другой по непрерывному пути, удовлетворяющему тому же уравнению;

4) линии, преобразованные из них, $(X)=x$.

Если мы будем рассматривать три кривые $X=x$, $X=c$, $x=c$, то всякая точка, принадлежащая двум из них, будет принадлежать и третьей, и если две из них касаются между собой, то в той же точке их касается и третья.

На кривой $X=x$ не может существовать такой точки, в которой было бы $Y=y$, так как эта точка, в которой мы имели бы $X=x$, $Y=y$, была бы точкой, не изменяемой с помощью T, а мы предположили, что этого случиться не может. Итак, $Y-y$ сохраняет свой знак вдоль той же кривой $X=x$, что понуждает меня различать два вида кривых $X=x$: кривые *положительные и отрицательные*, в зависимости от того, положительна или отрицательна разность $Y-y$. По предположению разность $Y-y$ всегда положительна на одной из граничных окружностей и отрицательна на другой. Все кривые $X=x$, которые примыкают к одной из этих окружностей, следовательно, положительны; все же те, которые примыкают к другой, отрицательны, и ни одна кривая $X=x$ не может проходить от одной окружности к другой.

Итак, кривые $X=x$ делятся на три категории:

1. Открытые кривые, оба конца которых лежат на одной из граничных окружностей.

2. Замкнутые кривые в широком смысле.

3. Кривые, замкнутые в узком смысле.

Мы существенно не снизим общности, если предположим, что ни одна из этих кривых не имеет двойных точек.

Рассмотрим спрямленное изображение и на этом изображении те точки, в которых касательная к кривой $X=x$ горизонтальна; эти точки будем называть *основаниями* или *вершинами*, в зависимости от того, будет ли в них высота (измеряемая координатой X) максимумом или минимумом. Отрезок кривой $X=x$, заключенный между последовательно расположенными основанием и вершиной, на котором, вследствие этого, не находится ни другое основание, ни другая вершина, будет называться *ветвью* кривой $X=x$, и я всегда буду употреблять слово ветвь именно в этом смысле.

Если M точка кривой $X=x$, то преобразованная из нее точка M' будет иметь ту же высоту (это в точности то, что выражает уравнение $X=x$) и окажется на преобразованной кривой $(X)=x$, откуда вытекают следствия: каждое основание или каждая вершина $X=x$ преобразовывается в основание или в вершину $(X)=x$, которые имеют ту же высоту; всякая ветвь $X=x$, пробегаемая, например, вверх, будет иметь в качестве преобразованной ветвь $(X)=x$, пробегаемую также вверх.

Если ветвь $X=x$ положительна, то преобразованная из нее $(X)=x$ не сможет пересечь ее и полностью находится справа (все время на спрямленном изображении); ее также можно назвать положительной. Наоборот, она целиком находится слева, если кривая $X=x$ отрицательна.

§ 5. Пересечение двух замкнутых кривых

Рассмотрим окружность $x=c$ и ее обратное преобразование $X=c$, которое также является кривой, замкнутой в широком смысле. Эти две кривые допускают на круговом изображении четное число m точек пересечения, однако эти точки на ортогональном изображении будут представлены бесконечным числом точек. Начнем с того, что перенумеруем эти точки пересечения, следуя по кривой $X=c$ в направлении возрастающих Y. Если мы пройдем затем $x=c$ в направлении возрастающих Y, то встретим все эти точки пересечения, однако, в общем случае, в ином порядке. В том случае, когда они следуют друг за другом в точном соответствии с порядком своих номеров, мы будем называть их распределение *нормальным.*

Мы уже отметили, что число m действительно различных точек пересечения всегда четно; проходя $x=c$ от $y=y_0$ до $y—y_0+2\pi$, мы последовательно встретим перенумерованные точки

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m. \tag{1}$$

Ряд (1) определяет способ распределения точек пересечения; очевидно, его можно заменить следующим рядом:

$$\alpha_1+m,\ \alpha_2+m,\ \ldots,\ \alpha_m+m,$$

являющимся рядом номеров точек, встречающихся при пробегании $x=c$ от $y=y_0+2\pi$ до $y=y_0+4\pi$. Если распределение нормально, то числа ряда (1)—m последовательных целых чисел. Во всех случаях эти числа попеременно четны и нечетны.

Дугу линии $X=c$, заключенную между двумя из этих точек пересечения, будем называть *элементарной*, если она не пересекает линии $x=c$ (хотя оба ее конца, конечно, находятся на этой линии). Элементарные дуги будут *внешними* или *внутренними*, в зависимости от того, располагаются ли они на круговом изображении снаружи или внутри окружности $x=c$. Можно предположить, что *два конца внешней элементарной дуги всегда имеют номера* $2n—1$ и $2n$, а концы внутренней элементарной дуги — номера $2n$ и $2n+1$.

Элементарная дуга будет *прямой*, если ее конец более высокого номера находится на спрямленном изображении справа от другого конца; она будет *обратной* в противоположном случае; иными словами, если дуга прямая, то Y и y изменяются в одну и ту же сторону при переходе от одного конца к другому.

Кривая $X=c$, полученная обратным преобразованием из кривой $x=c$, не имеющей двойных точек, также не содержит двойных точек. Отсюда следует, что две ее элементарные дуги не могут пересечься; это можно было бы выразить так: если A, B и C, D — концы двух внешних элементарных дуг (или двух внутренних элементарных дуг), то два отрезка AB и CD (взятые на горизонтали $x=c$ в спрямленном изображении), не могут наложиться один на другой, иначе говоря, точки C и D обе являются внешними или обе внутренними по отношению к интервалу AB.

Это условие можно было бы высказать и иначе. Рассмотрим ряд (1) и дополним его, добавив к нему число α_1+m, так чтобы получилось нечто вроде замкнутого круга (напомним, что перенумерованные точки α_1 и α_1+m идентичны, если не на спрямленном, то во всяком случае на круговом изображении). В ряде, дополненном таким образом, я смогу выделить $m/2$ пар по два последовательных числа в каждой, из которых первое четно, а второе нечетно. Если мы будем рассматривать некоторые из этих пар, то следовательно, необходимо, чтобы два числа одной пары были заключены между двумя числами другой, или же чтобы между последними не попадало ни одно, ни другое. (Одна из этих пар не может быть, например, равной 14, а вторая 52.) Подобно этому, в составе нашего ряда имеется $m/2$ пар по два последовательных числа в каждой, из которых первое четно, а второе нечетно. То же самое условие должно выполняться для любых двух из этих пар.

Итак, мы ознакомились с двумя формулировками необходимых и достаточных условий *возможности* ряда (1). Обе эти формулировки эквивалентны, и они применимы к пересечению двух произвольных замкнутых кривых без двойной точки. В первой формулировке рассматриваются две замкнутые кривые (в широком смысле) $X=c$ и $x=c$, и предполагается, что $X=c$ разложено на элементарные дуги. Во второй формулировке меняются роли обеих кривых и на элементарные дуги раскладывается кривая $x=c$.

Рассмотрим две внешние элементарные дуги AB и CD. Если два конца C и D лежат на отрезке AB горизонтали $x=c$ при спрямленном изображении, так что дуга CD полностью заключена в пределах области, ограниченной дугой AB и ее хордой, то мы будем говорить, что *CD перекрывается AB*. То же самое определение приложимо, очевидно, и к внутренним дугам.

Элементарная дуга называется *первичной*, если она не перекрывается никакой другой, и *последней*, если она не перекрывает никакую другую. Дуга *CD непосредственно* перекрыта дугой AB, если не существует никакой элементарной дуги, которая перекрыла бы CD и сама была перекрыта AB.

Из этих определений легко можно вывести следующие предложения:

1. Если две дуги перекрываются непосредственно, то одна из них является прямой, а вторая — обратной.

2. Каждая первичная дуга — прямая.

3. Если распределение нормально, то все дуги одновременно и *первичные* и *последние*.

4. Продолжим бесконечно ряд (1), добавляя к нему точки, которые получатся при замене α_i на α_i+km, где k — целое положительное или отрицательное число; иначе, что сводится к тому же, образуем продолженный ряд (1), записав номера всех точек, которые последовательно встретятся нам при пробегании горизонтали от $y=-\infty$ до $y=+\infty$.

Если в этом продолженном ряде рассмотрим числа, соответствующие концам внешних первичных дуг, то эти номера будут следовать в порядке возрастания.

5. Разность номеров двух концов некоторой первичной дуги (и, тем более, произвольной дуги) не может превышать $m-1$.

Рангом точки пересечения назовем, по определению, место, которое занимает ее номер в ряде (1). Последнюю дугу характеризует то, что ранги обоих ее концов последовательные числа, равно как и их номера. Что же касается нормального распределения, то оно характеризуется тем, что ранги следуют в том же порядке, что и номера, и что всегда можно устроить так, чтобы ранг некоторой точки стал равным ее номеру.

Можно лучше разобраться в изложенном, если рассмотреть рис. 1; для него было использовано круговое изображение. Две граничные окружности $x=a$ и $x=b$ представлены сплошными линиями, то же сделано и для кривой $X=c$; что касается окружности $x=c$, то она изображена пунктирной линией; внешние элементарные дуги будут 12, 34, 56 и 78, а внутренние элементарные дуги — 23, 45, 67, 81; дуги 12, 78, 67, 23 являются первичными, дуги 34, 78, 45, 81 — последними; дуга 34 перекрыта дугой 56, а дуга 56 перекрыта дугой 12.

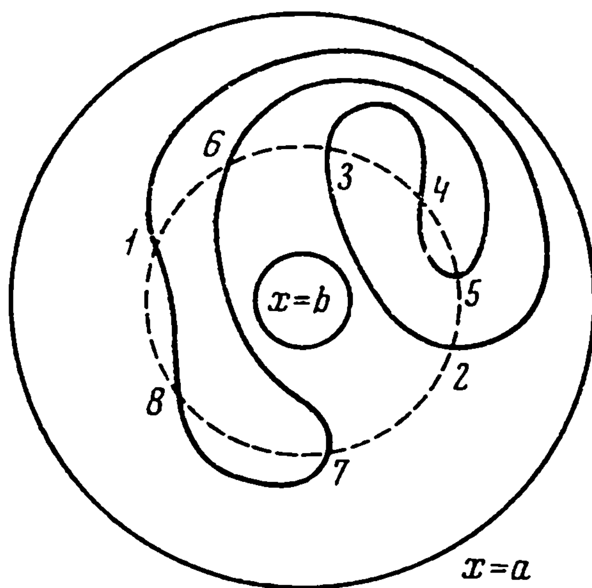


Рис. 1

§ 6. Нумерация ветвей

Рассмотрим на спрямленном изображении различные *ветви* $X=x$; сопоставим каждой ветви (A) число $n(A)$, соблюдая при этом следующее условие.

Если горизонталь $x=c$ пересекает две ветви (A) и (B) и если ее пересечение с (A) будет слева от ее пересечения с (B), то должно быть

$$n(A) < n(B).$$

Нетрудно показать, что это условие не вносит никакого противоречия и что можно подобрать числа $n(A)$ таким образом, чтобы одновременно удовлетворялись все эти неравенства. Число $n(A)$ будет называться *рангом* ветви (A). Можно выбрать эти числа так, чтобы они представили всю последовательность целых чисел, начиная от $-\infty$ вплоть до $+\infty$, причем

без какого-либо *пропуска*; если бы пропуски существовали, то для их заполнения было бы достаточно «сомкнуть ряды».

На спрямленном изображении число ветвей бесконечно, и ранги следуют от $-\infty$ до $+\infty$, но эти ветви соответствуют лишь конечному числу ветвей на круговом изображении, так как каждой точке кругового изображения соответствует бесконечное число точек спрямленного. Итак, достаточно представить себе часть спрямленного изображения, заключенную между $y=y_0$ и $y=y_0+2\pi$ и содержащую лишь конечное число ветвей, так как спрямленное изображение при возрастании y на 2π воспроизводится периодически.

Аналогично определяется и ранг ветвей $(X)=x$. *Номером* ветви $X=x$ будет ранг ветви $(X)=x$, являющейся преобразованием первой; *номером* ветви $(X)=x$ будет ранг ветви $X=x$, являющейся ее обратным преобразованием.

Нетрудно дать себе отчет в том, как такая нумерация ветвей $X=x$ связана с нумерацией пересечений $X=c$ и $x=c$, изученной в предыдущем параграфе.

Рассмотрим окружность $x=c$, представленную на спрямленном изображении горизонталью; ее пересечения с $X=c$ будут находиться на одной из ветвей $X=x$.

Горизонталь $x=c$ не встретится со всеми ветвями $X=x$, но все ее точки пересечения с одной из этих ветвей будут находиться на $X=c$; номера и ранги ее точек пересечения с $X=c$ следуют в том же порядке, что и номера и ранги соответствующих ветвей $X=x$. Но в то время, как последовательность номеров (или последовательность рангов) точек пересечения $X=c$ и $x=c$ не имеет пропусков, последовательность номеров (или последовательность рангов) соответствующих ветвей $X=x$ может их иметь, так как $x=c$ не пересекает всех этих ветвей. Для того чтобы перейти от второй последовательности к первой, достаточно «сомкнуть ряды». Следует заметить, что, «смыкая ряды», мы не меняем четности номеров (а равно и рангов).

Условимся говорить, что номера (или ранги) двух ветвей являются *последовательными на уровне данной горизонтали* $x=c$, если эта горизонталь не пересекает никакой ветви, номера (или ранги) которой заключены между номерами (или рангами) этих двух ветвей.

В соответствии со всеми этими соглашениями, номер ветви $X=x$, ее ранг и номер соответствующей точки пересечения между $X=c$ и $x=c$ будут всегда одинаковой четности.

Кривые $X=x$ делят круговое кольцо (или его спрямленное изображение) на области; в одних имеем $X>x$, а в других $X<x$. Из соглашений настоящего и предыдущего параграфов вытекает, что *области* $X>x$ *ограничены слева ветвями четного нормера, а справа — ветвями нечетного номера*. Для областей $X<x$ имеет место противоположное.

Рассмотрим основание (или вершину), в котором сходятся две ветви; пусть α_0 и β_0 — номер и ранг левой ветви, α_1 и β_1 — номер и ранг правой

ветви; два номера α_0 и α_1, так же как и два ранга β_0 и β_1, должны быть *последовательными на уровне этого основания* (или этой вершины). Будем говорить, что это основание (соответственно, вершина) нечетно, если α_0 нечетное, и *четно* при четном α_0.

Будем говорить, что основание (вершина) является *прямым* при $\alpha_0 < \alpha_1$ и *обратным* при $\alpha_0 > \alpha_1$.

§ 7. Запрещенные области

Рассмотрим на спрямленном изображении две кривые $x=c$ и $X=c$ и различные области, определяемые ими. Будем различать *дозволенные области*, в которых знак $X-c$ тот же, что и знак $x-c$, и области запрещенные, в которых оба знака различны и в которые, следовательно, не могут проникнуть кривые $X=x$. Область, заключенная между элементарной дугой HK кривой $X=c$, и дугами, перекрываемыми ею (в смысле § 5), является дозволенной, если HK — обратна, и запрещенной при прямой HK.

Установив это, возьмем какую-либо вершину S' на какой-либо кривой $X=x$; пусть $x=c$ будет горизонталь, расположенная под этой вершиной и пересекающая $X=x$ в точках A и B, очень близких к этой вершине. Пусть AMB — элементарная дуга кривой $X=c$, которая идет от A к B, и R — область, заключенная между этой дугой и горизонталью AB. Если эта дуга является обратной (т. е. если обратная вершина S), то область R дозволенная, а сопредельные области запрещенные, так что дуга ASB кривой $X=x$ должна пересечь эту область, которая таким образом оказывается разделенной на две частичные области $AMBS$ и $ASBA$.

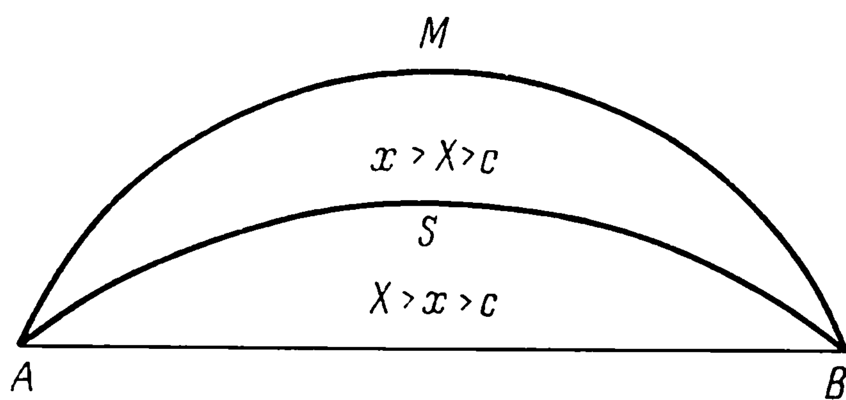


Рис. 2

В первой области мы будем иметь $x > X > c$, а во второй $X > x > c$; следовательно, ветвь AS, ограничивающая слева область $X > x$, имеет четный номер, иначе говоря, вершина S является четной. *Итак, не может быть нечетных обратных вершин, и, как видим, не может быть также четных обратных оснований.*

С другой стороны, нетрудно обнаружить, что *самая высокая вершина любой кривой $X=x$ всегда прямая*; то же самое можно сказать и относительно самого низкого основания.

Пусть, в самом деле, R — область, охваченная кривой $X=x$, если эта кривая замкнута в узком смысле, или же заключенная между этой кривой и горизонталью $x=b$ (соответствующей на круговом изображении внутренней граничной окружности). Пусть R' преобразовано из R, пусть S — наиболее высокая вершина нашей кривой; преобразованная из нее S' будет самой высокой вершиной кривой $(X)=x$, которая ограничи-

вает R'. Пусть M — точка, описывающая контур области R, причем область остается справа; преобразованная из нее M' опишет контур R', также оставляя эту область справа; когда M попадет в S, она будет двигаться слева направо, так как S является наиболее высокой точкой контура R; в это же мгновение M' попадет в S' и, в силу тех же соображений, будет двигаться слева направо. Сказать, что эти две точки движутся в одном и том же направлении, означает, что вершина является прямой. Это и требовалось доказать.

§ 8. Условия возможности

Итак, преобразование T характеризуется следующими данными, которые нетрудно распознать на спрямленном изображении.

1. *Формой* кривых $X=x$, числом и расположением ветвей каждой из них, относительной высотой различных вершин или оснований. Когда задаются формой кривых, *ранг* каждой ветви оказывается определенным, так как он зависит только от относительного геометрического положения ветвей.

2. *Номером* каждой ветви.

3. *Знаками* каждой из кривых $X=x$, которые могут быть положительными или отрицательными в смысле § 4.

Эти данные, однако, нельзя выбрать произвольно: они должны удовлетворять некоторым условиям, которые я и перечислю.

1. Предположим, что кривые $X=x$ пересечены произвольной горизонталью $x=c$. Эта горизонталь не пересечет всех ветвей кривых; но если мы выпишем номера ветвей, пересекаемых ею, в том порядке, в котором она встречается с ними, или, что то же самое, в порядке рангов, то получим бесконечную последовательность.

Каждой из пересеченных ветвей соответствует одна из точек пересечения $X=c$ и $x=c$; номер этой ветви вообще не равен номеру этой точки пересечения, так как ряд номеров имеет пропуски, соответствующие ветвям, не пересеченным кривой $x=c$, в то время как ряд номеров точек пересечения таких пропусков не имеет. Однако эти два ряда номеров следуют друг за другом в одном и том же порядке (таким образом, что можно перейти от одного к другому, «смыкая ряды»). Итак, первый из этих рядов, так же как и второй, должен удовлетворять условию § 5, которое можно сформулировать следующим образом.

Рассмотрим рад номеров, которые попеременно четны и нечетны; отметим в нем две пары последовательных номеров, таких, что в каждой из них первый номер будет четным, а второй — нечетным. Эти две пары не должны *налагаться* одна на другую в смысле § 5; то же самое должно иметь место и для двух пар последовательных номеров, в которых первый номер нечетный, а второй четный.

2. Номера и ранги двух ветвей, которые сходятся в какой-либо вершине или в каком-либо основании, должны быть *последовательными* на уровне этой вершины или этого основания, в смысле § 6.

3. Не должны встречаться ни *четное обратное основание*, *ни нечетная обратная вершина*.

4. Вблизи граничных горизонталей $x=a$ и $x=b$ номера различных ветвей должны следовать друг за другом в том же порядке, что и их ранги. И действительно, $X=a$, например, совпадает с $x=a$. Итак, если c близко к a, то $X=c$ будет мало отличаться от $x=c$, и при этом любая касательная к $X=c$ будет всегда составлять весьма малый угол с горизонталью $x=c$, а когда две замкнутые кривые мало удаляются друг от друга, распределение их точек пересечения будет нормальным в смысле § 5.

5. Две ветви, принадлежащие одной и той же кривой, и, в частности, две ветви, попадающие в одну и ту же вершину или в одно и то же основание, должны быть *одинакового знака*.

6. Мы видели, что если одна ветвь $X=x$ положительна, то преобразованная из нее $(X)=x$ должна располагаться справа от нее. Итак, пусть даны ветви A и B кривой $X=x$; предположим, что они «обратны», т. е. что номер A *больше* номера B, а ранг A *меньше* ранга B, и что они, кроме того, имеют *противоположные знаки*. Тогда необходимо, чтобы A было положительным, а B отрицательным. Не может случиться, чтобы A оказалось отрицательным, а B положительным; если бы это имело место, A оказалась бы справа от своей преобразованной A', а B — слева от своей преобразованной B'; но этого не может случиться: A слева от B, так как ее ранг меньше, а A' справа от B', так как номер A больше.

§ 9. Положительные и отрицательные дуги

Для того чтобы продолжить рассуждения, я введу новое понятие. Рассмотрим замкнутый контур C, пробегаемый в определенном направлении движущейся точкой P, и точку M; *коэффициентом* контура C будет число m, если угол вектора MP с фиксированным направлением увеличивается на $2m\pi$, когда точка P описывает целиком контур C. Углы отсчитываются в направлении, противоположном принятому в тригонометрии. Контур будет *положительным*, если его коэффициент, по отношению к произвольной точке плоскости, всегда положителен или нуль; он будет называться *отрицательным*, если этот коэффициент всегда отрицателен или нуль; он будет *определенным*, если окажется или положительным, или отрицательным.

Пусть $ABCDA$ и $ECBFE$ — два замкнутых контура. Можно объединить их, исключая общие части BC и CB, которые в обоих составляющих контурах пробегались в противоположных направлениях; в результате этого получится контур $ABFECDA$. Можно записать

$$ABCDA+ECBFE=ABFECDA$$

или

$$ABCDA=ABFECDA-ECBFE.$$

Так мы определим *сумму* или *разность* двух контуров; подобно этому можно было бы определить сумму и разность и нескольких контуров. Очевидно, что если один контур является суммой нескольких других, то его коэффициент по отношению к произвольной точке M равен сумме коэффициентов составляющих контуров.

Определим теперь знак дуги $X=x$ или дуги $X=c$. Дуга $X=x$ *положительна*, если она принадлежит положительной ветви, *пробегаемой с подъемом*, или отрицательной ветви, пробегаемой со спуском; она *отрицательна*, если принадлежит отрицательной ветви, пробегаемой с подъемом, или положительной ветви, пробегаемой со спуском. Слово «положительная» не имеет, следовательно, одного и того же смысла в рассуждениях о ветви и о дуге, так как в случае ветви (ср. § 4) знак не зависит от направления движения.

Пусть AB — положительная дуга, принадлежащая положительной ветви $X=x$, пробегаемой с подъемом, как это показано стрелкой на рис. 3. Преобразованная из нее дуга $A'B'$, следовательно, находится справа от нее; замкнем контур $ABB'A'A$, проведя горизонтали BB' и $A'A$ (это — горизонтали спрямленного изображения, уравнение которых есть $x=$ $=\text{const}$). Очевидно, что определенный таким образом контур *положителен*, что и оправдывает название положительной дуги.

Можно обобщить это и ввести понятие дуг $X=x$, *компенсированно* положительных или отрицательных.

Пусть дана дуга $DCBA$, принадлежащая положительной кривой $X=x$, и пусть на этой дуге имеем *обратную* вершину C и *обратное* основание B, причем так, что A находится над D, тогда как C и B расположены на

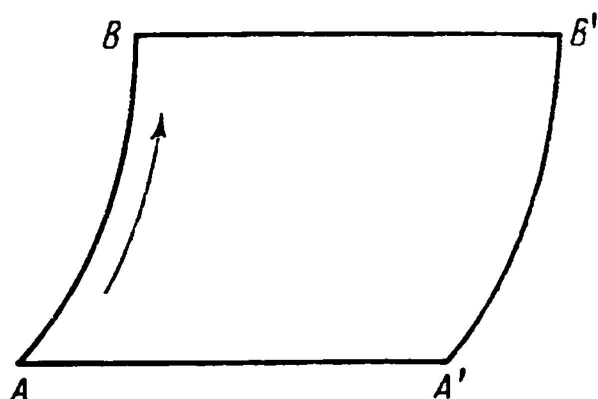


Рис. 3

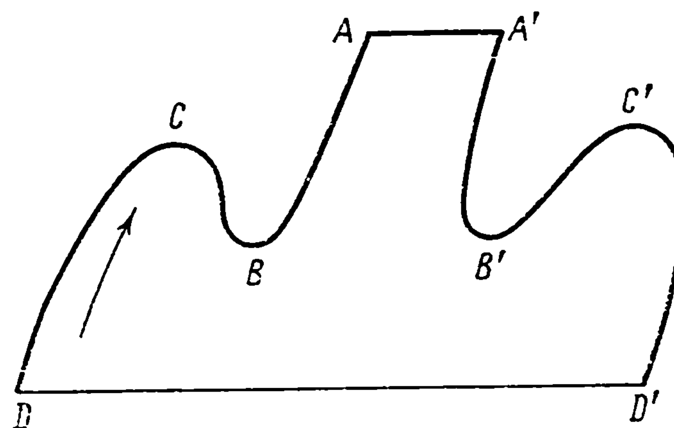


Рис. 4

промежуточной высоте; дуга эта пробегается в направлении, показанном стрелкой. Тогда можно построить преобразованную дугу $D'C'B'A'$, которая расположена так, как показано на рис. 4, и замкнуть обе дуги горизонталями AA' и $D'D$. Ясно, что контур $DCBAA'B'C'D'D$ положителен, и дугу $DCBA$ мы назовем *компенсированно положительной*. Ниже мы все же не будем пользоваться компенсированно положительными дугами.

Перейдем теперь к дугам $X=c$. Пусть AMB — одна из этих дуг, пробегаемая в направлении AMB.

Рассмотрим на спрямленном изображении хорду BA этой дуги, которая принадлежит горизонтали $x=c$, если, как мы это предполагаем, концы A и B будут точками пересечения $X=c$ и $x=c$. Рассмотрим контур $AMBA$, образованный этой дугой и ее хордой. Дугу мы назовем *определенной*, *положительной* или *отрицательной*, в зависимости от того, определенным, положительным или отрицательным является сам контур.

Элементарные дуги всегда являются *определенными*; знак дуги AMB тот же, что и знак произведения $\alpha\beta\gamma$, где:

$\alpha=+1$, если номер и ранг A нечетные, и $\alpha=-1$, если они — четные;

$\beta=+1$, если ранг A меньше ранга B, и $\beta=-1$ в противоположном случае;

$\gamma=+1$, если номер A меньше номера B, и $\gamma=-1$ в противоположном случае; действительно, дуга AMB пробегается слева направо, если $\beta=+1$; она находит над своей хордой тогда, когда $\alpha\gamma=+1$.

В качестве второго примера рассмотрим случай дуги AMB, причем ранги A и B будут последовательными на рассматриваемом уровне; подобная дуга всегда является *определенной*; знак ее опять-таки совпадает со знаком произведения $\alpha\beta\gamma$.

§ 10. Контур C

Представим себе некоторый контур C, замкнутый в широком смысле и образованный исключительно дугами $X=x$ и дугами $X=c$, причем дуги или *все положительны*, или *все отрицательны*; направление, в котором пробегается контур C, задано. Пусть C' — контур, преобразованный из C; он составлен из дуг $(X)=x$ и дуг $x=c$.

Я утверждаю, что для того чтобы установить теорему, являющуюся предметом настоящего мемуара, достаточно установить существование этого контура C.

Для этого я постараюсь определить индексы контура $C-C'$ относительно некоторой точки плоскости, но воспользуюсь круговым изображением, чтобы контуры C и C' были замкнутыми.

Итак, пусть

$$A_1B_1MA_2B_2M_2\ldots A_nB_nM_nA_1$$

— контур C, и

$$A_1'B_1'M_1'\ldots M_n'A_1'$$

— преобразованный из него контур C'; дуги A_iB_i будут дугами $X=x$, и для определенности рассуждения пусть все они *положительны*; дуги $B_iM_iA_{i+1}$ будут дугами $X=\text{const}$, и все они также положительны; дуги $A_i'B_i'$ будут дугами $(X)=x$, а дуги $B_i'M_i'A_{i+1}'$ дугами $x=c$. Точки A_i и A_i' (или же B_i и B_i') находятся на одной и той же высоте на спрямленном изображении, так что мы можем начертить дуги A_iA_i' и B_iB_i', которые

будут дугами $x=c$, т. е. горизонталями при спрямленном изображении и окружностями при круговом изображении. Тогда получим

$$C-C'=A_1B_1B'_1A'_1A_1+B_1M_1A_2A'_2M'_1B'_1B_1+A_2B_2B'_2A'_2A_2+$$
$$+B_2M_2A_3A'_3M'_2B'_2B_2+\ldots+B_nM_nA_1A'_1M'_nB'_nB_n.$$

Действительно, если мы рассмотрим различные слагаемые в правой части, то увидим, что дуга $B_1B'_1$ первого уничтожается дугой B'_1B_1 второго, а дуга $A_2A'_1$ второго уничтожается дугой A'_2A_2 третьего и т. д. и, в конце концов, дуга $A_1A'_1$ последнего уничтожается дугой A'_iA_i первого.

Контур $A_1B_1B'_1A_1$ аналогичен (если возвратиться к спрямленному изображению) контуру фигуры; контур $B_1M_1A_2A'_2M'_1B'_1B_1$ образован дугой $B_1M_1A_2$ и ее хордой (опять-таки на спрямленном изображении) и т. д. *Все эти контуры положительны*, так как дуги A_1B_1, $B_1M_1M_2$, ... положительны.

Итак, контур $C-C'$ положителен. Я утверждаю: это доказывает, что *здесь не может быть положительного интегрального инварианта.* Действительно, пусть I — подобный инвариант. Пусть $I(R)$ будет тем, что дает этот инвариант, когда интегрирование распространено на область R.

Контуры C и C' разделят плоскость (на круговом изображении) на некоторое число областей R_i; положим,

$$I(C)=\sum N_kI(R_k),\quad I(C')=\sum N'_kI(R_k),$$

где N_k — индекс контура C и N'_k — индекс контура C' относительно произвольной точки области R_k (ясно, что эти индексы будут одинаковыми для двух точек, принадлежащих одной и той же области R_k). Так как I является инвариантом, то должно иметь место равенство

$$I(C)=I(C').$$

С другой стороны, так как контур $C-C'$ положителен, то

$$N_k\geqslant N'_k,$$

причем знак равенства не может иметь места для всех областей, ибо наши два контура не совпадают; с другой стороны, поскольку инвариант положителен, то отсюда

$$I(R_k)>0$$

и, следовательно,

$$I(C)>I(C'),$$

что противоречиво [1].

Если, в частности, контур C не имеет двойной точки (на круговом изображении), то он не сможет пересечь преобразованного контура C', так что один из этих контуров будет находиться целиком внутри другого;

это справедливо для большинства примеров, которые мы рассмотрим ниже.

Кроме контуров C и C', мы рассмотрим другие контуры C'' и C''', определенные следующим образом. Контур C'' выводится из контура C заменой в нем каждой из дуг $X=c$ ее хордой (на спрямленном изображении); контур же C''' будет преобразованным из него, так что

C	образуется из дуг	$X=x$	и из дуг	$X=c$,
C'	»	$(X)=x$	»	$x=c$,
C''	»	$(X)=x$	»	$x=c$,
C'''	»	$(X)=x$	»	$(X)=c$.

Итак, контуры C''' и C'' являются относительно обратного преобразования T^{-1} тем же, чем C и C' относительно T. Действительно, от одного случая к другому можно перейти, заставив (X) играть роль X, и наоборот.

Я утверждаю теперь, что если дуги, из которых образован C, имеют один и тот же знак, например, если все они положительны, то те, которые образуют C''', будут также одного знака, я хочу сказать, что они все будут отрицательными.

Если A является одной из дуг C, принадлежащей, например, кривой $X=x$, положительной и пробегаемой вверх, то преобразованная из нее дуга A' будет входить в состав C''', причем пробегается также вверх. Однако относительно T^{-1} она будет принадлежать к отрицательной кривой $(X)=x$; действительно, если A', преобразованная из A с помощью T, находится справа от A, то A, преобразованная из A' с помощью T^{-1}, будет находиться слева от A'.

Пусть теперь AMB — дуга $X=c$, составляющая часть C, а AB — ее хорда, являющаяся частью C''. Пусть, затем $A'M'B'$ и $A'B'$ дуги, преобразованные из первых, и соответственно являющиеся частями C' и C'''. Тогда AB и $A'M'B'$ составят часть кривой $x=c$, а $A'B'$ — часть кривой $(X)=c$, так что на спрямленном изображении AB окажется хордой AMB, тогда как $A'M'B'$ станет хордой $A'B'$. Если затем контур $AMBA$, образованный AMB и ее хордой, положителен, то положительным будет и преобразованный из него контур $A'M'B'A'$, а обратный контур $A'B'M'A'$, образованный дугой $A'B'$ и ее хордой, будет отрицательным. Это и следовало доказать.

Таким образом, очевидно, что если $C-C'$ является положительным, то то же самое будет и с $C'-C'''$; следовательно, безразлично, рассматривать ли C, C' и T или же C''', C'' и T^{-1}.

§ 11. Сеть

Представим себе сеть, построенную следующим образом: возьмем круговое изображение, начертим, кроме граничных окружностей, окружности $x=c$, которые касаются (либо в вершине, либо в основании) кри-

вой $X=x$. Каждая из этих окружностей пересечет различные кривые $X=x$ и коснется одной из них. Каждой из точек пересечения или касания будет соответствовать *узел* сети. Соединим эти узлы путями, соответствующими определенным дугам, о которых шла речь в § 9. Рассмотрим, например, одну из окружностей $x=c$, которые мы начертили; вычертим пути, соответствующие всем положительным и отрицательным дугам соответствующей кривой $X=c$. (Итак, мы получим пути, соответствующие всем элементарным дугам этой кривой, которые, как мы уже сказали, все являются определенными; среди них будут пути, соответствующие всем дугам этой кривой, концы которых имеют последовательные номера на рассматриваемом уровне; но будут еще и другие пути, так как вообще есть и другие определенные дуги.) Это будут *горизонтальные* пути сети. Мы соединим, сверх того, узлы $x=c$ с узлами на окружности непосредственно внешней или непосредственно внутренней с помощью *наклонных путей*. Эти последние будут соответствовать определенным дугам кривых $X=x$, один из концов которых будет находиться в одном из таких узлов.

Условимся, что ни один из этих путей нельзя пробегать в двух направлениях, иначе говоря: или все направления путей соответствуют положительной дуге, или же *все* они пробегаются в противоположном направлении. Вот как мы проведем выбор между этими двумя соглашениями: ветви $X=x$, которые примыкают к внешней граничной окружности $x=a$, имеют один и тот же знак (ср. § 3), тогда как те, которые примыкают к $x=b$, имеют противоположный знак. Если все первые положительны, то мы условимся, что все пути должны пробегаться в направлении положительных дуг; в противоположном случае будет иметь место обратное.

Итак, всякий наклонный путь, примыкающий к $x=b$ (который соответствует при спрямленном изображении самому низкому уровню, а при круговом изображении — внутренней граничной окружности), должен пробегаться вверх; всякий наклонный путь, примыкающий к $x=a$, пробегается вниз.

Для того чтобы наша теорема оказалась справедливой, т. е. для того чтобы существовал контур C, *достаточно, чтобы можно было вернуться к исходной точке, пройдя пути сети в предписанном направлении.*

Отсюда вытекает следующее правило: назовем *тупиком* любой узел сети, к которому сходятся некоторые пути, но *из которого не выходит ни один путь*. Исключим из нашей сети все тупики, а также все пути, попадающие в них. Может случиться, что измененная таким образом сеть будет содержать тупики, которые не принадлежали к первоначальной сети. Мы будем оперировать с этими *индуцированными* тупиками так, как с *первичными*, и продолжим наше оперирование, пока не вынуждены будем остановиться, что может произойти в двух случаях.

1. Может оказаться, что мы вынуждены остановиться, ибо придем к модифицированной сети, которая более не будет содержать тупиков,

ни индуцированных, ни первичных. В этом случае наша теорема будет доказана для рассмотренного преобразования T. Действительно, будем исходить из какого-либо узла: это возможно, так как это не тупик; мы прибудем ко второму узлу, откуда опять-таки сможем выйти. Будем продолжать таким образом до тех пор, пока не вернемся к узлу, через который мы уже проходили, что должно произойти, так как число узлов конечное. Таким образом, мы опишем замкнутый контур, пробегая все пути в соответствии с предписанным направлением, и этот контур будет контуром C.

2. Может случиться, что мы остановимся, так как исчерпаем все узлы. Тогда можно было бы доказать, что существуют такие преобразования T, для которых наша теорема не справедлива.

Итак, мы должны действовать следующим образом: необходимо построить всеми возможными способами кривые $X=x$, *соблюдая* при этом *условия* § 8; затем мы построим сеть, определенную выше, и будем действовать с нею описанным порядком. Если в любом случае мы вынуждены будем остановиться в соответствии с первым случаем, то наша теорема справедлива; но даже одно-единственное исключение достаточно для доказательства ее неверности.

§ 12. Частные случаи

Первый частный случай. Первый частный случай, который нам предстоит рассмотреть, это случай *нормального распределения*, т. е. тот, когда точки пересечения каждой из кривых $x=c$ с *соответствующей* кривой $X=c$ распределены нормальным образом в смысле § 4. Иначе, что сводится к тому же, этот тот случай, когда номер каждой ветви равен ее рангу (и когда, следовательно, нет ни обратного основания, ни обратной вершины).

В этом случае я утверждаю, что наша сеть не содержит тупика и что, следовательно, можно построить контур C. Действительно, если мы рассмотрим кривую $X=c$, то эта кривая не будет содержать никакой определенной дуги, кроме элементарных дуг, которые одновременно будут первичными и конечными и которые попеременно будут положительными и отрицательными (если договориться пробегать $X=c$ в направлении ворастающих Y). Исключение будет, когда кривая $x=c$ *коснется* кривой $X=c$ и, следовательно, кривой $X=x$ в основании или в вершине. Действительно, в этом случае две из точек пересечения сольются, элементарная дуга, соединявшая одну и другую, исчезнет, так что мы получим две последовательные дуги одного и того же знака. Это значит, что из двух горизонтальных путей, которые заканчиваются в основании или в вершине, один удаляется от такой точки, а второй приближается к ней.

Итак, здесь не может быть тупика в узле, не являющемся ни основанием, ни вершиной, так как один из двух наклонных путей, которые там

заканчиваются, удаляется; однако его не может быть также в основании или в вершине, так как один из двух горизонтальных путей, которые там заканчиваются, удаляется.

Второй частный случай. Предположим, что у нас есть лишь два вида кривых $X=x$: кривые L, примыкающие к внешней окружности $x=a$, и кривые K, примыкающие к $x=b$.

Предположим, что, пробегая кривые L от одного конца до другого, мы встретим ветви постоянно возрастающего ранга, и что так же обстоит дело при пробегании кривых K. (Это случится, в частности, если мы предположим, что ни в одной точке кривых L и K касательная, при спрямленном изображении, не будет вертикальна.)

Установив это, мы сможем построить контур C' следующим образом: пусть L' и K' преобразования кривых L и K; при пробегании кривой L слева направо (на спрямленном изображении), все ветви, пробегаемые вниз, будут, например, четными (т. е. четного номера или ранга), а все те, которые будут пробегаться вверх, окажутся нечетными; для кривых K все будет наоборот.

Кривые L смогут иметь лишь четные основания и нечетные вершины; следовательно, у них не будет ни обратного основания, ни обратной вершины, т. е. здесь номера следуют в том же порядке, что и ранги. Если, наоборот, окажется, что на кривых L нисходящие ветви нечетны, а на кривых K они окажутся четными, то в случае кривых K номера будут следовать в том же порядке, что и ранги; однако будем считать, что перед нами первый случай.

Теперь я предположу (оставаясь при спрямленном изображении), что кривые L' — светящиеся, а кривые K — матовые; кривые L будут светиться, но ни одна из их точек не будет испускать свет во всех направлениях; она сможет испускать свет лишь горизонтально (направо, если кривые L отрицательны, а кривые K положительны, налево — в противоположном случае). Все происходит так, как если бы в каждой из этих точек находился маленький параболический рефлектор, отбрасывающий пучок параллельных лучей. При этих условиях часть плоскости будет освещена, а часть окажется в тени. *Граница тени и будет не что иное, как контур C'*. Я не привожу доказательства, так как оно длинное.

Третий частный случай. Имеются лишь два вида кривых $X=x$: кривые L, примыкающие к $x=a$, кривые K, примыкающие к $x=b$. На каждой из этих кривых, при пробегании их слева направо, встречаются ветви с постоянно возрастающими номерами.

Этот случай по отношению к T^{-1} составляет то же, что второй по отношению к T. Следовательно, можно построить контур C'' (из которого можно получить C и C'), рассматривая кривые K, например, как матовые, тогда как кривые L будут испускать горизонтальные световые лучи в подходящем направлении. Границей тени будет контур C''.

§ 13. Пояснения к рисункам

Кроме трех случаев, рассмотренных в предыдущем параграфе и обладающих некоторой общностью, я изучил также большое число частных случаев и мне всегда удавалось построить контуры C, C', C'', C'''. Не приходится и думать о том, чтобы привести здесь все эти случаи; некоторые примеры представлены на приложенных здесь рисунках, которые нуждаются в нескольких пояснениях.

Я использовал спрямленное изображение; мы знаем, что на этом изображении кривые воспроизводятся периодически, так как когда y переходит в $y+2\pi$, получаются те же фигуры; *я давал только один период* и нетрудно добавить другие.

Контур, представленный на каждом рисунке, — контур C'', образованный дугами $X=x$ и дугами $x=c$, представленными горизонтальными отрезками. Граничные горизонты $x=a$ и $x=b$ даны сплошными линиями *так же, как и контур* C''; наоборот, часть кривых $X=x$, не входящих в состав C'', дана пунктиром. Цифра, находящаяся около каждой ветви $X=x$, является ее номером. Около каждой кривой $X=x$ стоит знак $+$ или —, в зависимости от того, положительна ли она или отрицательна.

Нетрудно проверить на каждом рисунке, что шесть условий § 8 выполнены; для проверки первого условия, можно сделать сечение произвольной горизонталью и получить таким образом последовательность номеров в определенном порядке, учитывая лишь ветви, пересеченные этой горизонталью; затем станет видно, что если начертить кривую, которая пересечет горизонталь в соответствии с порядком номеров точек пересечения, то эта кривая не будет самопересекаться.

Что касается второго условия, то можно установить, например на рис. 14, что в вершине 63 сходятся ветви 6 и 3, но что поскольку вершина 45 находится ниже, то горизонталь вершины 63 не встретится с ветвями 4 и 5, что на этом уровне номера 6 и 3 окажутся последовательными.

Относительно третьего условия: можно увидеть, например на рис. 8, что основание 98, являющееся обратным, нечетное, тогда как вершина 87, также обратная, четная.

Я не буду останавливаться ни на четвертом, ни на пятом условии, проверить их соблюдение легко. Что касается шестого условия, то возьмем для примера рис. 21; здесь мы видим, что ветви 8 и 7 положительны, а ветви 3, 6, 5, 4 — отрицательны; ранг первых двух меньше, но поскольку это ветви самого большого номера (и самого маленького ранга) и они положительны, то условие выполнено.

Предположим, что наш контур пробегается слева направо. В этих условиях дуги $X=x$, составляющие часть C'', и дуги $x=c$ того же самого контура или, скорее, соответствующие дуги $X=c$, оказываются все определенными и одного знака, а именно:

они положительны на рис. 5—7, 10, 11, 18, 20, 23;

они отрицательны на рис. 8, 9, 12—17, 19, 21, 22, 24.

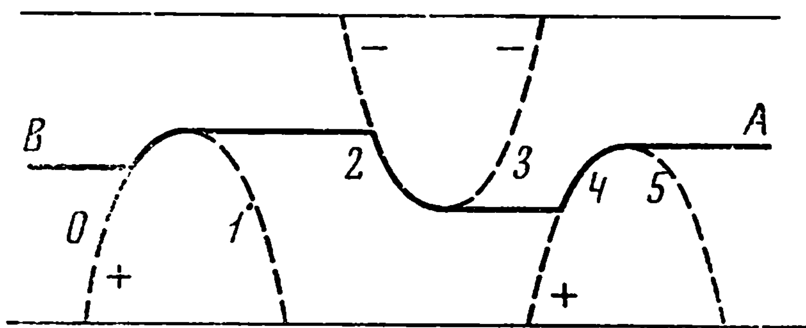


Рис. 5

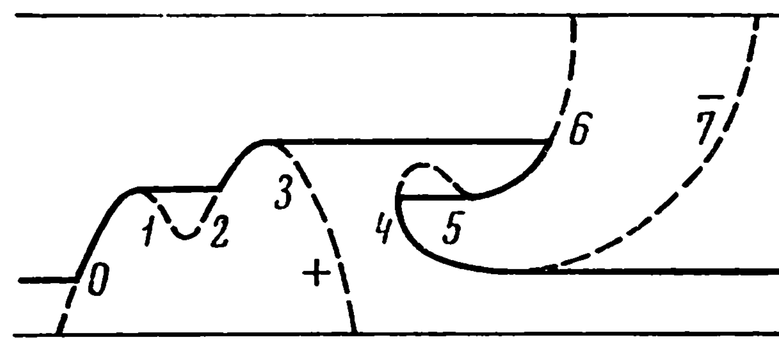


Рис. 6

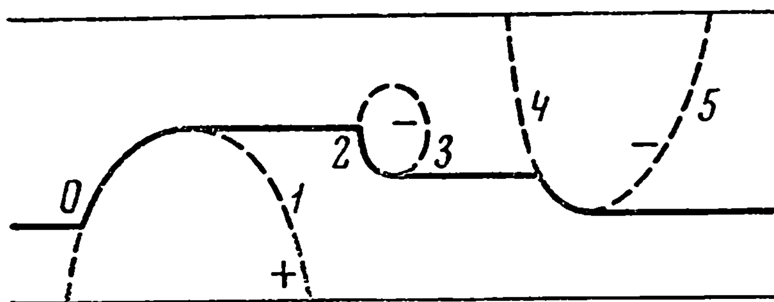


Рис. 7

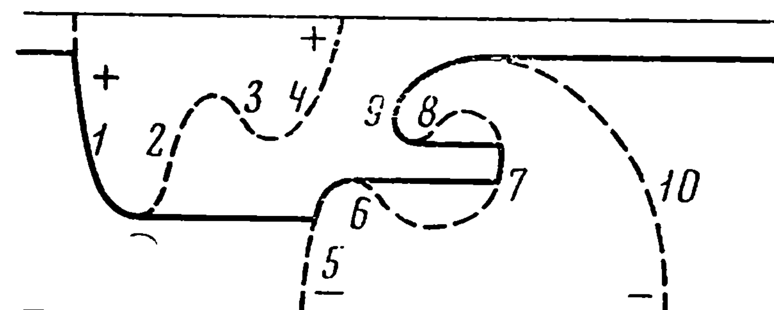


Рис. 8

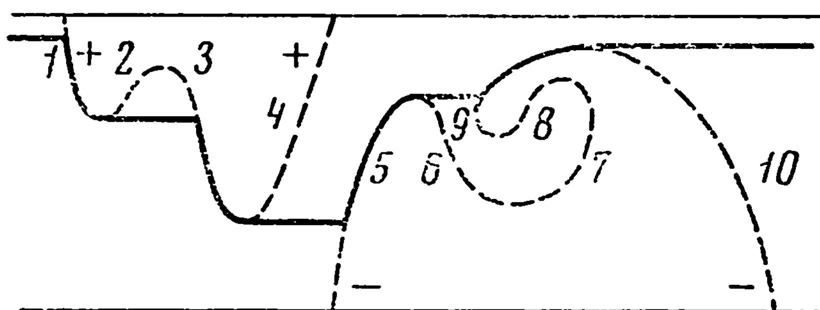


Рис. 9

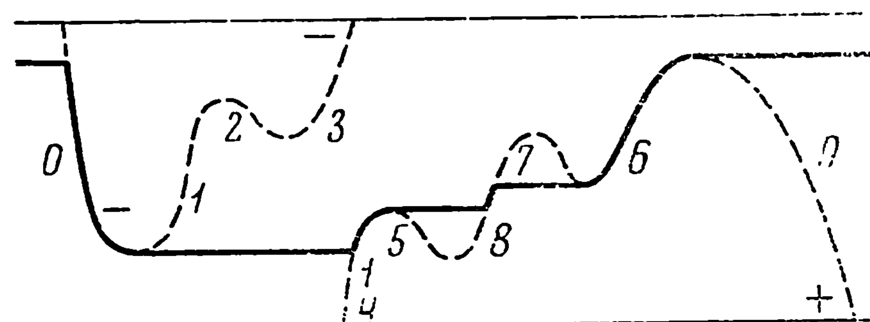


Рис. 10

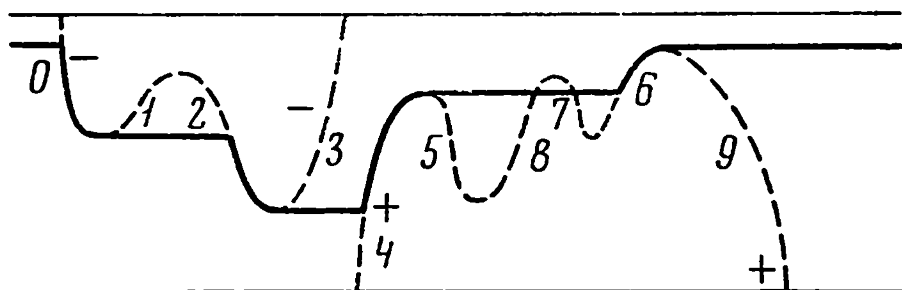


Рис. 11

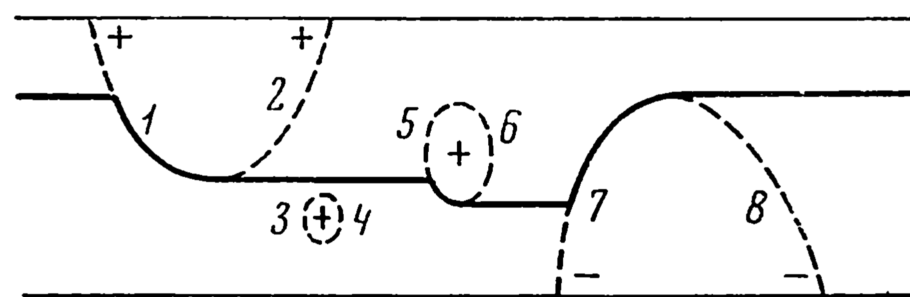


Рис. 12

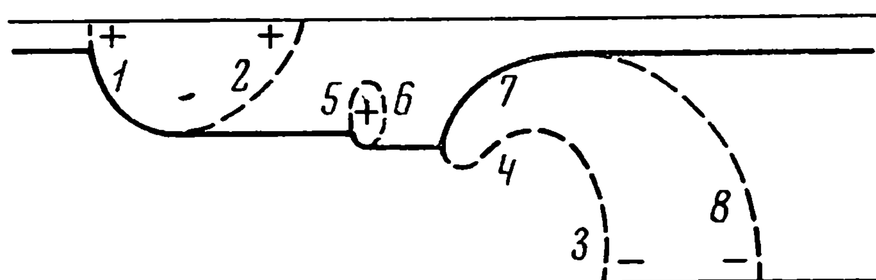


Рис. 13

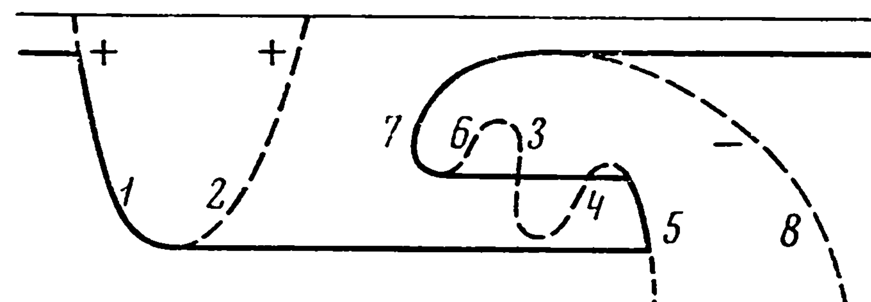


Рис. 14

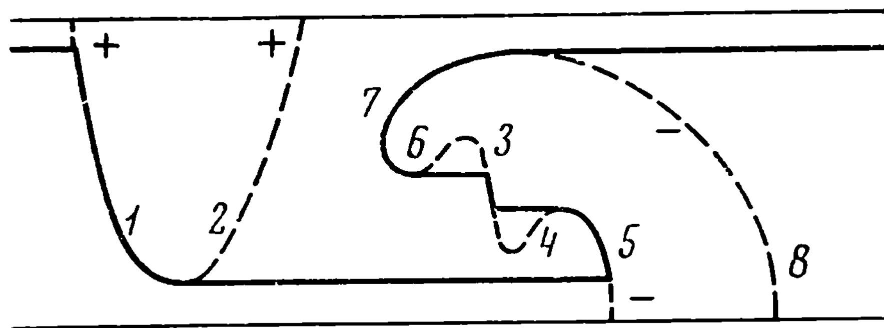


Рис. 15

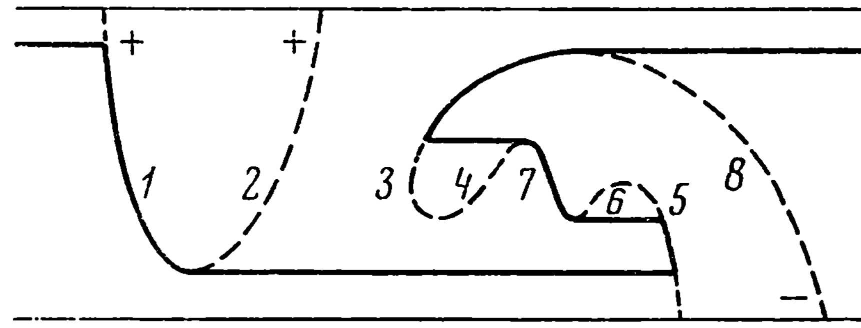


Рис. 16

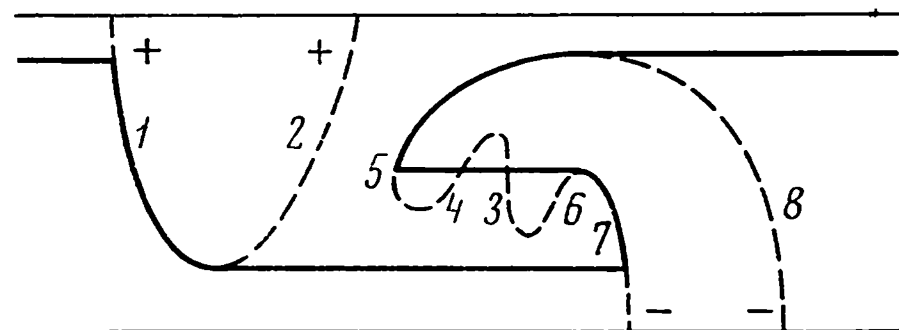


Рис. 17

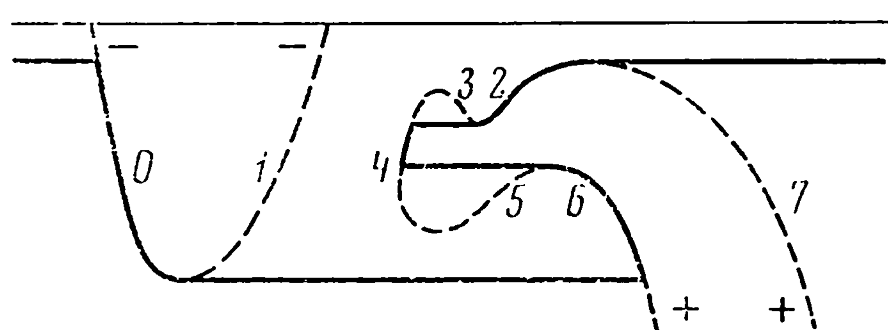


Рис. 18

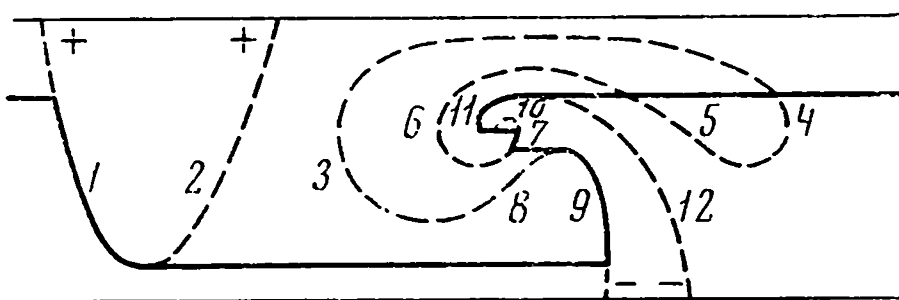


Рис. 19

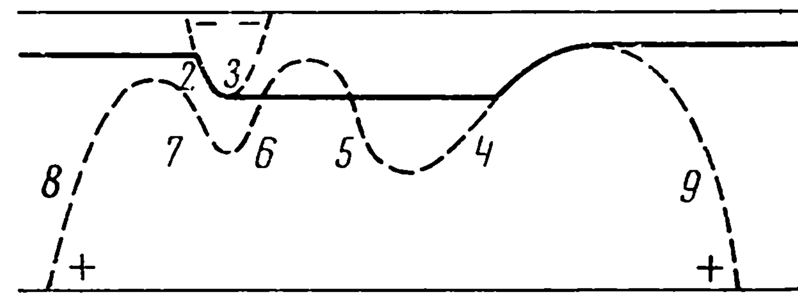


Рис. 20

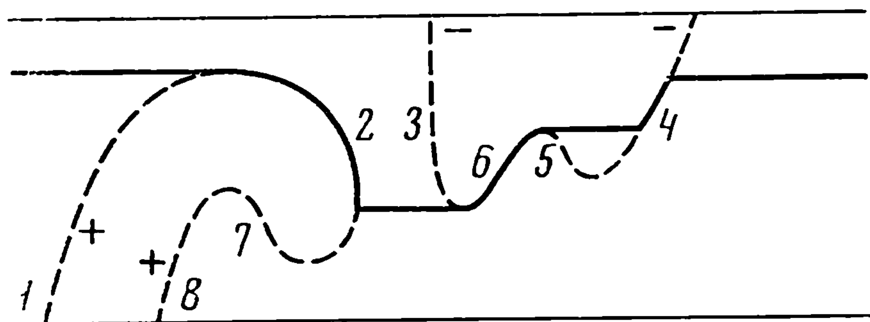


Рис. 21

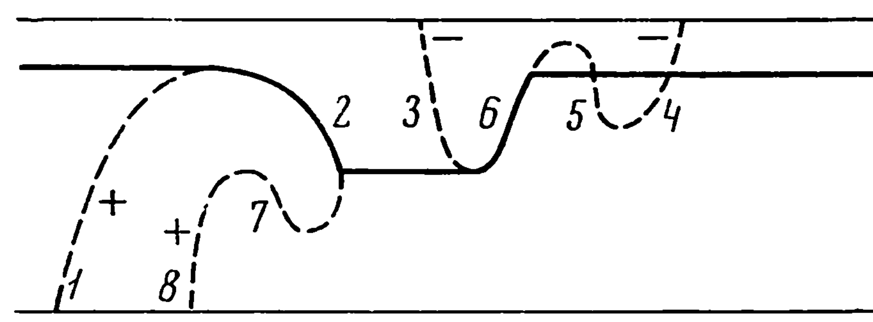


Рис. 22

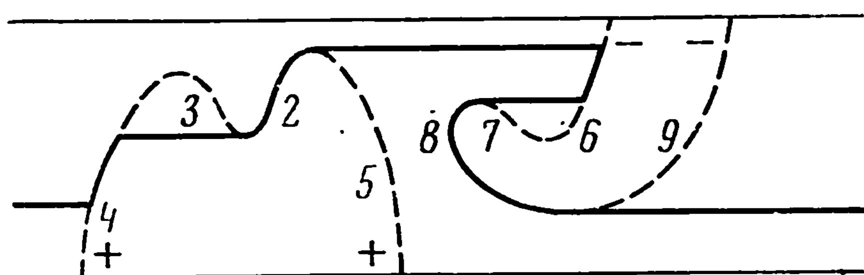


Рис. 23

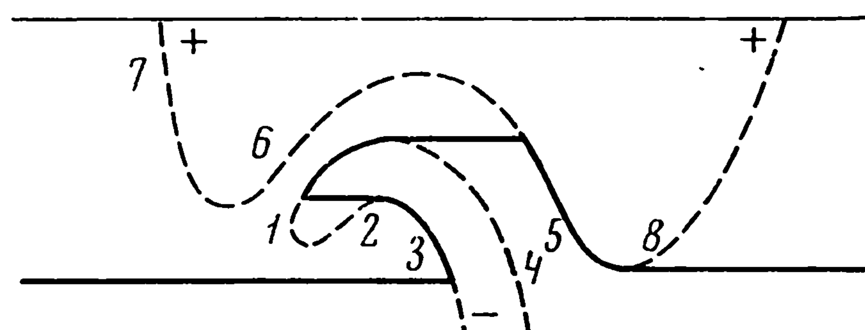


Рис. 24

Действительно, например на рис. 5, можно видеть, что положительные ветви $X=x$ пробегаются с подъемом, а отрицательные — со спуском.

С другой стороны, дуги $x=c$ или, скорее, соответствующие дуги $X=c$, вполне определенны. Рассмотрим, например, рис 5. Здесь мы видим три горизонтали; первую, я ее обозначу 12, которая идет от ветви 1 к ветви 2; вторую, которая идет от 3 к 4; третью, которая выходит от ветви 5, и в случае продолжения, пошла бы к ветви под номером 6 (не представленной на рисунке), отличающейся на один период от ветви под номером 0. Эта горизонталь заканчивается на рисунке в A, но ее следовало бы дополнить горизонтальным отрезком, который отличался бы на период от изображенного на рисунке, который идет от точки B к ветви 0. Все эти горизонтали соответствуют элементарным дугам, и, следовательно, являются определенными, так как номера их концов последовательны. То же самое будет и для рис. 8, например, для горизонтали 25, так как номера 2 и 5 являются последовательными на уровне этой горизонтали, которая не пересекает ветвей 3 и 4.

Рассмотрим теперь рис. 9. Если продлить горизонталь 69, то она пересечет некоторые ветви $X=x$, но ни одной точки пересечения не окажется между 6 и 9; следовательно, *ранги* концов являются последовательными на рассматриваемом уровне. Итак, соответствующая дуга опять-таки оказывается определенной. На рис. 19 горизонталь 10.13, которая идет от ветви 10 к ветви 13, отличаясь от ветви 1 на один период, тоже соответствует определенной дуге; действительно, между концами 10 и 13 находятся точки пересечения 5 и 4, но их номера не заключаются между 10 и 13. Отсюда следует, что соответствующая дуга $X=c$ не пересекает своей хорды (на спрямленном изображении).

Остается определить знак этих разных дуг. Я возьму в качестве примера рис. 8; дуга 25 отрицательна, так как она пробегается слева направо, а 2 — четно и < 5; 67 отрицательна, так как она пробегается слева направо, а 6 четное и < 7; 78 отрицательна, так как она пробегается влево, а 7 нечетно и < 8; наконец, 10.11 отрицательна по тем же причинам, что и 25 и 67.

Рис. 5—7 соответствуют первому частному случаю § 12 (нормальное распределение); рис. 8 и 9 соответствуют третьему случаю § 12; здесь легко распознаются контуры тени, определенные в том параграфе; рис. 10, 11 и 20 соответствуют второму случаю § 12; рис. 10 и 11 выводятся из 8 и 9 переходом от T к обратному преобразованию T^{-1}. Наконец, рис. 12 и 13 показывают, как контуры тени § 12 должны видоизменяться при появлении *островов*, т. е. кривых $X=x$, замкнутых в узком смысле.

ПУАНКАРЕ И ТОПОЛОГИЯ *

П. С. Александров

На вопрос, каково отношение Пуанкаре к топологии, можно ответить одним предложением — он ее создал; но можно ответить и циклом лекций, в которых более или менее подробно излагались бы основные топологические результаты Пуанкаре. При первом из этих двух подходов к моей сегодняшней задаче я могу считать ее исчерпанной; для второго подхода я, естественно, не имею времени. Приходится искать то или иное промежуточное компромиссное решение, конечно неудачное, как все компромиссы, и во всяком случае более близкое к первому варианту, чем ко второму. Это решение может являться лишь попыткой возобновить и освежить эмоцию восхищения актом грандиозного научного творчества, который совершил великий французский геометр в области, влияние которой на все математическое познание не только превзошло все предвидения современников, но все еще возрастает с каждым годом.

Пуанкаре жил в романтическую эпоху истории математических наук, когда впервые (им самим и Ф. Клейном) была доказана непротиворечивость неевклидовой геометрии, вследствие чего наши воззрения на геометрию и самое понятие геометрического пространства несказанно расширились; когда новые геометрические идеи только что нашли свое применение (в том числе опять-таки в работах самого Пуанкаре) к специальной теории относительности — теории, уже достаточной, чтобы поколебать наши представления о мироздании, казавшиеся незыблемыми со времен Галилея и Ньютона; в эпоху, когда в абстрактных глубинах самой математики возникла теория, по мнению многих выдающихся математиков лежащая уже вне их науки, быть может, даже вне науки вообще, — теория множеств, осуществившая в математике переворот, столь же значительный, как и переворот, произведенный в физике теорией относительности.

По своим математическим вкусам и по унаследованным им традициям Пуанкаре был представителем классической математики, великой фран-

---

* Свободное изложение речи, произнесенной автором (под этим же заглавием) на посвященном столетию со дня рождения Пуанкаре торжественном выездном заседании (в Гааге) Международного математического конгресса (Амстердам, 1954).

цузской школы математического анализа, созданной Лагранжем, Лапласом, Коши. Пуанкаре представлял математический анализ в универсальном понимании этого слова, включающем и теорию функций, и все аспекты дифференциальных уравнений, и «математическую физику» в самом широком смысле. И универсальность Пуанкаре как математика отразилась в том, каким именно образом он создал новую область математики — топологию. Для Пуанкаре топология сначала и прежде всего была могущественным инструментом для решения проблем, возникающих в классических отделах математики. Ими были в первую очередь: теория функций комплексного переменного, тесные связи которой с геометрией, лишь в зародыше усмотренные Риманом, Пуанкаре впервые понял во всей их глубине; теория дифференциальных уравнений — теория, не отделимая для Пуанкаре от небесной механики; сама геометрия. Но, понимая мощь топологических методов в «классической математике» и часто предвидя ее там, где в его время эти методы еще не могли быть во всю их силу применимы, Пуанкаре открыл для математики и целый мир новых проблем — проблем «качественного», т. е. именно топологического характера, целый мир, по своему существу недоступный не только методам, но и самому, если так можно выразиться, мировоззрению «классической» математики, в центре которой находились формула и вычисление (т. е. техника оперирования с формулами). Таким образом, величайший представитель классической математики Пуанкаре, как никто другой, «взорвал изнутри» ее традиции и открыл доступ в нее не только новым методам исследования, но, что может быть еще важнее, и новым способам видеть вещи и интересоваться ими.

Поясним немного только что сказанное. Всякое математическое творчество в конечном счете имеет своей основой нашу (математическую) интуицию. Продолжительное, упорное и сосредоточенное размышление в конце концов приводит к более или менее внезапному усмотрению существа тех закономерностей, на разыскание которых были направлены наш труд и размышление. Цель последующего исследования, часто также очень кропотливого, в проверке происшедшего усмотрения, в проверке нашей интуиции, которая, если она подтвердится этой проверкой, и окажется настоящим ядром полученного результата. Никто лучше не изложил этот механизм математического творчества, чем это сделал Пуанкаре в своих книгах «Наука и метод», «Наука и гипотеза». Но характер математической интуиции отнюдь не является одним и тем же, во всех случаях и у всех математиков: интуиция Якоби была не похожа на интуицию Гильберта, а интуиция Вейерштрасса — на интуицию Пуанкаре.

Вероятно, существует то, что можно было бы назвать «интуицией формулы»: способность предвидеть результат сложного преобразования (например, в тензорном анализе). Существует и интуиция алгебраически-логического характера — ви́дение (и предвидение) сложных логических соотношений (например, в теории множеств, в абстрактной алгебре). И, наконец (вернее, прежде всего), существует геометрическая интуиция,

иногда о ней говорят как об единственно существующей в математике «подлинной» интуиции. Я думаю, что это неверно и что действительно существуют различные виды математической интуиции даже и за пределами тех немногих примеров, которые я назвал.

«Топологическая» интуиция обычно считается частным случаем общегеометрической; однако этот частный случай обнаруживает сам по себе такое богатство и разнообразие различных возможностей и, с другой стороны, так сильно отличается от других видов геометрической интуиции, что, вероятно, заслуживает выделению в особую категорию. Интуиция тополога не связана с прямыми линиями, с перспективными преобразованиями и другими образами, столь фундаментальными, например, для проективного геометра. Топологическая интуиция — это интуиция формы и расположения фигур в чистом виде, чистая «Freude an der Gestalt», как говорил Клейн. Это — наиболее геометрическая среди всех разновидностей геометрической интуиции.

Пуанкаре владел ею как никто из математиков его времени и предшествующих эпох; может быть, только Риман мог соперничать с ним в этом отношении, но он не успел развить ее с такой широтой и разнообразием применений, как Пуанкаре.

Топологическая интуиция пронизывает большинство самых замечательных работ Пуанкаре: теорию автоморфных функций и униформизацию (это высшее торжество «римановского» подхода в теории функций комплексного переменного); качественную теорию дифференциальных уравнений, являющуюся, может быть, лучшей иллюстрацией того, как совершенно по-новому умел видеть Пуанкаре самые классические объекты математики и какой небывалой проблематике он умел их подчинять. И, наконец, — весь цикл его собственно топологических работ.

Не чем иным, как именно проявлением гениальной топологической интуиции был тот факт, что основной стержень для всего дальнейшего развития топологии Пуанкаре увидел в понятии гомологии. При этом первая формулировка этого понятия (в основном мемуаре 1895 г. «Analysis situs») апеллировала именно к непосредственной геометрической наглядности, под которую лишь несколько лет спустя была подведена строгая логическая база.

Столь же интуитивным, хотя совершенно строго формулированным, было второе основное топологическое понятие, введенное Пуанкаре, — понятие фундаментальной группы. Вводя это понятие, Пуанкаре оказывается зачинателем всего огромного направления гомотопической топологии, дальнейшим развитием которого мы обязаны прежде всего Брауэру, затем Хопфу, Гуревичу и длинному ряду последующих математиков. Здесь следует заметить, что определение гомотопических групп, т. е. групп, обобщающих понятие фундаментальной группы на любое число измерений, было впервые дано в 1932 г. знаменитым чешским топологом Э. Чехом, который, правда, не подверг их дальнейшему исследованию; это последнее, как известно, составляет заслугу В. Гуревича.

К наиболее замечательным и наиболее рано разработанным частям гомотопической топологии относится теория векторных (и поливекторных) полей и их особенностей, тесно связанная с теорией неподвижных точек непрерывных отображений. Основателем этой теории опять-таки является Пуанкаре: первые относящиеся к ней определения и факты, в частности, фундаментальное понятие индекса особенности векторного поля, он установил еще в восьмидесятых годах в своих работах по качественной теории дифференциальных уравнений, т. е. еще до создания своих собственно топологических работ. В настоящее время трудно переоценить основополагающее значение этих идей и результатов Пуанкаре для дальнейшего развития не только теории дифференциальных уравнений, но и всего современного математического анализа. В частности, что касается специально теорем о существовании неподвижных точек при тех или иных непрерывных отображениях, то Пуанкаре уже понимал значение этих теорем как средства доказательства теорем существования в анализе. Это видно хотя бы по тем огромным усилиям, которые он затратил на доказательство своей «последней геометрической теоремы» — о существовании неподвижной точки для определенного класса непрерывных отображений плоского кругового кольца на себя. Эта последняя работа Пуанкаре производит на читателя, я бы сказал, трагическое впечатление. В кратком введении к ней автор пишет, что никогда не публиковал столь несовершенного произведения: в самом деле, ему не удалось найти доказательства основного результата, «последней геометрической теоремы Пуанкаре», которому работа посвящена. Тем не менее Пуанкаре считал возможным и необходимым опубликование полученных им частных результатов — ввиду важности предмета, а также ввиду того, что, как он говорил, в своем возрасте он уж не надеется получить полное решение вопроса. В действительности Пуанкаре в это время было лишь 57 лет, и дело было, конечно, не в возрасте, а в уже начавшейся тяжелой болезни (в те времена почти недоступной хирургическому вмешательству), от которой он и умер год спустя. В общем виде «последняя геометрическая теорема Пуанкаре» была вскоре после его смерти доказана молодым американским математиком Дж. Д. Биркгофом, сразу прославившимся этим результатом. Но сейчас для нас важно констатировать, как глубоко мог Пуанкаре предвидеть значение топологических теорем типа «теорем о неподвижных точках» для анализа и для небесной механики, и отметить его как основоположника «метода неподвижных точек».

Сила геометрической интуиции Пуанкаре приводила иногда к тому, что он пренебрегал педантической строгостью доказательств. Тут есть еще и другая сторона: находясь под постоянным наплывом множества идей в самых различных областях математики, Пуанкаре «не успевал быть строгим», он часто бывал удовлетворен, когда его интуиция давала ему уверенность в том, что доказательство той или иной теоремы можно довести до полной логической безукоризненности, завершение доказательства предоставлял другим. Среди этих «других» бывали математики са-

мого высокого ранга. Я привожу письмо Пуанкаре к Брауэру (относящееся к последнему году жизни Пуанкаре и, насколько я знаю, еще нигде не опубликованное), которое, как мне кажется, хорошо иллюстрирует только что приведенную мысль.

ПИСЬМО ПУАНКАРЕ К БРАУЭРУ

Я очень благодарен Вам за Ваше письмо, но я не вижу, почему Вы сомневаетесь, что соответствие между двумя многообразиями является аналитическим: модули поверхностей Римана могут выражаться аналитически через константы фуксовых групп, правда, надо придавать некоторым переменным лишь вещественные значения, но функции этих вещественных переменных вовсе не потеряют своего аналитического характера. Но, может быть, Вы видите трудность в том, что одно из этих многообразий зависит не от констант группы, а от инвариантов. Если мне не изменяет память, я рассматривал многообразие, зависящее от констант фундаментальных подстановок группы; группе будет тогда соответствовать дискретная бесконечность точек этого многообразия; я подразделил затем это многообразие на частичные многообразия таким образом, чтобы одной группе соответствовало по одной точке в каждом из этих частичных многообразий (таким же образом, каким разбивают плоскость на параллелограммы периодов или фундаментальный круг на фуксовы многоугольники). Мне кажется, что при этом (не) может нарушиться аналитический характер соответствия. Что касается многообразия поверхностей Римана, то можно встретиться с затруднениями, если их рассматривать так, как это делал сам Риман. Можно, например, задать себе вопрос, не образует ли множество этих поверхностей два раздельных многообразия. Трудность исчезает, если рассматривать эти поверхности с точки зрения Клейна; непрерывность, отсутствие особенностей, возможность перейти от одной поверхности к другой непрерывным образом превращаются тогда в истины почти интуитивные. Я прошу у Вас извинения за отрывочный и беспорядочный характер этих объяснений: я не надеюсь, что они Вас удовлетворят, потому что я очень плохо их изложил, но я думаю, что они дадут Вам возможность уточнить те места, которые Вас затрудняют, с тем, чтобы я мог потом вполне Вас удовлетворить. Я счастлив, что это обстоятельство дает мне возможность войти в контакт с человеком Ваших достоинств.

Ваш преданный Вам коллега

Пуанкаре

Дата (по почтовому штемпелю) — 10 декабря 1911 г.

Приведенное письмо интересно не только как иллюстрация к некоторым чертам творческой манеры Пуанкаре; оно показывает также, что Пуанкаре был высокого мнения о математических, а именно топологических работах Брауэра. Речь может идти лишь о работах Брауэра, относящихся к двухлетию 1909—1911 гг. Очевидно, Пуанкаре не только хорошо знал эти работы в конце 1911 года (когда написано его письмо), но и ценил их глубину. Между тем, топологические работы Брауэра написаны в высшей степени трудно и уж совсем не в классическом стиле. Следова-

тельно, Пуанкаре даже в последний год своей жизни нашел в себе достаточно энергии и любознательности, чтобы овладеть математическими результатами и методами, относящимися к совсем другой манере математического творчества, чем его собственная, — черта, свойственная только самым большим ученым! Эту черту Пуанкаре сохранял в течение всей жизни. В 1883 году Кантор построил совершенное нигде не плотное (на отрезке) множество, носящее его имя («канторов дисконтинуум»). Это было гениальное открытие не только по тому значению, которое канторово множество приобрело во всей математике, но и потому, что в математику вошла совершенно новая конструкция, не похожая ни на что известное в науке до того. Кантор увидел геометрический образ, выходивший за пределы того, что считалось подвластным геометрической интуиции, небывало расширив этим ее горизонты, самые возможности нашего пространственного воображения. Он показал впервые, что эти возможности могут простираться на образования, относящиеся к той самой теории множеств, даже принадлежность которой к математике оспаривалась видными и уважаемыми учеными (например, Кронекером). И вот Пуанкаре был не только одним из первых математиков, воспринявших открытие Кантора; он был положительно первым математиком, применившим его к конкретно-аналитическим исследованиям (как говорят химики, in statu nascendi) в самый момент зарождения этого нового, столь непохожего на всю старую науку математического «существа».

Многие выдающиеся математики сделали те или иные замечательные специальные конструкции, идя по новому пути геометрической интуиции, проложенному Кантором: Брауэр построил свои первые примеры неразложимых континуумов; Антуан — свои поразительные дуги, фундаментальная группа дополнительного пространства к которым отлична от нуля; Александер — свои «рогатые» сферы. Но первый шаг сделал Кантор, а Пуанкаре был первым, кто понял не только значительность этого первого шага, но и его плодотворность, для математического анализа, а с ним и для всей математики. Заметим наконец, что, как показывает последний мемуар Пуанкаре, он к концу своей жизни в значительной степени владел техникой геометрической теории множеств, как она сложилась к тому времени.

Вернемся к введенному Пуанкаре понятию гомологии. Как уже было упомянуто, это понятие было введено в первом топологическом мемуаре Пуанкаре — в знаменитом «Analysis situs» интуитивным образом. Однако в данном случае этот недостаточно строгий подход имел, так сказать, и фактические последствия, послужившие поводом к обоснованной критике норвежского математика Хегора (Heegard). Дело в том, что в своем первом мемуаре Пуанкаре не обратил должного внимания на феномен кручения, ограничившись в основном числами Бетти. Но он блестяще восполнил допущенный пробел в своих последующих публикациях по топологии (в «Дополнениях к Analysis situs»). При этом Пуанкаре стал на комбинаторную точку зрения, введя понятие симплициального разбиения (триангу-

ляции) многообразия, т. е. понятие симплициального комплекса, и создал таким образом основной метод комбинаторной топологии. Вероятно, Пуанкаре считал интуитивно ясным, что введенные им гомологические характеристики многообразия (и вообще полиэдра *) не могут зависеть от выбора той или иной триангуляции этого полиэдра. Однако, как мы знаем, этот факт является глубокой и трудной теоремой топологии. Для ее доказательства, кроме понятия сколь угодно мелкого подразделения данной триангуляции, которым Пуанкаре, конечно, владел, нужно было еще (опирающееся на понятие подразделения) понятие симплициального, т. е. кусочно-линейного, приближения непрерывного отображения, являющееся обобщением приближения непрерывной кривой вписанной в нее ломаной, и тот или иной эквивалент понятия степени отображения, т. е. кратности, с которой при данном непрерывном отображении (скажем, симплекса M на симплекс N или одного многообразия M на другое многообразие N той же размерности) многообразие N покрывается образом многообразия M. Оба эти фундаментальных понятия были введены Брауэром в 1911 году, т. е. накануне смерти Пуанкаре; при их помощи Брауэр доказал свои знаменитые теоремы о топологической инвариантности числа измерений n-мерного многообразия и об инвариантности внутренних точек для множеств, лежащих в нем, общую теорему Жордана (в n-мерном случае), теоремы о неподвижных точках и др. Однако самую теорему об инвариантности гомологических характеристик полиэдра Брауэр не доказал, хотя и владел всеми необходимыми для этого средствами; это впервые сделал в 1915 году знаменитый американский тополог Александер.

Доказательство теоремы инвариантности было первым существенным шагом в дальнейшем развитии созданной Пуанкаре теории гомологий. Следующий шаг, в отличие от первого, не был связан с преодолением конкретных математических трудностей, но имел тем не менее большое принципиальное значение. Он был сделан знаменитой алгебраисткой Эмми Нетер (в 1925—1936 гг.) и заключается в замене числовых гомологических характеристик, данных Пуанкаре, — чисел Бетти и коэффициентов кручения — одним понятием группы Бетти (или, как теперь предпочитают говорить, гомологической группы). Некоторые выдающиеся топологи, например Лефшец, на первых порах скептически отнеслись к нововведению, предложенному Нетер, считая его лишь формальным (действительно, казалось бы, нет существенной разницы, говорить ли непосредственно о группе Бетти полиэдра или о вполне определяющей ее совокупности числовых характеристик — ее ранге, т. е. числе Бетти, и ее коэффициентах кручения). Однако уже ближайшие исследования показали, что речь идет не о словах.

В частности, и прежде всего при старом подходе, без понятия гомологических групп невозможно было бы развитие одной из замечательнейших

* Я употребляю здесь слово «полиэдр» в его современном смысле как множества, допускающего разбиение на симплексы; сам Пуанкаре употреблял слово «полиэдр» в том смысле, в каком теперь употребляется слово «комплекс».

топологических теорий — теории топологической двойственности, первые основы которой были заложены самим Пуанкаре и которая далее развивалась в новых направлениях и аспектах Александером, затем, во всей ее глубине, Понтрягиным и другими математиками.

Без понятия группы Бетти невозможно себе представить и двух дальнейших существенных продвижений теории гомологии. Первое состоит в перенесении гомологических понятий на более общие геометрические образы, чем полиэдры, и прежде всего — на компакты. Оно стало возможным благодаря созданию общего аппарата аппроксимации самых сложных топологических образований (компактов, бикомпактов и еще более общих топологических пространств) комбинаторно-топологическими построениями, комплексами, которое было, начиная с 1926 г., осуществлено автором этого изложения посредством так называемых проекционных спектров (подвергавшихся затем различным обобщениям и вариациям). Этот аппроксимационный процесс основывается на введенном тем же автором понятии нерва покрытия данного пространства и дает возможность перенести, практически на любые топологические пространства, основные понятия комбинаторной топологии *.

Другим фундаментальным прогрессом в теории гомологии было введение Дж. Александером и А. Н. Колмогоровым в 1934—1935 гг. «верхних» гомологий, называемых теперь когомологиями. Из гомологических и когомологических групп, область определения и применимости которых все время расширялась, возникла наконец новая математическая дисциплина — гомологическая алгебра, существенно определяющая лицо значительной части современной математики.

Даже в самом кратком высказывании на тему моего сегодняшнего выступления я не мог бы обойти молчанием знаменитую популярную статью Пуанкаре «Почему простанство имеет три измерения?», напечатанную в известном французском журнале «Revue de Métaphysique et de Morale». Статья эта замечательна тем, что в ней, более в литературной, чем в строго научной форме, ставится проблема и излагается идея одного из основных понятий теоретико-множественной топологии — проблема и идея общего индуктивного определения размерности; идея Пуанкаре заключается в том, что если пространство имеет размерность n, то его можно разбить на (сколь угодно мелкие) части посредством подпространств размерности n—1. Первым математиком, который этим очень неопределенным наглядным высказываниям Пуанкаре придал (в работе 1913 г.) строгую и законченную форму, был Брауэр. Таким образом, Брауэр явился основателем обширной области теоретико-множественной топологии, развитой Менгером и, главным образом, П. С. Урысоном и известной в настоящее время под названием общей теории размерности. В настоящий момент нам, однако, важно подчеркнуть, что идея общего понятия размерности восходит

* Кстати, самые первые истоки моего понятия нерва лежат в том, что Пуанкаре называл полиэдром, взаимным к данному («polyèdre réciproque»).

к Пуанкаре и дает нам новое доказательство исключительной силы его геометрической интуиции, захватившей на этот раз и область теоретико-множественных понятий. Заметим в заключение, что свое полное развитие общая теория размерности получила после того, как была построена автором настоящей статьи в 1928—1932 гг. так называемая гомологическая теория размерности, подчинившая понятие размерности понятию гомологии и включившая таким образом теорию размерности в общую гомологическую топологию.

Я начал свое изложение с замечания, что Пуанкаре жил в эпоху, когда в математике рождались идеи, поражающие наш ум силой своей применимости к познанию мира, а также своей способностью как бы внезапно расширять горизонты самой математики; наконец, своей красотой и внутренним совершенством.

Математические идеи, рождающиеся в наше время, столь же (если не более) могущественны и, может быть, столь же прекрасны. Они не могли бы, однако, развиться, если бы у их колыбели не стояли открытия Пуанкаре.

В своем знаменитом «Изложении системы мира» Лаплас однажды сказал, что астрономия по величию ее предмета и совершенству ее теорий является лучшим памятником, воздвигнутым разумом человека, прекраснейшим проявлением его интеллекта.

Такие математики, как Пуанкаре, побуждают нас к тому, чтобы распространить слова Лапласа также и на математику и дать ей право соперничать с астрономией в отношении величия ее предмета и, во всяком случае, совершенства ее теорий.

52 Пуанкаре, т. II

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

О ТЕРНАРНЫХ И КВАТЕРНАРНЫХ КУБИЧЕСКИХ ФОРМАХ. I *

I. Введение

Арифметическое исследование однородных форм — это один из наиболее интересных вопросов теории чисел и один из тех вопросов, которые больше всего занимают геометров. Различные проблемы, связанные с теорией квадратичных бинарных форм, решены давно, благодаря понятию приведенной формы, и это решение развито в работах, ставших ныне уже классическими. Понятие приведенной формы распространяется без труда на квадратичные формы от произвольного числа переменных, и вопросы, связанные с этими формами, изложены в большом числе мемуаров, среди которых мы назовем замечательную работу Коркина и Золотарева, включенную в тома VI и XI «Mathematische Annalen», из которой мы сделаем многочисленные заимствования.

Обобщить такую полезную идею, найти формы, играющие в общем случае роль, которую приведенные играют в случае определенных квадратичных форм, — такова проблема, которая естественно возникает и которую Эрмит решил крайне элегантно в различных трудах, помещенных в «Journal de Crelle» (1850, 41 и 1853, 47) **.

Эрмит ограничился случаем определенных или неопределенных квадратичных форм и форм, разложимых на линейные множители; но этот метод можно распространить без труда на самый общий случай. Я полагаю, что такое обобщение может привести к интересным результатам, и именно это обстоятельство побудило меня взяться за настоящую работу.

Впрочем, это не первый раз, когда пытаются применить методы Эрмита к произвольной форме, и я должен сослаться в этой связи на замечательную теорему Жордана (Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 5 mai 1879), для которой я дам в этой статье новое доказательство.

Результаты, к которым я пришел, применимы к произвольной форме. Но, не желая жертвовать ясностью ради общности, я ограничился наиболее простыми формами среди тех, которые Эрмит оставил в стороне. Впрочем, будет легко понять, каковы те теоремы, которые обобщаются на самый общий случай, и как следовало бы действовать, чтобы их обобщить.

---

* Journal de l'Ecole polytechnique, 1881, Cahier 50, 190—253.

** «Oeuvres», t. 1, p. 164—263.

Самыми простыми из всех форм после квадратичных и форм, разложимых на линейные множители, являются тернарные кубические формы. Но если бы я ограничился рассмотрением такого частного случая, то много важных результатов осталось бы в тени. Именно это побудило меня сказать несколько слов относительно кватернарных кубических форм. Я не мог, однако, в этом случае сделать исследование таким же полным, как и для форм от трех переменных; не потому, что это исследование представило бы большую трудность, но потому, что я должен был бы рассмотреть очень большое число частных случаев и, тем самым, был бы вовлечен в бесполезную пространность изложения. Поскольку моей целью было только осветить некоторые особенности, присущие кватернарным формам, я предпочел ограничиться небольшим числом примеров.

Кроме простоты тернарных и кватернарных кубических форм, еще и другие соображения повлияли на мой выбор. В самом деле, эти формы явились с алгебраической точки зрения объектом очень интересных и законченных работ и, благодаря тесной связи, которая существует между высшей алгеброй и высшей арифметикой, оказали мне большую помощь. Среди трудов, на которые я буду ссылаться, я упомяну: работу Гесса о кривых третьего порядка (Journal de Crelle, 1884, 28); две работы Аронхольда о тернарных кубических формах (Journal de Crelle, 1850, 39; 1858, 55); работу Клебша о тернарных кубических формах (Mathematische Annalen. **VI**, 1873); работу Штейнера о поверхностях третьего порядка (Journal de Crelle, 1856, **53**) и, наконец, две работы Клебша, озаглавленные «Über die homogene Functionen dritten Grades...» (там же, 1861, 59) и «Über Knotenpunkte...» (там же, 1861, 59).

II. Определения

Мы будем считать две формы идентичными, когда их коэффициенты совпадают, даже если неизвестные обозначены разными буквами. Линейную подстановку

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1\xi_1 + \beta_1\xi_2 + \gamma_1\xi_3 + \delta_1\xi_4, \\ x_2 &= \alpha_2\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \gamma_2\xi_3 + \delta_2\xi_4, \\ x_3 &= \alpha_3\xi_1 + \beta_3\xi_2 + \gamma_3\xi_3 + \delta_3\xi_4. \\ x_4 &= \alpha_4\xi_1 + \beta_4\xi_2 + \gamma_4\xi_3 + \delta_4\xi_4 \end{aligned} \qquad (1)$$

мы будем обозначать

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix}$$

В дальнейшем мы всегда будем обозначать старые и новые переменные или x_1, x_2, x_3, x_4 и ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, или x, y, z, t и ξ, η, ζ, τ.

Если в форме F, однородной относительно x_1, x_2, x_3, x_4, сделать подстановку T, то получится форма относительно ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, которую мы обозначим

$$F \cdot T.$$

Если в уравнении (1) сделать линейную подстановку

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a_1\eta_1 + b_1\eta_2 + c_1\eta_3 + d_1\eta_4, \\ \xi_2 &= a_2\eta_1 + b_2\eta_2 + c_2\eta_3 + d_2\eta_4, \\ \xi_3 &= a_3\eta_1 + b_3\eta_2 + c_3\eta_3 + d_3\eta_4, \\ \xi_4 &= a_4\eta_1 + b_4\eta_2 + c_4\eta_3 + d_4\eta_4, \end{aligned}$$

которая определяет новое преобразование T', то мы получим четыре линейных уравнения относительно x_1, x_2, x_3, x_4, η_1, η_2, η_3, η_4. Эти соотношения определят другую линейную подстановку, которую мы обозначим

$$T \cdot T'.$$

Эти операции над символами аналогичны умножению. Однако нужно заметить, что они не коммутативны, т. е. что не выполняется (вообще говоря)

$$T \cdot T' = T' \cdot T,$$

но что они ассоциативны, т. е. что

$$T \cdot (T' \cdot T'') = (T \cdot T') \cdot T'',$$
$$F \cdot (T \cdot T') = (F \cdot T) \cdot T'.$$

Преобразование T будет унитарным, если его детерминант равен 1; оно будет действительным, если его коэффициенты действительны; целым, если его коэффициенты целые.

Две формы будут *алгебраически эквивалентными*, или одного *типа*, если они получаются из одной и той же третьей формы с помощью унитарных подстановок.

Они будут *действительно эквивалентными*, или одного *подтипа*, если они получаются из одной и той же третьей формы с помощью действительных унитарных подстановок.

Наконец, они будут арифметически эквивалентными, или просто эквивалентными, или одного и того же *класса*, если они получаются из одной и той же третьей формы с помощью целых унитарных подстановок.

Выберем в каждом типе или в каждом подтипе в качестве его представителя форму этого типа или подтипа, которую назовем *канонической формой*. Мы будем обычно обозначать ее буквой H. Выбор формы H почти произволен, хотя в большинстве случаев мы будем предпочитать самую простую форму рассматриваемого типа.

Скажем теперь несколько слов о геометрическом языке, который мы будем многократно использовать в этой работе. Если рассматривать x_1, x_2, x_3 как тройные координаты точки на плоскости и если F — однородная форма относительно x_1, x_2, x_3, то уравнение

$$F=0$$

определяет плоскую кривую C. Аналогично, если x_1, x_2, x_3, x_4 — четверные координаты точки в пространстве, то мы скажем, что форма F, однородная относительно этих четырех переменных, представляет поверхность с уравнением

$$F=0.$$

Будем рассматривать x_1, x_2, x_3, x_4 в уравнении (1) как координаты точки в пространстве; ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 — как координаты другой точки.

Уравнение (1) определит тогда *гомологическое отношение* между двумя точками пространства, так что знание одной точки позволит определить другую. Точка $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ будет образом точки (x_1, x_2, x_3, x_4) при преобразовании T. Назовем также образом кривой или поверхности геометрическое место образов всех точек этой кривой или поверхности.

Ясно:

1) что образами прямой или плоскости будут прямая и плоскость;

2) что образом поверхности $F=0$ будет поверхность $F\cdot T=0$.

Мы скажем, что T *воспроизводит* точку, прямую или плоскость, кривую или поверхность, когда эта точка, эта прямая, эта плоскость, эта кривая и эта поверхность совпадают со своими собственными образами.

Мы скажем, что T воспроизводит форму F, когда будет выполнено тождество

$$F\cdot T=F.$$

Надо заметить, что T может воспроизводить поверхность $F=0$ и не воспроизводить форму F. Именно так бывает, когда имеет место тождество

$$F\cdot T=\alpha F$$

(где α — константа, отличная от 1).

Предположим, что мы изменили базисный треугольник или тетраэдр. Если x_1, x_2, x_3, x_4; ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 — старые координаты двух точек m и m'; если y_1, y_2, y_3, y_4; η_1, η_2, η_3, η_4 — новые координаты этих же двух точек, то между этими величинами имеют место соотношения вида

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1y_1+b_1y_2+c_1y_3+d_1y_4,\\ x_2 &= a_2y_1+b_2y_2+c_2y_3+d_2y_4,\\ x_3 &= a_3y_1+b_3y_2+c_3y_3+d_3y_4,\\ x_4 &= a_4y_1+b_4y_2+c_4y_3+d_4y_4,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{2}$$

$$\xi_1 = a_1\eta_1 + b_1\eta_2 + c_1\eta_3 + d_1\eta_4,$$
$$\xi_2 = a_2\eta_1 + b_2\eta_2 + c_2\eta_3 + d_2\eta_4,$$
$$\xi_3 = a_3\eta_1 + b_3\eta_2 + c_3\eta_3 + d_3\eta_4,$$
$$\xi_4 = a_4\eta_1 + b_4\eta_2 + c_4\eta_3 + d_4\eta_4.$$

Пусть Σ — линейное преобразование *

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Эта подстановка определяет только что осуществленную замену координат.

Ясно, что кривая или поверхность, которая в старой системе координат имела уравнение $F=0$, в новой системе имеет уравнение $F\cdot\Sigma=0$.

Мы скажем, что изменение координат, определенное подстановкой Σ, переводит F в $F\cdot\Sigma$.

Предположим, что мы исключили x и ξ из уравнений (1) и (2) и затем разрешили четыре оставшихся уравнения относительно y: y_1, y_2, y_3, y_4 как функции η_1, η_2, η_3, η_4 выразятся четырьмя равенствами вида

$$y_1 = A_1\eta_1 + B_1\eta_2 + C_1\eta_3 + D_1\eta_4,$$
$$y_2 = A_2\eta_1 + B_2\eta_2 + C_2\eta_3 + D_2\eta_4,$$
$$y_3 = A_3\eta_1 + B_3\eta_2 + C_3\eta_3 + D_3\eta_4,$$
$$y_4 = A_4\eta_1 + B_4\eta_2 + C_4\eta_3 + D_4\eta_4.$$

Подстановку

$$S = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}$$

назовем тогда образом T при замене координат Σ. Впрочем, ясно, что

$$S = \Sigma^{-1}\cdot T\cdot\Sigma.$$

Следовательно, если T воспроизводит форму F, то подстановка S воспроизводит

$$F\cdot\Sigma,$$

так как

$$F\cdot\Sigma\cdot S = F\cdot\Sigma\cdot\Sigma^{-1}\cdot T\cdot\Sigma = F\cdot T\cdot\Sigma = F\cdot\Sigma.$$

* Мы поменяли местами S и Σ в обозначениях А. Пуанкаре, чтобы привести их в соответствие с обозначениями раздела III. (*А. Ш.*).

III. Классификация преобразований

Пусть подстановка

$$T=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix}.$$

Мы скажем, что она *каноническая*, если выполнено

$$\beta_1=\gamma_1=\delta_1=\gamma_2=\delta_2=\delta_3=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\beta_3=\beta_4=\gamma_4=0.$$

Рассмотрим уравнение

$$\begin{vmatrix} \alpha_1-\lambda & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2-\lambda & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3-\lambda & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4-\lambda \end{vmatrix}=0. \quad (3)$$

Исследование корней этого уравнения приводит нас к классификации преобразований T на четыре категории.

T будет принадлежать к *первой категории*, если корни уравнения (3) все различны и если, кроме того, m-е степени корней этого уравнения различны, где m — произвольное действительное целое число.

T будет принадлежать ко *второй категории*, если корни уравнения (3) различны, но в то же время m-е степени не все различны при некотором m. Например, если корни уравнения (3) равны 1, —1, 2, 3, то T будет второй категории, так как его корни различны, но их квадраты 1, 1, 4 и 9 не все различны между собой.

T будет принадлежать к *третьей категории*, если корни уравнения (3) не все различны, но его можно рассматривать как целую степень преобразования второй категории.

Наконец, T будет принадлежать к *четвертой категории*, если корни уравнения (3) не все различны и если, кроме того, T нельзя рассматривать как целую степень преобразования второй категории.

Предположим, что нам надо отыскать плоскости, инвариантные относительно преобразования T.

Пусть

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0$$

— уравнение такой плоскости; тогда должно выполняться

$$\frac{u_1\alpha_1+u_2\alpha_2+u_3\alpha_3+u_4\alpha_4}{u_1}=\frac{u_1\beta_1+u_2\beta_2+u_3\beta_3+u_4\beta_4}{u_2}=$$
$$=\frac{u_1\gamma_1+u_2\gamma_2+u_3\gamma_3+u_4\gamma_4}{u_3}=\frac{u_1\delta_1+u_2\delta_2+u_3\delta_3+u_4\delta_4}{u_4}=\lambda.$$

Ясно, что λ должно удовлетворять уравнению (3) и что обратно, если в уравнениях (4) положить λ равным одному из корней уравнения (3), то эти уравнения дадут для u, по крайней мере, одну систему значений и определят, следовательно, по крайней мере, одну плоскость, инвариантную относительно преобразования T.

Предположим, что T принадлежит к первой или второй категории, т. е. что уравнение (3) имеет четыре различных корня λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. Тогда существуют четыре плоскости, инвариантные относительно T.

Представим себе, что сделана замена координат Σ, при которой за новый базисный тетраэдр взят тетраэдр, образованный этими четырьмя плоскостями. Ясно, что образом T при замене Σ будет

$$\Sigma^{-1} \cdot T \cdot \Sigma = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{vmatrix}.$$

Значит, этот образ является каноническим преобразованнем. Мы будем иногда обозначать его для краткости $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

Отсюда следует, что если T принадлежит к первой или ко второй категории, то можно выбрать Σ так, чтобы

$$\Sigma^{-1} \cdot T \cdot \Sigma = S$$

было каноническим *.

Я утверждаю, что это же верно, если T принадлежит к третьей категории. Действительно, в этом случае можно положить $T = \tau^m$, где τ — второй категории, а m — целое положительное. Пусть для определенности

$$m = 3;$$

имеем

$$T = \tau^3 = \tau \cdot \Sigma \cdot \Sigma^{-1} \cdot \tau \cdot \Sigma \cdot \Sigma^{-1} \cdot \tau,$$

откуда

$$\Sigma^{-1} \cdot T \cdot \Sigma = (\Sigma^{-1} \cdot \tau \cdot \Sigma)^3.$$

Таким образом, если $\Sigma^{-1} \cdot \tau \cdot \Sigma$ каноническое, то $\Sigma^{-1} \cdot T \cdot \Sigma$ тоже каноническое.

Подобные же рассуждения позволят нам определить целые, дробные или несоизмеримые степени преобразования, принадлежащего к одной из первых трех категорий.

---

* Обозначения А. Пуанкаре можно модифицировать. Одной и той же буквой T обозначается то произвольная матрица (или линейная подстановка), то диагональная матрица (или каноническая подстановка), для которой здесь использована буква S. Так поступает А. Пуанкаре ниже (раздел V, п. 1). (*А. Ш.*).

Действительно, пусть сначала подстановка S каноническая

$$S = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{vmatrix} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4).$$

Пусть μ_1 — одно из значений логарифма λ_1; μ_2, μ_3, μ_4 — некоторые значения логарифмов λ_2, λ_3, λ_4. Подстановкой S^α по определению будет подстановка

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha\mu_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha\mu_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha\mu_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\alpha\mu_4} \end{vmatrix} = (e^{\alpha\mu_1}, e^{\alpha\mu_2}, e^{\alpha\mu_3}, e^{\alpha\mu_4}).$$

Возьмем затем неканоническую подстановку; ее можно записать в виде

$$T = \Sigma \cdot S \cdot \Sigma^{-1},$$

где S — каноническая подстановка, и ее α-й степенью будет по определению

$$T^\alpha = \Sigma \cdot S^\alpha \cdot \Sigma^{-1}.$$

Тернарные (канонические) преобразования третьей категории разделяются на два типа:

$$\text{тип } A \ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix}, \quad \text{тип } B \ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix}.$$

Но мы должны отметить, что *унитарная* подстановка типа B является *единичной*, т. е. такой, которая оставляет все формы неизменными.

Этим двум типам соответствуют два других типа второй категории:

$$\text{тип } A' \ldots (\alpha, \lambda_1\alpha, \beta), \quad \text{тип } B' \ldots (\alpha, \lambda_1\alpha, \lambda_2\alpha),$$

где λ_1 и λ_2 — корни m-й степени из единицы.

Так же находим четыре типа кватернарных преобразований третьей категории:

$$\text{тип } C \ldots (\alpha, \alpha, \beta, \gamma), \quad \text{тип } D \ldots (\alpha, \alpha, \beta, \beta),$$
$$\text{тип } E \ldots (\alpha, \alpha, \alpha, \beta), \quad \text{тип } F \ldots (\alpha, \alpha, \alpha, \alpha).$$

Во второй категории им соответствуют четыре других типа:

$$\text{тип } C' \ldots (\alpha, \lambda_1\alpha, \beta, \gamma), \quad \text{тип } D' \ldots (\alpha, \lambda_1\alpha, \beta, \lambda_2\beta),$$
$$\text{тип } E' \ldots (\alpha, \lambda_1\alpha, \lambda_2\alpha, \beta), \quad \text{тип } F' \ldots (\alpha, \lambda_1\alpha, \lambda_2\alpha, \lambda_3\alpha),$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — корни m-й степени из единицы.

Задача состоит в том, чтобы найти точки, прямые и плоскости, инвариантные относительно преобразования T, и полностью обсудить эту проблему. Но для наших целей достаточно провести это обсуждение для тернарных преобразований. Результаты легко обобщаются на случай кватернарных преобразований.

Назовем *главным треугольником* базисный треугольник, к которому нужно отнести уравнения T, чтобы привести это преобразование к каноническому виду

$$S = \Sigma^{-1} \cdot T \cdot \Sigma.$$

Легко видеть:

1) что если T принадлежит к *первой или второй категории*, то единственными инвариантными точками и прямыми будут вершины и стороны главного треугольника;

2) что если T принадлежит к *третьей категории и типу* A, то инвариантными точками будут вершина $x_1 = x_2 = 0$ и точки стороны $x_3 = 0$, в то время как инвариантными прямыми будут прямая $x_3 = 0$ и прямые, проходящие через вершину $x_1 = x_2 = 0$;

3) что если T принадлежит к *третьей категории* и типу B, то все точки и прямые инвариантны.

Пусть T принадлежит к первой категории: любая из его целых степеней не будет принадлежать к третьей категории, так что если τ_0 — произвольная неинвариантная точка, если τ_1 — образ τ_0, τ_2 — образ τ_1 и т. д., то никогда не сможет получиться, чтобы τ_m совпала с τ_0. Следовательно:

Если T принадлежит к первой категории, то, кроме вершин главного треугольника (или, в случае кватернарных преобразований, вершин тетраэдра), *все точки имеют бесконечно много последовательных образов.*

Перейдем теперь к преобразованиям *четвертой категории*. Их нельзя привести к каноническому виду, но можно выбрать Σ таким образом, чтобы привести $\Sigma^{-1} \cdot T \cdot \Sigma$ к самому простому виду.

Таким образом, тернарные преобразования четвертой категории распадаются на два типа, для которых я дам здесь простейший вид *:

---

* Изучая гиперфуксовы функции (двух переменных), А. Пуанкаре пришел к другой классификации тернарных линейных подстановок (Sur les substitutions lineaires. — C. r. Acad. sci, 1884, 98, п. 45 Библиографии к XI гл. «Analyse de les travaux . . . fait par H. Poincare» (Acta Math., 1921, 38). В обозначениях настоящей работы эти

$$\text{тип } A_1 \ldots \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha \end{vmatrix}, \quad \text{тип } B_1 \ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \delta & \alpha \end{vmatrix}.$$

Кватернарные преобразования разделяются на четыре типа:

$$\text{тип } C_1 \ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \gamma \end{vmatrix}, \quad \text{тип } D_1 \ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \beta \end{vmatrix},$$

$$\text{тип } E_1 \ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \beta & 0 \\ 0 & \delta & \varepsilon & \beta \end{vmatrix}, \quad \text{тип } F_1 \ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & \alpha & 0 \\ \varepsilon & \zeta & \theta & \alpha \end{vmatrix}.$$

Легко видеть, что единственными инвариантными точками будут следующие:

тип $A_1 \ldots x_2 = x_3 = 0, \quad x_1 = x_2 = 0,$
тип $B_1 \ldots x_1 = x_2 = 0,$
тип $C_1 \ldots x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_1 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0,$
тип $D_1 \ldots x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_1 = x_3 = x_4 = 0,$
тип $E_1 \ldots x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0,$
тип $F_1 \ldots x_1 = x_2 = x_3 = 0.$

Исключение может быть только для типов A_1, C_1, D_1, E_1, если $\alpha = \beta$. Но ведь любая целая степень преобразования четвертой категории сама принадлежит к этой категории.

Следовательно, если T принадлежит к четвертой категории, то, кроме конечного числа инвариантных точек, все точки имеют бесконечно много последовательных образов.

Исключение может быть только для типов A_1, C_1, D_1, E_1, если $\alpha^m = \beta^m$, и тогда вместо точек , у которых нет бесконечного множества последовательных образов, имеется прямая или плоскость.

классы, названные типами A, B, C, D, характеризовались бы каноническими формами

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix},$$

где α, β, γ различны. (*А. Ш.*).

IV. Классификация форм

Кубические тернарные формы представляют кривые третьего порядка. Мы их разделим на семь семейств.

Четыре первых семейства содержат формы, не разложимые на множители, которые представляют нераспадающиеся кривые.

Среди них *два первых семейства* содержат формы с дискриминантом, отличным от нуля, которые представляют кривые без двойной точки, т. е. кривые третьего порядка и шестого класса.

Эти формы можно всегда записать следующим образом:

$$\alpha XYZ+X^3+Y^3+Z^3,$$

где X, Y, Z — линейные формы относительно x_1, x_2, x_3, так что каноническая форма, которая служит для определения каждого типа или каждого подтипа этих двух семейств, имеет вид

$$6\alpha xyz+\beta(x^3+y^3+z^3). \tag{5}$$

Действительно, доказано (см. работу Гесса, помещенную в «Journal de Crelle» (1884, 28), что кривая C третьего порядка и шестого класса имеет девять точек перегиба, из которых три действительны, а шесть всегда мнимы. Эти девять точек перегиба располагаются четырьмя различными способами на трех прямых и располагаются одним и только одним способом на трех действительных прямых. Если взять эти три прямые в качестве образующих базисного треугольника, то уравнение кривой C будет иметь как раз предыдущий вид; так что, если F — форма, представляющая кривую C, то можно всегда полагать

$$F=[6\alpha xyz+\beta(x^3+y^3+z^3)]\cdot\Sigma,$$

где Σ — подстановка с действительными коэффициентами.

Отсюда следует, что всякая кубическая тернарная форма первого или второго семейства действительно эквивалентна канонической форме (5).

Теперь среди этих форм я буду различать (а далее будет видно, как я к этому пришел):

1) *первое семейство*, составленное из форм, не распадающихся на сумму трех кубов;

2) *второе семейство*, составленное из форм, распадающихся на сумму трех кубов.

Формы *третьего семейства* имеют дискриминант, равный нулю, но все их инварианты не обращаются в нуль одновременно; они представляют кривые третьего порядка и четвертого класса.

Доказывается, что эти кривые имеют три точки перегиба, из которых одна действительна, и что эти три точки расположены на одной и той же действительной прямой.

Если для образования базисного треугольника взять эту прямую и две касательные в двойной точке, то уравнение кривой можно записать в виде

$$6\alpha xyz+\beta(x^3+y^3)=0.$$

Отсюда заключаем, что если F — форма третьего семейства, то она *действительно эквивалентна* канонической форме

$$6\alpha xyz+\beta(x^3+y^3) \tag{6}$$

или канонической форме

$$3\alpha x^2z+3\alpha y^2z+\beta x^3-3\beta xy^2, \tag{7}$$

в зависимости от того, будут ли касательные в двойной точке кривой C действительными или мнимыми сопряженными.

Формами *четвертого семейства* будут те, для которых все инварианты равны нулю. Они представляют кривые третьего порядка и третьего класса с точкой возврата.

Эти кривые имеют единственную точку перегиба, которая всегда действительна. Для образования базисного треугольника возьмем прямую, которая соединяет точку перегиба с точкой возврата, и две касательные перегиба и возврата.

Уравнение кривой можно записать в виде

$$\alpha z^3+\beta xy^2=0,$$

так что всякая форма четвертого семейства *действительно эквивалентна* канонической форме

$$\alpha z^3+3\beta xy^2. \tag{8}$$

Три последних семейства содержат формы, разложимые на множители.

Формы *пятого семейства* представляют коническое сечение S и прямую D, не касающиеся друг друга.

Для образования базисного треугольника возьмем прямую D и касательные к S в точках пересечения прямой D и этого конического сечения. Уравнение этой распадающейся кривой можно записать в виде

$$\alpha z(z^2+\beta xy)=0,$$

так что формы пятого семейства *действительно эквивалентны* канонической форме

$$\beta z^3+6\alpha xyz \tag{9}$$

или канонической форме

$$\beta z^3+3\alpha x^2z+3\alpha y^2z, \tag{10}$$

в зависимости от того, пересекается ли прямая D с S или нет.

Формы *шестого семейства* представляют прямую D и коническое сечение S, касающиеся друг друга. В качестве базисного треугольника возьмем

прямую D, прямую H, проходящую через точку касания D и S, и касательную к S в точке пересечения этого конического сечения с H.

Уравнение этой распадающейся кривой запишется в виде

$$\alpha y(z^2+\beta xy)=0,$$

так что формы шестого семейства *действительно эквивалентны* канонической форме

$$3\alpha yz^2+3\beta xy^2. \qquad (11)$$

Наконец, *седьмое семейство* составлено из форм, разложимых на линейные множители, которыми занимался Эрмит.

Прежде чем двигаться дальше, надо сказать несколько слов о главных инвариантах и ковариантах этих различных канонических форм.

Мы обозначим, следуя принятому, через $\Delta(f)$ гессиан формы f.

Пусть нужно вычислить

$$\Delta(6\alpha xyz+\beta x^3+\gamma y^3+\delta z^3);$$

легко находим

$$36\Delta=\begin{vmatrix} 6\beta x & 6\alpha z & 6\alpha y \\ 6\alpha z & 6\gamma y & 6\alpha x \\ 6\alpha y & 6\alpha x & 6\delta z \end{vmatrix},$$

откуда

$$\Delta=6(\beta\gamma\delta+2\alpha^3)xyz-6\alpha^2\beta x^3-6\alpha^2\gamma y^3-6\alpha^2\delta z^3. \qquad (12)$$

Вычислим также

$$\Delta(\alpha z^3+3\beta xy^2);$$

получим

$$36\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 6\beta y & 0 \\ 6\beta y & 2\beta x & 0 \\ 0 & 0 & 6\alpha z \end{vmatrix},$$

откуда

$$\Delta=-6\alpha\beta^2 zy^2.$$

Если нужно вычислить

$$\Delta(3\alpha yz^2+3\beta xy^2),$$

то находим

$$36\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 6\beta y & 0 \\ 6\beta y & 6\beta x & 6\alpha z \\ 0 & 6\alpha z & 6\alpha y \end{vmatrix},$$

где

$$\Delta=-6\alpha\beta^2 y^3.$$

Аронхольд определил два инварианта тернарных кубических форм, которые он назвал S и T (Journal de Crelle, 39, 152) и которые я сейчас найду для интересующих нас форм.

Чтобы проделать это вычисление, я напомню определение, которое Клебш дал оператору, названному им оператором δ (Mathematische Annalen, VI, 449).

Пусть $\Theta(f)$ — какой-нибудь инвариант или ковариант формы f; принято писать

$$\delta[\Theta(f)] = \frac{d}{d\lambda}\{\Theta[f+\lambda\Delta(f)]\} \text{ при } \lambda = 0.$$

Клебш пришел к двум следующим формулам:

$$\delta[\Delta(f)] = \frac{1}{2} S \cdot f, \qquad \frac{1}{4}\delta(S) = T.$$

Но если заметить, что то, что Клебш обозначает через S и T, совпадает с тем, что Аронхольд обозначает через $6S$ и $6T$, то мы приходим к записи

$$\delta[\Delta(f)] = 3S \cdot f, \qquad \frac{1}{4}\delta(S) = T.$$

Произведя эти вычисления для формы

$$6\alpha xyz + \beta x^3 + \gamma y^3 + \delta z^3$$

(которая содержит канонические формы (5), (6), (7), (9), (10)) *, без труда находим

$$\begin{aligned}\delta\Delta = {}& 36\alpha^2(\beta\gamma\delta + 2\alpha^3)\,xyz - 12\alpha(\beta x^3 + \gamma y^3 + \delta z^3)(\beta\gamma\delta + 2\alpha^3) + \\ &+ 6\gamma\delta(-6\alpha^2\beta)\,xyz - 6\alpha^2(-6\alpha^2\beta)\,x^3 + 6\beta\delta(-6\alpha^2\beta)\,xyz - \\ &- 6\alpha^2(-6\alpha^2\gamma)\,y^3 + 6\beta\gamma(-6\alpha^2\delta)\,xyz - 6\alpha^2(-6\alpha^2\delta)\,z^3,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\delta\Delta = {}& 6\alpha xyz(6\alpha\beta\gamma\delta + 12\alpha^4 - 6\alpha\beta\gamma\delta - 6\alpha\beta\gamma\delta - 6\alpha\beta\gamma\delta) + \\ &+ \beta x^3(36\alpha^4 - 24\alpha^4 - 12\alpha\beta\gamma\delta) + \\ &+ \gamma y^3(36\alpha^4 - 24\alpha^4 - 12\alpha\beta\gamma\delta) + \\ &+ \delta z^3(36\alpha^4 - 24\alpha^4 - 12\alpha\beta\gamma\delta),\end{aligned}$$

или

$$\delta\Delta = (6\alpha xyz + \beta x^3 + \gamma y^3 + \delta z^3)(12\alpha^4 - 12\alpha\beta\gamma\delta),$$

или, наконец,

$$S = 4\alpha^4 - 4\alpha\beta\delta\gamma. \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\delta S = {}& 8\alpha^3(\beta\gamma\delta + 2\alpha^3) - 2\beta\gamma\delta(\beta\gamma\delta + 2\alpha^3) - \\ &- 2\alpha\gamma\delta(-6\alpha^2\beta) - 2\alpha\beta\delta(-6\alpha^2\gamma) - 2\alpha\beta\gamma(-6\alpha^2\delta),\end{aligned}$$

---

* Формы (7), (10) ей алгебраически, но не действительно эквивалентны. (*А. Ш.*).

или

$$\frac{1}{2}\delta S = 8\alpha^3\beta\gamma\delta + 16\alpha^6 - 2\beta^2\gamma^2\delta^2 - 4\alpha^3\beta\gamma\delta + \\ + 12\alpha^3\beta\gamma\delta + 12\alpha^3\beta\gamma\delta + 12\alpha^3\beta\gamma\delta,$$

или

$$\frac{1}{2}\delta S = 16\alpha^6 + 40\alpha^3\beta\gamma\delta - 2\beta^2\gamma^2\delta^2,$$

или, наконец *,

$$T = \frac{1}{4}\delta S = 8\alpha^6 + 20\alpha^3\beta\gamma\delta - \beta^2\gamma^2\delta^2. \tag{12'}$$

Легко видеть, что формы (8) и (11)

$$\alpha z^3 + 3\beta xy^2, \qquad 3\alpha yz^2 + 3\beta xy^2$$

имеют инварианты, равные нулю

$$S = 0, \quad T = 0.$$

Действительно, положим

$$z = z_1, \quad x = \frac{1}{4}x_1, \quad y = 2y_1. \tag{13}$$

Первая из этих форм станет равной

$$\alpha z_1^3 + 3\beta x_1 y_1^2$$

и, следовательно, не изменится.

Но ведь уравнения (13) определяют преобразование

$$H = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

детерминант которого равен $^1/_2$. Следовательно, должно выполняться

$$S[f \cdot H] = \frac{1}{2^4} S[f],$$

$$T[f \cdot H] = \frac{1}{2^6} T[f].$$

---

* Значения, указанные Сальмоном (G. Salman. Géométrie analytique, courbes planes. Trad. O. Chemin. 1884), для этих инвариантов, следующие:

$$S = -\alpha^4 + \alpha\beta\gamma\delta, \quad T = -8\alpha^6 - 20\alpha^3\beta\gamma\delta + \beta^2\gamma^2\delta^2. \qquad (А.\ Ш.).$$

Но две формы f и $f \cdot H$ идентичны. Следовательно,

$$S[f \cdot H] = S[f],$$
$$T[f \cdot H] = T[f];$$

отсюда заключаем, что

$$S(f) = T(f) = 0,$$

что требовалось доказать.

Аналогичное доказательство можно применить к форме

$$3\alpha yz^2 + 3\beta xy^2,$$

которая остается неизменной, если положить

$$z = 2z_1, \qquad y = \frac{1}{4}y_1, \qquad x = 16x_1.$$

Чтобы приложить формулы (12) и (12′) к формам (5) или (6), или (9), достаточно взять

$$\beta = \gamma = \delta,$$

или

$$\beta = \gamma, \quad \delta = 0,$$

или

$$\gamma = \delta = 0.$$

Заметим далее, что если K — линейная подстановка *

$$z = \zeta, \qquad x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \qquad y = \frac{i}{\sqrt{2}}(\xi - \eta),$$

где

$$K = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

то детерминант K равен $-i$, и

$$(3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z + \beta x^3 - 3\beta xy^2) \cdot T = 6\alpha\xi\eta\zeta + \beta\sqrt{2}(\xi^3 + \eta^3).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &S(3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z + \beta x^3 - 3\beta xy^2) = \\ &= (+i)^4\, S\left[6\alpha\xi\eta\zeta + \beta\sqrt{2}(\xi^3 + \eta^3)\right] = 4\alpha^4, \\ &T(3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z + \beta x^3 - 3\beta xy^2) = \\ &= (+i)^6\, T\left[6\alpha\xi\eta\zeta + \beta\sqrt{2}(\xi^3 + \eta^3)\right] = -8\alpha^6. \end{aligned} \qquad (14)$$

* Чтобы прямо вычислить инварианты форм (7) и (10) относительно x, y, z, мы в вычислениях А. Пуанкаре поменяли роли x, y, z и ξ, η, ζ. (*А. Ш.*).

Так же

$$(\beta z^3 + 3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z)\cdot T = \beta\zeta^3 + 6\alpha\xi\eta\zeta$$

и

$$S(\beta z^3 + 3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z) = (+i)^4\, S(\beta\zeta^3 + 6\alpha\xi\eta\zeta) = 4\alpha^4,$$
$$T(\beta z^3 + 3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z) = (+i)^6\, T(\beta\zeta^3 + 6\alpha\xi\eta\zeta) = -8\alpha^6. \qquad (14')$$

Таким образом, мы приходим к следующим результатам:

Формы первого семейства. Каноническая форма (5)

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3 + z^3)$$

дает

$$\Delta = 6(\beta^3 + 2\alpha^3)\, xyz - 6\alpha^2\beta(x^3 + y^3 + z^3),$$
$$S = 4\alpha(\alpha^3 - \beta^3), \qquad T = 8\alpha^6 + 20\alpha^3\beta^3 - \beta^6.$$

Формы второго семейства. Каноническая форма та же с α, равным нулю; коварианты и инварианты те же, но $S = 0$ (Aronhold. Journal de Crelle, **39**, 153).

Формы третьего семейства. Каноническая форма (6)

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3)$$

дает

$$\Delta = 12\alpha^3 xyz - 6\alpha^2\beta(x^3 + y^3),$$
$$S = 4\alpha^4, \qquad T = 8\alpha^6.$$

Каноническая форма (7)

$$3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z + \beta x^3 - 3\beta xy^2$$

дает в силу формулы (14)

$$-\Delta = 6\alpha^3 x^2 z + 6\alpha^3 y^2 z - 6\alpha^2\beta x^3 + 18\alpha^2\beta xy^2,$$
$$S = 4\alpha^4, \qquad T = -8\alpha^6.$$

Мы должны обратить внимание на одно крайне примечательное свойство S и T, а именно, что S есть точный квадрат, а T точный куб, так как *

$$T^2 - S^3 = 0.$$

Положим

$$\sqrt{S} = \sqrt[3]{T} = \rho.$$

---

* Это нужно, по-видимому, понимать так: «точный квадрат и точный куб целых функций (с рациональными коэффициентами) от коэффициентов уравнения кривой».

Это свойство следует из единственного разложения S и T на неприводимые полиномы (переменными которых служат коэффициенты нашей кривой). В общем значении T^2 и S^3 каждый из этих полиномов должен фигурировать в 6-й степени. Следовательно, он имеет 3-ю степень в T и 2-ю степень в S. Это одно из приложений свойства, известного теперь под названием *единственная факторизация кольца полиномов от многих переменных*. (*А. Ш.*).

В случае, которым мы занимаемся, ρ равно $2\alpha^2$ для канонической формы (6) и $-2\alpha^2$ для канонической формы (7).

Легко видеть, что

$$3\rho f + \Delta = 48\alpha^3 xyz \quad \text{или} \quad -24\alpha^3 (x^2 + y^2) z.$$

Формы четвертого семейства. Каноническая форма (8)

$$\alpha z^3 + 3\beta xy^2$$

дает

$$\Delta = -6\alpha\beta^2 zy^2,$$
$$S = 0, \qquad T = 0.$$

Формы пятого семейства Каноническая форма (9)

$$6\alpha xyz + \beta z^3$$

дает

$$\Delta = 12\alpha^3 xyz - 6\alpha^2\beta z^3,$$
$$S = 4\alpha^4, \qquad T = 8\alpha^6.$$

Каноническая форма (10)

$$\beta z^3 + 3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z$$

дает, в силу формул (14) и следующих,

$$\Delta = 6\alpha^2\beta z^3 - 6\alpha^3 x^2 z - 6\alpha^3 y^2 z,$$
$$S = 4\alpha^4, \qquad T = -8\alpha^6.$$

Формы шестого семейства. Каноническая форма (11)

$$3\alpha yz^2 + 3\beta xy^2$$

дает

$$\Delta = -6\alpha\beta^2 y^3$$

и

$$S = 0, \qquad T = 0.$$

V. Подобные преобразования *

Мы займемся теперь отысканием преобразований, воспроизводящих данную форму; но сначала поставим задачу следующим образом:

Пусть дано линейное преобразование T; найти все формы, которые оно воспроизводит.

---

* А. Пуанкаре называет *подобными* те подстановки (или преобразования) «которые воспроизводят некоторую форму и которые в то же время принадлежат к группе G подстановок с целыми коэффициентами (или, возможно, к другой группе, например подгруппе группы G)» («Oeuvres», t. 5, p. 9). (*А. Ш.*).

Мы не считаем здесь коэффициенты T целыми, так что занимающая нас проблема является чисто алгебраической.

1. Подобные преобразования первой категории

Если преобразование T принадлежит к первой категории, то его можно записать в виде

$$\Sigma^{-1} \cdot S \cdot \Sigma,$$

где S каноническое.

Если форма F инвариантна относительно S, то форма $F \cdot \Sigma$ инвариантна относительно T.

Следовательно, чтобы найти все формы, инвариантные относительно T, достаточно найти все формы, инвариантные относительно S, и применить к ним преобразование Σ.

Пусть

$$S = \left[e^{\mu_1 + i\nu_1}, \quad e^{\mu_2 + i\nu_2}, \quad e^{\mu_3 + i\nu_3}, \quad e^{\mu_4 + i\nu_4}\right].$$

Мы можем положить

$$S = S_1 \cdot S_2,$$

где

$$S_1 = \left[e^{\mu_1}, \ e^{\mu_2}, \ e^{\mu_3}, \ e^{\mu_4}\right], \qquad S_2 = \left[e^{i\nu_1}, \ e^{i\nu_2}, \ e^{i\nu_3}, \ e^{i\nu_4}\right].$$

Пусть форма F инвариантна относительно S и пусть

$$\varphi = A x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} x_4^{m_4}$$

— один из ее членов. После применения преобразования S этот член станет равным

$$A \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \xi_3^{m_3} \xi_4^{m_4} e^{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \mu_3 m_3 + \mu_4 m_4} \cdot e^{i(\nu_1 m_1 + \nu_2 m_2 + \nu_3 m_3 + \nu_4 m_4)}.$$

Значит, должно выполняться

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \mu_3 m_3 + \mu_4 m_4 &= 0, \\ \nu_1 m_1 + \nu_2 m_2 + \nu_3 m_3 + \nu_4 m_4 &\equiv 0 \end{aligned}\right. \pmod{2\pi}. \tag{15}$$

Первое уравнение означает, что F инвариантна относительно S_1, второе, — что F инвариантна относительно S_2.

Положим сначала

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 0.$$

Тогда S сводится к S_1, и для того чтобы найти все формы F, достаточно найти все формы, инвариантные относительно S_1. В этом случае мы скажем, что преобразование, каноническое для T, действительно.

Тогда имеем

$$x_1 \frac{d\varphi}{dx_1} = m_1\varphi, \qquad x_2 \frac{d\varphi}{dx_2} = m_2\varphi, \qquad x_3 \frac{d\varphi}{dx_3} = m_3\varphi, \qquad x_4 \frac{d\varphi}{dx_4} = m_4\varphi,$$

следовательно,

$$\mu_1 x_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + \mu_2 x_2 \frac{d\varphi}{dx_2} + \mu_3 x_3 \frac{d\varphi}{dx_3} + \mu_4 x_4 \frac{d\varphi}{dx_4} = \\ = (m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3 + m_4\mu_4)\,\varphi = 0.$$

Необходимо и достаточно, чтобы это условие выполнялось для всех членов F; иными словами

$$\mu_1 x_1 p_1 + \mu_2 x_2 p_2 + \mu_3 x_3 p_3 + \mu_4 x_4 p_4 = 0, \tag{16}$$

где через p_1, p_2, p_3, p_4 обозначены производные F по x_1, x_2, x_3, x_4.

Предположим теперь, что одновременно не выполняется

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 0.$$

Предыдущее условие остается необходимым, но не является уже достаточным.

Тогда, если преобразование T действительно, что мы будем предполагать, то значения ν должны быть попарно противоположными, например

$$\nu_2 = -\nu_1, \qquad \nu_4 = -\nu_3.$$

Второе условие (15) запишется в виде

$$\nu_1 (m_1 - m_2) + \nu_3 (m_3 - m_4) \equiv 0 \quad (\text{mod } 2\pi). \tag{17}$$

1. Если ν_1 и ν_3 соизмеримы с 2π, то преобразование S_2 принадлежит ко второй категории. Уравнение (17) может удовлетворяться только в том случае (если оно вообще может удовлетворяться), когда $\frac{m_1 - m_2}{h_1} + \frac{m_3 - m_4}{h_2}$ равно целому числу, где h_1 и h_2 — два определенных целых числа. Если

$$\frac{2\pi}{h_1}(m_1 - m_2) \equiv 0 \ \ (\text{mod } 2\pi), \qquad \frac{2\pi}{h_2}(m_3 - m_4) \equiv 0 \ \ (\text{mod } 2\pi),$$

то F инвариантна относительно преобразований

$$\left(e^{\frac{2i\pi}{h_1}},\ e^{-\frac{2i\pi}{h_1}},\ 1,\ 1\right)$$

и

$$\left(1,\ 1,\ e^{\frac{2i\pi}{h_2}},\ e^{-\frac{2i\pi}{h_2}}\right),$$

принадлежащих ко второй категории *.

2. Если ν_1 и ν_2 несоизмеримы с 2π или, если нельзя удовлетворить уравнению (17), то не существует формы, инвариантной относительно S.

Окончательно, если существуют инвариантные формы, то они удовлетворяют уравнению (16) и они инварианты относительно одной или двух подстановок второй категории.

Каковы теперь формы, инвариантные относительно T? Чтобы их найти, достаточно применить подстановку Σ к формам, инвариантным относительно S. Пусть y_1, y_2, y_3, y_4 — новые переменные, q_1, q_2, q_3, q_4 — производные F по этим новым переменным; y связаны с x и y с p с помощью линейных уравнений, так что после применения преобразования Σ уравнение (16) перейдет в следующее **:

$$\begin{aligned} &q_1(a_1y_1+b_1y_2+c_1y_3+d_1y_4)+\\ &+q_2(a_2y_1+b_2y_2+c_2y_3+d_2y_4)+\\ &+q_3(a_3y_1+b_3y_2+c_3y_3+d_3y_4)+\\ &+q_4(a_4y_1+b_4y_2+c_4y_3+d_4y_4)=0. \end{aligned} \tag{18}$$

Значит, формы, инвариантные относительно T, должны удовлетворять уравнению (18). Если преобразование, каноническое для T, действительно, то это условие является достаточным. Если преобразование, каноническое для T, не действительно, то могут представиться два случая.

В первом случае формы, инвариантные относительно T, являются, кроме того, инвариантными относительно одной или двух подстановок второй категории.

Во втором случае нет форм, инвариантных относительно T.

---

* Это рассуждение не полно. Возможно, могли бы существовать и другие преобразования. Вычисление повторено ниже с большей точностью для тернарных форм (Подобные преобразования второй категории, стр. 845). (*А. Ш.*).

** Это соотношение (18), билинейное относительно q_i и y_i, может быть выражено в матричных обозначениях

$$\|q_1q_2q_3q_4\| \times \Sigma^{-1} \times S_1 \times \begin{Vmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4 \end{Vmatrix};$$

Σ — подстановка, переводящая y в x; S_1 — действительная часть преобразования, канонического для T. Таким образом получаем значения коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i. (*А. Ш.*).

2. Образование инвариантных форм

Зададимся целью образовать все кубические формы, бинарные, тернарные и кватернарные, инвариантные относительно действительного канонического преобразования первой категории, так же как и относительно соответствующих преобразований. Вот каким образом мы будем это делать.

Мы выберем в самой общей кубической тернарной или кватернарной форме два произвольных члена для тернарных форм, три произвольных члена для кватернарных форм, и образуем таким образом все возможные комбинации, исключая, однако:

1) комбинации, приводящие к бинарной форме (если речь идет о тернарных формах) или к тернарной форме (если речь идет о кватернарных формах);

2) комбинации, сводящиеся к уже полученным, если поменять местами переменные;

3) комбинации, приводящие к форме, инвариантной относительно преобразования второй или третьей категории.

Вот каким образом можно было бы узнать эти последние комбинации.

Предположим, что каноническое преобразование имеет вид

$$S=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4).$$

Если в комбинации окажутся сразу два члена

$$x_1^3 \quad \text{и} \quad x_2^3,$$

то ясно, что форма, к которой приводит эта комбинация, может быть инвариантна относительно S, только когда

$$\alpha_1^3=\alpha_2^3,$$

а тогда S принадлежит к третьей категории.

Аналогично, если одновременно будут присутствовать

$$x_1^2x_4 \ \text{и}\ x_2^2x_4, \quad \text{или} \quad x_1x_4^2 \ \text{и}\ x_2x_4^2,$$

или

$$x_1x_3x_4 \quad \text{и} \quad x_2x_3x_4,$$

то ясно, что должно выполняться

$$\alpha_1^2=\alpha_2^2, \quad \text{или} \quad \alpha_1=\alpha_2$$

и что, следовательно, S принадлежит ко второй или третьей категории.

Во всех этих случаях подобные комбинации должны быть отброшены.

При этих условиях мы приходим к следующей таблице: слева я пишу инвариантную форму, а справа соответствующее преобразование. Только, ради краткости записи, повсюду вместо

$$(e^{\mu_1},\ e^{\mu_2},\ e^{\mu_3},\ e^{\mu_4})$$

я пишу

$$(\underline{\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4});$$

прямая черта внизу позволяет не путать два обозначения.

Бинарные формы

$$xy^2 \quad (\underline{-2,1}).$$

Тернарные формы

$$z^3+xy^2 \quad (\underline{-2,1,0}),$$
$$z^3+xyz \quad (\underline{-1,1,0}),$$
$$yz^2+xy^2 \quad (\underline{4,-2,1}).$$

Кватернарные формы

$$t^3+yz^2+xy^2 \quad (\underline{4,-2,1,0}),$$
$$t^3+yz^2+xyt \quad (\underline{2,-2,1,0}),$$
$$t^3+yz^2+xzt \quad (\underline{-1,-2,1,0}),$$
$$xy^2+zt^2+z^2y \quad (\underline{-8,4,-2,1}),$$
$$xy^2+z^2y+xzt \quad (\underline{-4,2,-1,5}).$$

(Мы для краткости обозначили x_1, x_2, x_3, x_4 через x, y, z, t.)

Следовало бы добавить к таблице те формы, которые получатся, если придать каждому члену предыдущих форм произвольный числовой коэффициент, и те, которые получатся, если произвольным образом переставить переменные. Ясно, кроме того, что форма, инвариантная относительно преобразования первой категории, инвариантна относительно всех степеней — целых, дробных или иррациональных — этого преобразования.

Выпишем теперь кватернарные формы, инвариантные относительно двух канонических преобразований, относительно степеней этих преобразований и относительно произведений этих степеней. Легко найти все формы, удовлетворяющие этому условию; это формы:

$$x^3+yzt \quad (\underline{0,\ 1,\ -1,\ 0}) \quad (\underline{0,\ 1,\ 0,\ -1}),$$
$$x^2y+z^2t \quad (\underline{1,\ -2,\ 0,\ 0}) \quad (\underline{0,\ 0,\ 1,\ -2}),$$
$$x^2y+xzt \quad (\underline{1,\ -2,\ -1,\ 0}) \quad (\underline{1,\ -2,\ 0,\ -1}),$$
$$x^2y+yzt \quad (\underline{1,\ -2,\ 2,\ 0}) \quad (\underline{1,\ -2,\ 0,\ 2}).$$

В силу предыдущего получаем следующее утверждение:

Тернарными кубическими формами, инвариантными относительно преобразования первой категории, являются те, которые принадлежат к четвертому, пятому и шестому семействам. (Следовало бы добавить: те, которые принадлежат к седьмому семейству, которые явно не фигурируют в таблице и которые можно рассматривать как частный случай форм пятого семейства.)

3. Подобные преобразования третьей категории

Пусть

$$S=(\underline{\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4})$$

— подобное преобразование третьей категории, причем два или более из чисел μ равны между собой.

Пусть для определенности

$$\mu_1=\mu_2.$$

Предположим, кроме того, что μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 действительны; так как, если бы это не выполнялось, то мы положили бы

$$\mu_1=\mu_1'+i\mu_1'',\quad \mu_2=\mu_2'+i\mu_2'',\quad \mu_3=\mu_3'+i\mu_3'',\quad \mu_4=\mu_4'+i\mu_4'',$$

откуда

$$S=S_1\cdot S_2,\qquad S_1=(\underline{\mu_1',\ \mu_2',\ \mu_3',\ \mu_4'}),\qquad S_2=(\underline{i\mu_1'',\ i\mu_2'',\ i\mu_3'',\ i\mu_4''}),$$

и доказали бы без труда, что всякая форма, инвариантная относительно S, инвариантна относительно S_1.

Если μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 действительны, то всякая форма, инвариантная относительно S, должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\mu_1x_1p_1+\mu_2x_2p_2+\mu_3x_3p_3+\mu_4x_4p_4=0.$$

Чтобы найти формы, инвариантные относительно S, достаточно построить все формы от x_2, x_3, x_4, инвариантные относительно

$$(\underline{\mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4}),$$

где затем заменить x_2^m однородной произвольной функцией степени m от x_1 и x_2.

Применим это правило к тернарным формам. Каковы тернарные кубические формы, инвариантные относительно

$$S=(\underline{\alpha,\ \alpha,\ \beta})?$$

Бинарные формы, инвариантные относительно

$$(\underline{\alpha,\ \beta}),$$

это

$$xy^2$$

(см. таблицу инвариантных форм).

Следовательно, единственные тернарные формы, инвариантные относительно S, имеют вид

$$axy^2+2bxyz+cxz^2$$

и, следовательно, разложимы на три множителя.

Отсюда следует, что единственными кубическими тернарными формами, инвариантными относительно преобразования третьей категории и типа A, являются формы седьмого семейства.

4. Подобные преобразования второй категории

Мы будем в дальнейшем заниматься только тернарными кубическими формами. Если такая форма инвариантна относительно преобразования второй категории и типа A', то она инвариантна, равным образом, относительно всех целых степеней этой подстановки. Следовательно, она инвариантна относительно преобразования третьей категории и типа A. Следовательно, она принадлежит к седьмому семейству, а относительно форм этого семейства нам нечего добавить к работам Эрмита.

Рассмотрим теперь кубическую тернарную форму, инвариантную относительно преобразования второй категории и типа B'.

Если это преобразование действительно, то его каноническое имеет один из трех видов

$$(\underline{i\nu_1,\ -i\nu_1,\ 0}),$$
$$(\underline{i\nu_1,\ -i\nu_1,\ i\pi}),$$
$$(\underline{0,\ i\pi,\ 0}).$$

Если каноническое преобразование имеет первый вид и если $x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3}$ — один из членов кубической формы, инвариантной относительно этого канонического преобразования, то мы имеем

$$\nu_1(m_1-m_2)\equiv 0 \pmod{2\pi},$$

а так как m_1-m_2 может равняться только 0, или ± 1, или ± 2, или ± 3, мы имеем

$$\nu_1=\pi;\quad \nu_1=\frac{2\pi}{3}\quad \text{или}\quad \nu_1=\frac{4\pi}{3}.$$

I.1. Пусть сначала

$$\nu_1=\pi.$$

Сравнение

$$\pi(m_1-m_2)\equiv 0 \pmod{2\pi}$$

имеет следующие решения:

$$\begin{array}{lll} m_1=2, & m_2=0, & m_3=1, \\ m_1=1, & m_2=1, & m_3=1, \\ m_1=0, & m_2=2, & m_3=1, \\ m_1=0, & m_2=0, & m_3=3, \end{array}$$

так что формы, инвариантные относительно

$$\underline{(i\pi,\ -i\pi,\ 0)},$$

запишутся в виде

$$x^2z+xyz+y^2z+z^3$$

(где каждый член умножается на произвольный коэффициент). Следовательно, они принадлежат к пятому или шестому семейству.

I.2. Пусть

$$\nu_1=\frac{2\pi}{3}\ \text{или}\ \frac{4\pi}{3}.$$

Сравнение

$$\frac{2\pi}{3}(m_1-m_2)\equiv 0 \pmod{2\pi}$$

имеет решения:

$$\begin{array}{lll} m_1=3, & m_2=0, & m_3=0, \\ m_1=0, & m_2=3, & m_3=0, \\ m_1=0, & m_2=0, & m_3=3, \\ m_1=1, & m_2=1, & m_3=1, \end{array}$$

так что формы, инвариантные относительно

$$\underline{\left(\frac{2i\pi}{3},\ -\frac{2i\pi}{3},\ 0\right)}\ \text{или}\ \underline{\left(\frac{4i\pi}{3},\ -\frac{4i\pi}{3},\ 0\right)},$$

запишутся в виде

$$x^3+y^3+z^3+xyz \tag{19}$$

(где каждый член умножается на произвольный коэффициент).

II. Пусть теперь каноническое преобразование имеет вид

$$\underline{(i\nu_1,\ -i\nu,\ i\pi)}.$$

Оно приводит к сравнению

$$\nu_1(m_1-m_2)+\pi m_3\equiv 0 \pmod{2\pi},$$

откуда

$$2\nu_1(m_1-m_2)\equiv 0 \pmod{2\pi},$$

где

$$\nu_1 = \pi,\ \nu_1 = \frac{\pi}{2},\quad \nu_1 = \frac{2\pi}{3},\quad \nu_1 = \frac{\pi}{3},\quad \nu_3 = \frac{5\pi}{3}.$$

Если $\nu_1 = 0$, то имеем

$$m_1 - m_2 + m_3 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2),$$

или

$$m_1 + m_2 + m_3 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2),$$

или

$$3 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2),$$

что абсурдно.

Если $\nu_1 = \pi/2$, то данная форма должна быть инвариантной относительно

$$\underline{\left(i\,\frac{\pi}{2},\ \frac{-i\pi}{2},\ i\pi\right)}^2 = \underline{(i\pi,\ -i\pi,\ 0)};$$

следовательно, она запишется в виде

$$z^3 + zx^2 + zy^2 + xyz.$$

Но если поменять z на $-z$, то член с z^3 изменит знак. Значит, она не должна содержать члена с z^3, и, следовательно, она принадлежит к седьмому семейству.

Если $\nu_1 = 2\pi/3$, то форма должна быть инвариантной относительно

$$\underline{\left(\frac{2i\pi}{3},\ \frac{-2i\pi}{3},\ i\pi\right)}^3 = \underline{\left(\frac{2i\pi}{3},\ \frac{-2i\pi}{3},\ 0\right)}\underline{(0,\ 0,\ i\pi)}.$$

Значит, она не должна меняться при замене z на $-z$, т. е. она может содержать члены только с

$$x^3,\ y^3,\ z^2x \text{ или } z^2y.$$

Кроме того, она должна быть инвариантной относительно

$$\underline{\left(\frac{2i\pi}{3},\ \frac{-2i\pi}{3},\ i\pi\right)}^2 = \underline{\left(\frac{4i\pi}{3},\ \frac{-4i\pi}{3},\ 0\right)}$$

и может, следовательно, содержать члены только с

$$x^3,\ y^3,\ z^3 \text{ и } xyz.$$

Значит, такая форма должна быть не зависящей от z. Она принадлежит, следовательно, к седьмому семейству. К этому же результату приходим для $\nu_1 = 4\pi/3$.

Если $\nu_1 = \pi/3$, то форма, являясь инвариантной относительно

$$\left(\underline{\frac{i\pi}{3}, \frac{-i\pi}{3}, i\pi}\right)^2 = \left(\underline{\frac{2i\pi}{3}, \frac{-2i\pi}{3}, 0}\right),$$

содержит члены только с

$$z^3, \ xyz, \ x^3, \ y^3.$$

Но если положить

$$x = e^{\frac{i\pi}{3}}\xi, \quad y = e^{\frac{-i\pi}{3}}\eta, \quad z = -\zeta,$$

то z^3, xyz, x^3, y^3 заменятся на

$$-\zeta^3, \ -\xi\eta\zeta, \ -\xi^3, \ -\eta^3.$$

Следовательно, не существует формы, инвариантной относительно такого преобразования. Это же верно и для $\nu_1 = 5\pi/3$.

Наконец, если рассмотреть каноническое преобразование

$$(\underline{0, \ 0, \ i\pi}),$$

то видно, что форма, которую оно воспроизводит, должна иметь вид

$$x^3 + y^3 + xz^2 + yz^2$$

(где каждый член умножен на подходящий коэффициент).

Легко видеть, что кривая, представленная подобной формой, имеет точку перегиба при

$$x = y = 0$$

и что полярой этой точки перегиба относительно нашей кривой служит прямая $z = 0$.

Следовательно, для того чтобы найти все преобразования второй категории, воспроизводящие заданную кубическую кривую F, необходимо отыскать все преобразования Σ такие, что

$$F \cdot \Sigma = \alpha x^3 + \beta y^3 + \gamma z^3 + 6\delta xyz,$$

и все преобразования S такие, что

$$F \cdot S = \alpha x^3 + \beta y^3 + 3\gamma xz^2 + 3\delta yz^2.$$

Подстановками второй категории, воспроизводящими F, будут тогда

$$\Sigma \cdot \left(\underline{\frac{2i\pi}{3}, \frac{-2i\pi}{3}, 0}\right) \cdot \Sigma^{-1}, \qquad \Sigma \cdot \left(\underline{\frac{4i\pi}{3}, \frac{-4i\pi}{3}, 0}\right) \cdot \Sigma^{-1},$$

$$S \cdot (\underline{0, \ 0, \ i\pi}) \cdot S^{-1}.$$

Приложим предыдущие принципы к формам других семейств.

Первое и второе семейства. Форма

$$6\alpha xyz+\beta(x^3+y^3+z^3)$$

инвариантна относительно следующих преобразований, принадлежащих ко второй категории (мы выписываем только действительные преобразования):

$$\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix};$$

все эти преобразования сводятся к перестановкам букв x, y, z. Это как раз тот результат, который легко было предвидеть. Действительно, система трех прямых

$$x=0,\qquad y=0,\qquad z=0$$

является единственной системой трех действительных прямых, на которых расположены девять точек перегиба. Всякое действительное преобразование, воспроизводящее данную форму, должно, таким образом, воспроизводить систему этих трех прямых. Следовательно, оно должно сводиться к перестановкам этих трех прямых. Важным следствием является тот факт, что все подстановки, воспроизводящие форму

$$6\alpha xyz+\beta(x^3+y^3+z^3),$$

воспроизводят также форму

$$x^2+y^2+z^2.$$

Третье семейство. Форма

$$6\alpha xyz+\beta(x^3+y^3),$$

очевидно, инвариантна относительно всякой подстановки, сводящейся к перестановке букв x и y. Обратно, так как прямые $x=0$, $y=0$ являются касательными в двойной точке, всякая действительная или мнимая подстановка, воспроизводящая данную форму, должна воспроизводить систему этих двух прямых и, следовательно, сводится к перестановке букв x и y.

Так же можно видеть, что единственной подстановкой, воспроизводящей

$$\beta x^3+3\beta xy^2+3\alpha x^2z+3\alpha y^2z,$$

является подстановка

$$x=\xi,\qquad y=-\eta,\qquad z=\zeta.$$

Заметим, что две подстановки

$$x = \eta, \quad y = \xi, \quad z = \zeta,$$
$$x = \xi, \quad y = -\eta, \quad z = \zeta,$$

воспроизводящие соответственно

$$\beta x^3 + \beta y^3 + 6\alpha xyz,$$
$$\beta x^3 + 3\beta y^2 x + 3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z,$$

воспроизводят также *

$$x^2 + y^2 + z^2.$$

Пятое семейство. По тем же причинам единственными преобразованиями второй категории, воспроизводящими **

$$z^3 + 6\alpha xyz,$$
$$z^3 + 3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z,$$

будут

$$x = \eta, \quad y = \xi, \quad z = \zeta,$$
$$x = -\xi, \quad y = -\eta, \quad z = \zeta,$$
$$x = -\eta, \quad y = -\xi, \quad z = \zeta$$

для первой формы и, кроме того,

$$x = -\xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta,$$
$$x = -\xi, \quad y = -\eta, \quad z = \zeta,$$
$$x = \xi, \quad y = -\eta, \quad z = \zeta$$

для второй.

Эти подстановки воспроизводят равным образом

$$x^2 + y^2 + z^2.$$

Четвертое семейство. Те же принципы позволяют без труда доказать, что формы четвертого семейства не инвариантны относительно ни одного преобразования второй категории ***.

Шестое семейство. Каноническая форма

$$x^2 y + y^2 z$$

---

* Замечание интересно тем, что эта форма может быть использована для определения приведенной арифметической формы. [См. ниже, вторую часть (Арифметика) настоящей работы о *кубических формах* и т. д., стр. 861]. (*А. Ш.*).

** Напомним, что имеются также подстановки первой категории (см. выше таблицу и заметку в C. r. Acad. sci.). (*А. Ш.*).

*** Они инвариантны относительно подстановок первой категории (см. выше таблицу и заметку в C. r. Acad. sci.). (*А. Ш.*).

инвариантна относительно следующих преобразований второй категории*:

$$x+\lambda y=-\xi-\lambda\eta,$$
$$y=\eta,$$
$$z-2\lambda x-\lambda y=\zeta-2\lambda\xi-\lambda\eta,$$

где λ — произвольная величина. Эти преобразования запишутся в привычных обозначениях следующим образом:

$$\begin{vmatrix} -1 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4\lambda & -4\lambda^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Все они являются произведениями единственного преобразования

$$(-1,\ 1,\ 1)$$

на одну из подстановок первой категории, воспроизводящую данную форму.

5. Подобные преобразования четвертой категории

Мы займемся только типами A_1, B_1 и E_1. То, что мы скажем относительно этих типов, без труда обобщается на типы C_1, D_1, F_1.

Тип A_1. Пусть F — форма, однородная относительно x_1, x_2 и x_3 и инвариантная относительно преобразования

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & \gamma & \beta \end{vmatrix}.$$

F можно разложить на сумму членов вида

$$x_1^m\varphi,$$

где φ — форма, однородная относительно x_2 и x_3 и инвариантная, с точностью до постоянного множителя, относительно линейной подстановки

$$x_2=\beta\xi_2,$$
$$x_3=\gamma\xi_2+\beta\xi_3;$$

φ разложима на линейные множители и может быть записана в виде

$$\varphi=A(x_2-\alpha_1x_3)(x_2-\alpha_2x_3)\ldots(x_2-\alpha_px_3).$$

* А также относительно подстановки первой категории (таблица выше с перестановкой координат x и z). (*А. Ш.*).

После применения линейной подстановки она примет вид

$$A(\beta\xi_2 - \alpha_1\gamma\xi_2 - \alpha_1\beta\xi_3)(\beta\xi_2 - \alpha_2\gamma\xi_2 - \alpha_2\beta\xi_3)\ldots(\beta\xi_2 - \alpha_p\gamma\xi_2 - \alpha_p\beta\xi_3).$$

В силу инвариантности φ, должно выполняться

$$\frac{\beta - \alpha_1\gamma}{\beta} = \frac{\beta - \alpha_2\gamma}{\beta} = \ldots = \frac{\beta - \alpha_p\gamma}{\beta} = 1,$$

откуда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0.$$

Поэтому φ зависит только от x_2 и, значит, F зависит только от x_1 и x_2. Следовательно, все формы, инвариантные относительно преобразования типа A_1, сводятся к бинарным формам.

Тип B_1. Пусть преобразование имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix}.$$

Оно, очевидно, воспроизводит форму x_1. Найдем теперь квадратичные формы, инвариантные относительно этого преобразования.

Пусть

$$A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + A_3x_3^2 + 2B_1x_2x_3 + 2B_2x_1x_3 + 2B_3x_1x_2$$

— общая квадратичная форма. После применения нашего преобразования она станет равной

$$\begin{aligned} &A_1\xi_1^2 + A_2\xi_2^2 + A_3\xi_3^2 + 2B_1\xi_2\xi_3 + 2B_2\xi_1\xi_3 + 2B_3\xi_1\xi_2 + \\ &\quad + 2A_2\alpha\xi_2\xi_1 + 2A_3\beta\gamma\xi_2\xi_1 + 2B_1\beta\xi_2\xi_1 + 2B_1\alpha\gamma\xi_2\xi_1 + 2B_2\gamma\xi_1\xi_2 + \\ &\quad + A_2\alpha^2\xi_1^2 + A_3\beta^2\xi_1^2 + 2B_1\alpha\beta\xi_1^2 + 2B_2\beta\xi_1^2 + 2B_3\alpha\xi_1^2 + A_3\gamma\xi_2^2 + \\ &\quad + 2B_1\gamma\xi_2^2 + 2A_3\gamma\xi_2\xi_3 + 2A_3\beta\xi_1\xi_3 + 2B_1\alpha\xi_1\xi_3, \end{aligned}$$

что приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} A_2\alpha + A_3\beta\gamma + B_1(\beta + \alpha\gamma) + B_2\gamma &= 0, \\ A_2\alpha^2 + A_3\beta^2 + 2B_1\alpha\beta + 2B_2\beta + 2B_3\alpha &= 0, \\ A_3\gamma^2 + 2B_1\gamma &= 0, \\ A_3\gamma &= 0, \\ A_3\beta + B_1\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Вообще говоря*, $\gamma \neq 0$; следовательно

$$A_3 = B_1 = 0$$

---

* Если бы γ равнялось нулю, то можно было провести рассуждения, аналогичные предыдущим, касающимся типа A_1. (*А. Ш.*).

и предыдущие уравнения сводятся к

$$\begin{aligned} &A_2\alpha + B_2\gamma = 0, \\ &A_2\alpha^2 + 2B_2\beta + 2B_3\gamma = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

A_1, таким образом, произвольно, а из двух уравнений (20), однородных относительно A_2, B_2, B_3, всегда можно найти значения этих величин, так как однородные уравнения всегда совместны.

Итак, пусть A_2, B_2, B_3 — три величины, удовлетворяющие уравнениям (20). Для того чтобы квадратичная форма была инвариантной относительно данного преобразования, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид

$$A_1x_1^2 + \lambda\,(A_2x_2^2 + 2B_2x_1x_3 + 2B_3x_1x_2), \tag{21}$$

где A_1 и λ — произвольные величины.

Обратно, если в форме (21) заданы произвольные величины A_1, A_2, B_2, B_3, то можно найти бесконечно много систем значений α, β, γ, удовлетворяющих уравнениям (20). Я извлекаю отсюда попутно следующий результат:

Любая тернарная квадратичная форма инвариантна относительно бесконечного множества преобразований четвертой категории.

Пусть теперь F — произвольная форма, инвариантная относительно рассмотренного преобразования, и пусть C — кривая, которую она представляет.

Возьмем произвольную кривую второго порядка

$$A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + 2B_2x_2x_3 + 2B_3x_1x_2 = 0,$$

где A_1 — произвольный параметр и где значения A_2, B_2, B_3 получены из уравнений (20). Через каждую точку m кривой C можно провести одно из этих конических сечений. Так как эти конические сечения инвариантны, то последовательные образы точек лежат одновременно на кривой C и на коническом сечении, проходящем через m. Но у точки m бесконечно много последовательных образов, тогда как кривая C и коническое сечение, являясь алгебраическими кривыми, не могут иметь бесконечно много общих точек, если только они не совпадают тождественно. Значит, кривая C сводится к некоторому числу инвариантных конических сечений *.

Следствием этого является то, что форма F представляет собой функцию x_1 и

$$A_2x_2^2 + 2B_2x_1x_3 + 2B_3x_1x_2.$$

* И прямой $x_1=0$. (*А. Ш.*).

Она удовлетворяет, таким образом, дифференциальному уравнению

$$\begin{vmatrix} \frac{dF}{dx_1} & \frac{dF}{dx_2} & \frac{dF}{dx_3} \\ x & 0 & 0 \\ B_3x_2+B_2x_3 & A_2x_2+B_3x_1 & B_2x_1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(A_2x_2+B_3x_1)\frac{dF}{dx_3} - B_2x_1\frac{dF}{dx_2} = 0.$$

Следствие. Всякая форма, инвариантная относительно преобразования четвертой категории и типа B_1, удовлетворяет уравнению в частных производных, линейному и однородному как относительно переменных x_1, x_2 и x_3, так и относительно частных производных $\frac{dF}{dx_1}$, $\frac{dF}{dx_2}$, $\frac{dF}{dx_3}$.

Единственными кубическими формами, удовлетворяющими этому условию, являются формы шестого семейства*.

Тип E_1. Пусть кватернарная форма F инвариантна относительно

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \beta & 0 \\ 0 & \delta & \varepsilon & \beta \end{vmatrix}.$$

Эту форму можно представить в виде суммы членов вида

$$x_1^m\varphi,$$

где φ — форма, однородная относительно x_2, x_3, x_4.

Очевидно, что φ должна быть инвариантной, с точностью до постоянного множителя, относительно

$$\begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \beta & 0 \\ \delta & \varepsilon & \beta \end{vmatrix}$$

* Введение уравнения в частных производных представляется бесполезным для того, чтобы прийти к заключению, что всякая кубическая тернарная форма, инвариантная относительно подстановки типа B, необходимо распадается в произведение

$$x_1\,(A_2x_2^2+2B_2x_1x_3+2B_3x_1x_2)$$

и, следовательно, принадлежит к шестому семейству. (*А. Ш.*).

и, следовательно, абсолютно инвариантной относительно

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{\beta} & 1 & 0 \\ \frac{\delta}{\beta} & \frac{\varepsilon}{\beta} & 1 \end{vmatrix}.$$

Значит, φ удовлетворяет уравнению вида

$$(Ax_3 + Bx_2)\frac{d\varphi}{dx_4} - Cx_2\frac{d\varphi}{dx_3} = 0.$$

Это же верно для $x_1^m\varphi$ и, следовательно, для F.

Отсюда следует, что всякая кватернарная форма, инвариантная относительно преобразования типа E_1, удовлетворяет уравнению в частных производных, линейному и однородному как относительно переменных x_1, x_2, x_3, x_4, так и относительно частных производных $\frac{dF}{dx_1}$, $\frac{dF}{dx_2}$, $\frac{dF}{dx_3}$, $\frac{dF}{dx_4}$.

Этот результат без труда обобщается и распространяется на типы D_1, C_1 и F_1.

Всякая кватернарная форма, инвариантная относительно преобразования четвертой категории, удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных.

6. Одновременно подобные преобразования

Предположим, что форма инвариантна сразу относительно двух преобразований S и S_1. Она будет также инвариантной относительно всех произведений степеней S и S_1, таких как

$$S^\alpha S_1^\beta S^\gamma S_1^\delta S^\varepsilon \ldots.$$

Значит, можно образовать группу одновременно подобных преобразований, воспроизводящих заданную форму.

Предположим, что S и S_1 принадлежат к первой или третьей категории и что S каноническое. Всегда можно свести общий случай к этому частному случаю, если только S и S_1 не принадлежат ко второй категории, что мы не будем предполагать *.

---

* Это же ограничение равным образом сделано в более общем исследовании существования одновременных преобразований, которое явилось объектом работы, помещенной ниже («Oeuvres», t. 5, n. 39). (*А. Ш.*).

Если p_1, p_2, p_3, p_4 — четыре частные производные данной формы f относительно переменных x_1, x_2, x_3, x_4, то f должна удовлетворять дифференциальным уравнениям *.

$$\begin{gathered} ax_1p_1 + bx_2p_2 + cx_3p_3 + dx_4p_4 = 0, \\ (a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1x_4)\,p_1 + \\ + (a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_4)\,p_2 + \\ + (a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 + d_3x_4)\,p_3 + \\ + (a_4x_1 + b_4x_2 + c_4x_3 + d_4x_4)\,p_4 = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Это сейчас нам позволит образовать другим способом группу одновременно подобных преобразований, воспроизводящих f. Действительно, беря коммутатор двух уравнений (22) (которые представляют собой систему уравнений в частных производных первого порядка), затем беря снова коммутатор новых полученных уравнений, получаем новые уравнения в частных производных, которые можно сложить между собой, предварительно умножив на произвольные коэффициенты. Таким образом получается бесконечно много уравнений того же вида, что и второе из уравнений (22). Эти уравнения определяют, следовательно, новые преобразования, воспроизводящие f.

Итак, взяв коммутатор двух уравнений (22), найдем

$$\begin{gathered} 0 = [b_1(b-a)x_2 + c_1(c-a)x_3 + d_1(d-a)x_4]\,p_1 + \\ + [a_2(a-b)x_1 + c_2(c-b)x_3 + d_2(d-b)x_4]\,p_2 + \\ + [a_3(a-c)x_1 + b_3(b-c)x_2 + d_3(d-c)x_4]\,p_3 + \\ + [a_4(a-d)x_1 + b_4(b-d)x_2 + c_4(c-d)x_3]\,p_4. \end{gathered} \tag{23}$$

Возьмем снова коммутатор первого из уравнений (22) и уравнения (23). Мы получим новое уравнение (24), которое отличается от уравнения (23) только тем, что множители в скобках $(b-a)$, $(c-a)$, $(d-a)$,. . . заменены на $(b-a)^2$, $(c-a)^2$, $(d-a)^2$ . . . .

Для того чтобы уравнения (22) были совместны, необходимо, чтобы уравнение (24) являлось следствием уравнений (22) и (23) **.

Итак, предположим, что мы сложили уравнения (23) и (24), предварительно умножив их на подходящим образом выбранные коэффициенты. В результате получается уравнение (25), и всегда можно сделать так, чтобы в этом уравнении (25) коэффициент при x_3p_4, например, обратился в нуль.

---

* См. выше (стр. 839) уравнения (18) и примечание относительно значений их коэффициентов. (*А. Ш.*)

** Более систематическое изучение уравнений (22) и (23) сделано в заметке «Об инвариантности форм» («Oeuvres», t. 5, p. 73), которая была опубликована (1883) позднее настоящей работы (1881). (*А. Ш.*).

Первый случай, который может представиться, это тот, когда уравнение (25) сводится к

$$0=0,$$

что влечет за собой равенства

$$\begin{aligned}(a-b)\frac{b_1}{b_1}=(a-c)\frac{c_1}{c_1}=(a-d)\frac{d_1}{d_1}=\\=(b-a)\frac{a_2}{a_2}=(b-c)\frac{c_2}{c_2}=(b-d)\frac{d_2}{d_2}=\\=(c-a)\frac{a_3}{a_3}=(c-b)\frac{b_3}{b_3}=(c-d)\frac{d_3}{d_3}=\\=(d-a)\frac{a_4}{a_4}=(d-b)\frac{b_4}{b_4}=(d-c)\frac{c_4}{c_4}.\end{aligned} \qquad (26)$$

Предположим теперь, что уравнение (25) не сводится к тождеству. Образуем уравнение (27), беря коммутатор (25) и первое из уравнений (22). Ясно, что в (27) коэффициент при x_3p_4 равен нулю. Сложим затем уравнения (25) и (27), предварительно умножив их на такие константы, чтобы в результирующем уравнении (28) коэффициент при x_2p_4 равнялся нулю.

Если уравнение (28) сведется к тождеству, то мы придем к первому случаю, заменяя уравнения (23) и (24) на (25) и (27). Если уравнение (28) не является тождеством, то мы проделаем с (28) ту же операцию, что и с (25), и т. д. Ясно, что после, самое большее, двенадцати операций мы придем к тождеству.

Следовательно, все возможные случаи можно свести к первому случаю, и всегда можно предполагать, что уравнения (26) удовлетворены.

Мы сейчас будем обозначать для краткости через $a—b$ разности $a—b$, $a—c$, $a—d$, $b—c$, $b—d$, . . . и обозначать через b_i коэффициенты b_1, c_1, d_1, a_2, c_2, ...

Уравнениям (26) можно удовлетворить различными способами.

Первое предположение. Все $a—b$ равны между собой. В этом случае необходимо, чтобы все b_i были равны нулю, за исключением одного, например b_1.

Тогда уравнение (23) сведется к

$$p_1=0.$$

Отсюда заключаем, что всякая форма, инвариантная сразу относительно двух заданных преобразований, не содержит x_1 и, следовательно, сводится к тернарной форме. Значит, первое предположение нужно отбросить.

Во втором, третьем и четвертом предположениях мы считаем, что два из $a—b$ равны между собой.

Второе предположение. Имеем

$$a—b=a—c.$$

В этом случае необходимо, чтобы все b_i равнялись нулю, за исключением b_1 и c_1, или же за исключением a_2 и a_3.

Если

$$b_1 \neq 0; \qquad c_1 \neq 0,$$

то уравнение (23) сводится к

$$p_1 = 0.$$

Значит, форма F сводится к тернарной форме.

Если

$$a_2 \neq 0, \qquad a_3 \neq 0,$$

то уравнение (23) запишется в виде

$$a_2 p_2 + a_3 p_3 = 0$$

и его общий интеграл есть

$$F = \text{общая функция от } x_1,\ x_4,\ a_3 x_2 - a_2 x_3;$$

значит, F сводится к тернарной форме.

Следовательно, второе предположение нужно отбросить по тем же причинам, что и первое.

Третье предположение. Имеем

$$a - b = b - c.$$

В этом случае необходимо, чтобы все b_i аннулировались, за исключением b_1 и c_2*.

Уравнение (23) запишется в виде

$$b_1 x_2 p_1 + c_2 x_3 p_2 = 0$$

и его общий интеграл будет

$$F = \text{произвольная функция от } x_3,\ x_4,\ x_3 x_1 + \lambda x_2^2,$$

где λ — константа.

Значит, чтобы получить форму, инвариантную сразу как относительно преобразования, соответствующего (23), так и относительно канонического преобразования, достаточно сложить два одночлена одинаковой степени относительно

$$x_3,\ x_4 \text{ и } \sqrt{x_3 x_1 + \lambda x_2^2}.$$

---

* Или a_2 и b_3, что приводит к аналогичным заключениям, если индексы 1, 2, 3 заменить на 2, 3, 1. (*А. Ш.*).

В частности, можно получить две кубические формы, не разложимые на множители, а именно:

$$x_4^3 + x_3(x_3x_1 + \lambda x_2^2),$$
$$x_3^3 + x_4(x_3x_1 + \lambda x_2^2).$$

Четвертое предположение. Имеем

$$a - b = c - d.$$

Все b_i аннулируются, за исключением b_1 и d_3. Уравнение (23) запишется в виде

$$b_1x_2p_1 + d_3x_4p_3 = 0,$$

и его общим интегралом будет

$$F = \text{произвольная функция от } x_2,\ x_4,\ x_1x_4 + \lambda x_2x_3,$$

где λ — константа.

Таким образом получаются кубические формы, не разложимые на множители,

$$x_2^3 + x_4(x_1x_4 + \lambda x_2x_3),$$
$$x_4^3 + x_2(x_1x_4 + \lambda x_2x_3).$$

Вторая из этих форм получается из первой перестановкой индексов.

В пятом и шестом предположениях мы считаем, что три $a - b$ равны между собой.

Пятое предположение. Имеем

$$a - b = b - c = c - d.$$

Все b_i аннулируются, кроме b_1, c_2 и d_3.

Уравнение (23) запишется в виде

$$b_1x_2p_1 + c_2x_3p_2 + d_3x_4p_3 = 0,$$

откуда

$$F = \text{произвольная функция от } x_4,\ x_1x_2 + \lambda x_3^2,\ x_4^2x_1 + \mu x_4x_2x_3 + \nu x_3^3,$$

где λ, μ и ν — константы.

Отсюда заключаем, что единственной кубической формой, инвариантной сразу как относительно преобразования, соответствующего (23), так и относительно канонического преобразования, и, кроме того, не распадающейся на множители, будет следующая:

$$x_4^2x_1 + \mu x_4x_2x_3 + \nu x_3^3.$$

Шестое предположение. Имеем

$$a - b = a - c = a - d.$$

Все b_i обращаются в нуль, за исключением b_1, c_1, d_1, или же за исключением a_2, a_3, a_4. Уравнение (23) запишется в виде

$$p_1=0,$$

или же

$$a_2p_2+a_3p_3+a_4p_4=0,$$

так что F сводится к тернарной форме, и данное предположение надо отбросить.

В седьмом и восьмом предположениях принимается, что четыре $a-b$ равны между собой.

Седьмое предположение. Имеем

$$a-b=a-c=b-d=c-d.$$

Все b_i равны нулю, кроме b_1, c_1, d_2 и d_3.

Уравнение (23) запишется в виде

$$(b_1x_2+c_1x_3)\,p_1+d_2x_4p_2+d_3x_4p_3=0,$$

откуда

F=произвольная функция от x_4, $x_2+\nu x_3$, $x_4x_1+\lambda x_2^3+\mu x_2x_3$,
где λ, μ и ν — константы.

Отсюда легко заключаем, что не существует неразложимой кубической формы, инвариантной сразу относительно двух данных преобразований.

Восьмое предположение. Имеем

$$a-c=b-c=b-d=a-d.$$

Уравнение (23) должно свестись тогда к

$$c_1x_3p_1+d_1x_4p_1+c_2xp_2+d_2x_4p_4=0$$

и иметь общий интеграл

F=произвольная функция от x_3, x_4, $x_1x_3+\lambda x_1x_4+\mu x_2x_3+\nu x_2x_4$,

так что не существует никакой неразложимой кубической формы, инвариантной сразу как относительно преобразования, соответствующего уравнению (23), так и относительно канонического преобразования.

Девятое предположение *. Шесть квадратов $(a-b)$ равны. В этом случае, если умножить уравнение (24) на подходящий коэффициент и затем вычесть его из уравнения (22), то получится

$$a_1x_1p_1+b_2x_2p_2+c_3x_3p_3+d_4x_4p_4=0,$$

так что, если не имеет места

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_2}=\frac{c}{c_3}=\frac{d}{d_4},$$

* Мы сочли возможным слегка модифицировать редакцию А. Пуанкаре, в которой одна фраза была, по-видимому, пропущена. (*А. Ш.*).

то форма F инвариантна сразу относительно двух канонических преобразований, не являющихся степенями одной и той же подстановки.

Во всех предыдущих рассуждениях предполагалось, что уравнения (23) и (24) не сводятся к тождествам. Посмотрим, что получилось бы, если бы это было так.

Первое предположение. Все величины a, b, c, d различны между собой.

В этом случае все b_i должны обращаться в нуль, и уравнение (22) сводится к

$$a_1x_1p_1+b_2x_2p_2+c_3x_3p_3+d_4x_4p_4=0.$$

Следовательно, два заданных преобразования канонические, а мы видели выше таблицу кубических кватернарных форм, инвариантных сразу относительно двух таких преобразований.

Второе предположение. Имеем

$$a=b.$$

В этом случае все b_i равны нулю, кроме b_1 и a_2, и уравнение (22) запишется в виде

$$(a_1x_1+b_1x_2)\ p_1+(a_2x_1+b_2x_2)\ p_2+c_3x_3p_3+d_4x_4p_4=0.$$

Если предположить, что преобразование, соответствующее этому второму уравнению, принадлежит к первой или третьей категориям, то можно привести его к каноническому виду линейной заменой переменных, и легко видеть, что после этой замены преобразование, соответствующее второму уравнению (22), остается каноническим. Мы пришли к предыдущему случаю.

Если, напротив, предположить, что преобразование, соответствующее второму уравнению (22), принадлежит к четвертой категории, то оно принадлежит, очевидно, к типу C_1 и, следовательно, форма F сводима к тернарным формам.

Третье предположение. Имеем

$$a=b \text{ и } c=d;$$

все b_i равны нулю, кроме b_1, a_2, c_2 и d_3.

Четвертое предположение. Имеем

$$a=b=c;$$

все b_i равны нулю, кроме b_1, c_1, a_2, c_2, a_3, b_3.

Если при третьем и четвертом предположениях преобразование T, соответствующее второму уравнению (22), принадлежит к первой или третьей категориям, то мы будем рассуждать как и при втором предположении и придем к тому же результату.

Если при третьем предположении это преобразование T принадлежит к четвертой категории, то оно принадлежит к типу D_1, и, следовательно, форма F сводима к бинарным формам.

Если при четвертом предположении T принадлежит к четвертой категории, то оно типа E_1. Но всякая кватернарная форма, инвариантная относительно преобразования типа E_1, разложима на множители.

Выводы

Мы видели выше таблицу кватернарных кубических форм, инвариантных относительно двух канонических преобразований, не являющихся степенями одной и той же подстановки.

Мы сейчас дадим, опираясь на предыдущие рассмотрения, таблицу кубических кватернарных форм, которые не сводятся к тернарным формам, не распадаются на множители и которые инвариантны относительно двух преобразований первой, третьей или четвертой категорий; из них одно каноническое, а другое не каноническое

$$x_4^3 + x_3^2 x_1 + x_3 x_2^2,$$

$$x_2^3 + x_3 x_4 x_1 + x_4 x_2^2,$$

$$x_2^3 + x_1 x_4^2 + x_4 x_2 x_3.$$

Следовало бы, разумеется, добавить сюда те формы, которые можно получить из предыдущих, добавляя к каждому члену произвольный коэффициент, а также формы, получающиеся из них перестановкой индексов.

Что касается тернарных форм, то для них не нужно проводить предыдущего длительного обсуждения. Действительно, рассмотрим, например, формы четвертого семейства. Они представляют кривые, у которых есть точка возврата и точка перегиба. Всякая подстановка, воспроизводящая данную форму, воспроизводит также эти две сингулярные точки, касательные в этих точках и прямую, их соединяющую.

Если каноническое преобразование первой категории воспроизводит этот треугольник, то значит это базисный треугольник. А если он базисный, то всякое преобразование первой категории, его воспроизводящее, будет каноническим.

Следовательно, форма четвертого семейства не может быть инвариантной сразу относительно двух преобразований первой категории, из которых одно каноническое, а другое нет. Впрочем, мы видели, что такая форма не будет инвариантной относительно какой-либо подстановки третьей или четвертой категории.

Это же самое рассуждение применимо к формам пятого семейства. Следовательно, единственными тернарными кубическими формами, инвариантными сразу относительно двух преобразований первой, третьей и четвертой категории, из которых одно каноническое, а другое нет, будут формы шестого семейства.

В ближайшей работе, я применю предыдущие рассмотрения к арифметическому исследованию тернарных кубических форм.

О ТЕРНАРНЫХ И КВАТЕРНАРНЫХ КУБИЧЕСКИХ ФОРМАХ. II *

В первой части этой работы** я изучал общие и, в частности, тернарные и кватернарные кубические формы с чисто *алгебраической* точки зрения и искал, среди прочего, линейные преобразования, воспроизводящие заданную форму.

Я могу теперь приступить к исследованию арифметических проблем, которые представляют собой главный объект этой работы:

1) узнать, будут ли эквивалентными две данные формы***;

2) распределить формы по *классам*, *родам* и *порядкам*****;

3) найти преобразования с целыми коэффициентами, воспроизводящие заданную форму.

Я решу эти проблемы, обобщая метод Эрмита, относительно которого я хочу дать сначала некоторые пояснения.

VI. Метод Эрмита

Для того чтобы две формы были *арифметически эквивалентными*, необходимо, прежде всего, чтобы они были *действительно эквивалентными******. Это можно обнаружить с помощью чисто алгебраических рассуждений, дающих возможность также найти преобразование, которое переводит одну из них в другую.

---

* Journal de l'Ecole Polytechnique, 1882, Cahier 51, 45—91.

** См. выше стр. 819. На самом деле, в этой второй части А. Пуанкаре изучает только тернарные формы. Нумерация параграфов продолжает нумерацию первой части. (*А. Ш.*).

*** Две формы *арифметически эквивалентны*, если от одной из них можно перейти к другой с помощью *целой и унитарной* (теперь сказали бы *унимодулярной*) подстановки. *Класс* — это совокупность форм, арифметически эквивалентных одной из них. См. первую часть этой работы, стр. 821. (*А. Ш.*).

**** Определение *родов* (формы или подстановки) дано ниже (стр. 882—884 для третьего семейства, стр. 886—891 для четвертого, стр. 896 для шестого). Не похоже, чтобы А. Пуанкаре определил в дальнейшем разбиение по *порядкам*. (*А. Ш.*).

***** Две формы действительно (или алгебраически) эквивалентны, если от одной из них можно перейти к другой с помощью подстановки с действительными членами и детерминантом, равным 1. (*А. Ш.*).

Итак, пусть F и F' — две формы, арифметическую эквивалентность которых нужно обнаружить. Предположим, что они действительно эквивалентны и получены с помощью линейных подстановок из одной и той же канонической формы H. Чтобы узнать, будут ли F и F' арифметически эквивалентными, нужно определить формы, играющие по отношению к F и F' ту же роль, какую приведенные формы играют по отношению к квадратичным.

Вначале необходимо дать несколько определений.

Назовем *приведенной подстановкой* всякую подстановку, после применения которой к определенной квадратичной форме

$$X_1^2+X_2^2+X_3^2 \quad \text{или} \quad X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2,$$

получается определенная приведенная квадратичная форма.

Среди форм, полученных из канонической H, назовем *приведенными формами* все формы, которые получаются из H с помощью приведенной подстановки.

Пусть нужно найти все приведенные формы, арифметически эквивалентные форме F, которая в свою очередь действительно эквивалентна канонической форме H.

Пусть S — преобразование *, с помощью которого можно перейти от H к F, так что

$$F=H\cdot S.$$

Пусть τ — преобразование, воспроизводящее H. Очевидно, **

$$F=H\cdot\tau\cdot S,$$

и мы получим все преобразования, переводящие H в F, беря все преобразования τ, воспроизводящие H, и умножая их на S.

---

* Чтобы избежать недоразумений и облегчить чтение работы, обозначения А. Пуанкаре слегка модифицированы; буква S употреблена вместо буквы T, которая использована далее для обозначения приведенной формы $\tau\cdot S\cdot E$ (арифметически эквивалентной справа матрице $\tau\cdot S$).

Также методически использованы, за малыми исключениями, X_1, X_2, X_3 для обозначения переменных в канонических (алгебраических) формах и x_1, x_2, x_3 для обозначения переменных в рассматриваемых формах и в арифметических приведенных формах. (А. Пуанкаре произвольно использовал то эти переменные, то x, y, z, то ξ_1, ξ_2, ξ_3, ...) (*А. Ш.*).

** Действие подстановки S можно выразить матричным соотношением

$$\begin{Vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Vmatrix} = S\times\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix},$$

где S — квадратная регулярная матрица, X_i — переменные в H, x_i — переменные в F. Произведение подстановок определяется с помощью произведения матриц. (*А. Ш.*).

Для того чтобы найти все приведенные формы, эквивалентные F, необходимо отыскать все целые преобразования E*, такие чтобы подстановка

$$\tau \cdot S \cdot E = T$$

была приведенной, или, что то же самое, чтобы определенная квадратичная форма

$$(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \cdot \tau \cdot S \cdot E$$

или

$$(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2) \cdot \tau \cdot S \cdot E$$

была приведенной.

После того как известны определенные квадратичные формы, можно быть уверенным, что всегда существует целая унитарная подстановка E, приводящая

$$(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \cdot \tau \cdot S$$

или

$$(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2) \cdot \tau \cdot S.$$

Вообще говоря, такая подстановка только одна, и ее легко можно найти.

Таким образом, если нет подстановки, относительно которой тип H был бы инвариантен, то существует приведенная форма, эквивалентная F, и, вообще говоря, только одна.

Если тип H инвариантен относительно различных преобразований, то существует, вообще говоря, конечное или бесконечное число приведенных форм, эквивалентных F, которые легко найти.

Поэтому ясно, что для того чтобы две формы были арифметически эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы система приведенных форм для одной формы совпадала с системой приведенных форм для другой **.

---

* Подразумевается *унитарные* (унимодулярные). (*А. Ш.*).

** Представленный здесь метод сводится к отысканию приведенной формы $(\tau \times T \times E) = S$ матрицы $\tau \times X$ относительно *арифметической эквивалентности* (произведение на унимодулярную матрицу E) *справа*.

Нужно еще отыскать среди *сетки* точек в трехмерном пространстве

$$(\tau \times T) \times \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} \quad (x_1\ x_2,\ x_3 \text{ — целые})$$

приведенный базисный тетраэдр (начало координат и три точки), точки которого образуют S. Использование квадратичной формы

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot (\tau \times T) \text{ или } \| x_1 x_2 x_3 \| \times (\tau \times T) \times (\tau \times T) \times \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$$

Метод Эрмита может равным образом служить для нахождения всех *целых* подстановок, воспроизводящих F.

Действительно, предположим, что

$$F = F \cdot \Sigma,$$

где Σ — целая подстановка.

Пусть E — одна из подстановок, приводящих F, так что

$$F \cdot E$$

— приведенная.

Кроме того,

$$F \cdot E = F \cdot \Sigma \cdot E.$$

Таким образом, целая подстановка $\Sigma \cdot E$ приводит F к той же приведенной форме, что и подстановка E.

Следовательно, для того чтобы найти целое преобразование, воспроизводящее F, необходимо отыскать две целые унитарные подстановки, приводящие F и преобразующие эту форму в одну и ту же приведенную *.

Если E и E_1 — эти две подстановки, то

$$\Sigma = E_1 . E^{-1}$$

является целой подстановкой, воспроизводящей F.

VII. Свойства приведенных преобразований

Существуют многочисленные способы определения приведенных преобразований, так как существуют многочисленные способы определения приведенных форм для некоторой определенной квадратичной формы.

(относительно обозначений см. «Oeuvres», t. 5, p. 281) сводится к рассмотрению расстояний и углов в пространстве. Лежен-Дирихле выбирал тетраэдр с меньшими сторонами; Е. Селлинг использовал контур без острых углов (Encyclopedie des Science Mathematique. Ed. franc., I, 16, n. 34). Быть может, удобней использовать, как это предложил Г. Минковский, *Strahldistanz*, которая может быть, в частности, *Spanne* (наибольшая из абсолютных величин координат).

Во всех этих случаях выбранная приведенная подстановка $T = \tau \cdot S \cdot E$ переводит некоторую форму (квадратичную или Strahldistanz) $\Phi(X, Y, Z)$ в форму, рассматриваемую как приведенная, $\varphi(x_1, x_2, x_3)$. Но можно сделать так, чтобы стало возможным перейти от Φ к φ с помощью линейной подстановки (более простого вида) θ. Тогда T представимо в виде

$$T = \tau \cdot S \cdot E = U \cdot \theta,$$

где U — подстановка, автоморфная (или воспроизводящая) относительно формы $\Phi(X, Y, Z)$. (*А. Ш.*).

* Видно, что это условие является и достаточным. Таким же образом получаются все автоморфные (или воспроизводящие) подстановки формы F. См. более полное обоснование в работе «Об одновременном приведении двух форм» («Oeuvres», t. 5, p. 360). (*А. Ш.*).

Возьмем, для определенности, тернарную форму

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy.$$

Согласно первому определению, можно сказать, что эта форма приведенная: если A — наименьшее число, которое она может принимать, когда мы придаем x, y, z целые значения такие, чтобы одновременно не выполнялось

$$x=y=z=0;$$

если, кроме того A' — наименьшее число, которое она может принимать, когда мы придаем x, y, z целые значения такие, чтобы одновременно не выполнялось

$$y=z=0;$$

если, наконец, A'' — наименьшее число, которое она может принимать, когда мы придаем x, y, z целые значения такие, чтобы не выполнялось

$$z=0.$$

Мы могли бы обойтись так определенными приведенными преобразованиями и с их помощью достигли бы поставленной цели. Однако чаще всего мы будем пользоваться не этим определением, а тем, которым мы обязаны Коркину и Золотареву (Mathematische Annalen, 1873, 6).

Скажем, что форма приведенная, если ее можно записать в виде

$$\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3)=\mu_1(x_1+\varepsilon_{21}x_2+\varepsilon_{31}x_3)^2+\mu_2(x_2+\varepsilon_{32}x_3)^2+\mu_3x_3^2,$$

где

1) все ε меньше по абсолютной величине, чем $^1/_2$;

2) μ_1 — наименьшее из чисел, которые может принимать данная форма;

3) μ_2 — наименьшее из чисел, которые может принимать бинарная форма

$$\mu_2(x_2+\varepsilon_{32}x_3)^2+\mu_3x_3^2.$$

Преобразование $T=(\tau\cdot S\cdot E)$ будет тогда приведенным, если оно равно

$$U\times\begin{vmatrix}\sqrt{\mu_1} & \varepsilon_{21}\sqrt{\mu_1} & \varepsilon_{31}\sqrt{\mu_1}\\ 0 & \sqrt{\mu_2} & \varepsilon_{32}\sqrt{\mu_2}\\ 0 & 0 & \sqrt{\mu_3}\end{vmatrix}=U\times\Theta,$$

где U — некоторая подстановка, воспроизводящая (или оставляющая инвариантной) форму

$$\Phi(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$$

и где μ и ε удовлетворяют предыдущим условиям*.

Коркин и Золотарев в работе, на которую я ссылался, установили различные свойства μ. В случае тернарных форм

$$\mu_1\mu_2\mu_3 = 1,$$
$$\mu_2 > \frac{3}{4}\mu_1, \quad \mu_3 > \frac{3}{4}\mu_2, \quad \mu_3 > \frac{2}{3}\mu_1.$$

В случае кватернарных форм

$$\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = 1,$$
$$\mu_2 > \frac{3}{4}\mu_1, \quad \mu_3 > \frac{3}{4}\mu_2, \quad \mu_4 > \frac{3}{4}\mu_3, \quad \mu_3 > \frac{2}{3}\mu_1, \quad \mu_4 > \frac{1}{2}\mu_1.$$

Мы будем часто пользоваться этими свойствами**.

VIII. Размышления о предыдущем методе

Ясно, что только что данное определение приведенных форм, эквивалентных какой-либо форме, оставляет место для двусмысленности. Действительно, мы не придем к одному и тому же результату:

1) произвольным способом определяя приведенные преобразования (см. предыдущий раздел);

2) выбирая произвольным образом в качестве канонической форму H среди форм, алгебраически эквивалентных F.

Всякий раз, когда речь пойдет о приведенных формах данной формы F, нужно будет, следовательно, уточнить:

1) определены ли приведенные формы обычным образом, или тем, который предложен Коркиным и Золотаревым, или любым другим способом;

2) какова каноническая форма H, выбранная среди всех форм, действительно эквивалентных F.

---

* Действительно, можно найти унимодулярную подстановку E, переводящую квадратичную форму $\Phi(X_1, X_2, X_3)\cdot\tau\cdot S$ (построенную, исходя из $F = H\cdot\tau\cdot S$) в приведенную форму $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, и мы имеем

$$\Phi\cdot\tau\cdot S\cdot E = \Phi\cdot U\cdot E = \varphi. \quad (A.\ Ш.).$$

** Восстановлено неравенство $\mu_3 > \frac{3}{4}\mu_2$, которое здесь было пропущено и которое использовано дальше. Также восстановлены неравенства $\mu_3 > \frac{3}{4}\mu_2$, $\mu_4 > \frac{3}{4}\mu_3$, тоже пропущенные, но не использованные далее. (*А. Ш.*).

Так например, для бинарных квадратичных форм в качестве канонической выбирают или $\alpha(x^2+y^2)$, или же axy, или, наконец, $\alpha(x^2-y^2)$. Однако ясно, что так же можно было бы выбрать каноническую форму, отличную от этих. Мы бы пришли тогда к теории, совершенно идентичной обычной теории, хотя приведенные преобразования были бы определены совершенно другим способом.

IX. Теорема Жордана

Жордан доказал (C. r. Acad. Sci., 5 mai 1879) теорему, которую он сформулировал так:

Формы с целыми коэффициентами, алгебраически эквивалентные данной форме, распадаются на конечное число классов, если только дискриминант не равен нулю.*

Мы сейчас дадим этой теореме новое доказательство и покажем, что она верна не только в случае, когда дискриминант отличен от нуля, но и в некоторых случаях, когда он равен нулю.

Для того чтобы формы, алгебраически эквивалентные данной форме, распадались на бесконечное число классов, необходимо и достаточно, как мы сейчас покажем, чтобы не только дискриминант, но еще и другие образованные нами инварианты одновременно обращались в нуль.

Для доказательства теоремы Жордана мы сейчас установим, что может существовать только конечное число приведенных форм, алгебраически эквивалентных данной форме.

Предположим, для определенности, что речь идет о тернарной форме порядка m, алгебраически эквивалентной канонической форме H.

Мы назовем *приведенной формой первой категории* всякую приведенную форму, у которой коэффициенты при x_1^m и при $x_1^{m-1}x_2$ не обращаются в нуль одновременно.

Я утверждаю, во-первых, что приведенных форм первой категории с целыми коэффициентами конечное число.

Пусть
$$H=\sum B_{h,k,l}X_1^hX_2^kX_3^l$$

---

* Термин *алгебраически*, использованный К. Жорданом и повторенный ниже А. Пуанкаре, эквивалентен термину *действительно*, который употреблялся ранее (в частности, на стр. 861 и в первой части настоящей работы) для обозначения двух форм, полученных одна из другой линейной подстановкой с целыми коэффициентами и с детерминантом 1.

Кроме этой заметки, доказательство К. Жордана развито в работе (J. Ecole polytechn., 1890, Cahier 48, 151—158). Как и доказательство А. Пуанкаре, оно основано на приведении подстановки $\tau\cdot S$ с помощью квадратичной формы $\Phi\cdot\tau\cdot S$, приведенную форму которой мы ищем, следуя конструкции А. Коркина и Г. Золотарева.

Оригинальность доказательства А. Пуанкаре заключается в употреблении коэффициентов $A_{m,0,0}$, $A_{m-1,1,0}$ и в использовании ковариантов, что позволяет расширить область применимости доказательства и дать геометрическую интерпретацию. (*А. Ш.*).

и пусть

$$F = H \cdot T = \sum A_{h,\,k,\,l} x_1^h x_2^k x_3^l$$

—приведенная форма, алгебраически эквивалентная H. Приведенная подстановка $T = \tau \cdot S \cdot E$ равна

$$T = U \times \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{31} \\ 0 & 1 & \varepsilon_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sqrt{\mu_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\mu_3} \end{vmatrix},$$

где U — некоторая подстановка, воспроизводящая

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2,$$

коэффициенты которой, следовательно, все меньше 1. Что касается ε, то они меньше $^1/_2$ по абсолютной величине.

Тогда

$$H \cdot U = \sum C_{h,\,k,\,l} X_1^h X_2^k X_3^l$$

и ясно, что, в силу ограниченности всех коэффициентов U, C должны быть также ограничены. Аналогично, если положить

$$H \cdot U \times \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{31} \\ 0 & 1 & \varepsilon_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sum D_{h,\,k,\,l} x_1^h x_2^k x_3^l,$$

то все D ограничены. Но ведь

$$A_{h,\,k,\,l} = D_{h,\,k,\,l}\, \mu_1^{\frac{h}{2}} \mu_2^{\frac{k}{2}} \mu_3^{\frac{l}{2}}. \qquad (29)$$

По предположению, из коэффициентов

$$A_{m,\,0,\,0}, \quad A_{m-1,\,1,\,0}$$

по крайней мере один не равен нулю. Пусть, например, это $A_{m-1,\,1,\,0}$. Получаем

$$A_{m-1,\,1,\,0} = D_{m-1,\,1,\,0}\, \mu_1^{\frac{m-1}{2}} \mu_2^{\frac{1}{2}}. \qquad (30)$$

Перемножим уравнения (29) и (30), предварительно возведя второе из них в квадрат

$$A_{h,\,k,\,l} \times A_{m-1,\,1,\,0}^2 = D_{h,\,k,\,l} \times D_{m-1,\,1,\,0}^2\, \mu_1^{\frac{2m-2+h}{2}} \mu_2^{\frac{k+2}{2}} \mu_3^{\frac{l}{2}}.$$

Заметим:

1) что

$$h+k+l=m;$$

2) что

$$\mu_2 > \frac{3}{4}\mu_1, \quad \mu_3 > \frac{3}{4}\mu_2, \quad \mu_3 > \frac{2}{3}\mu_1.$$

Следовательно

$$\mu_1^{\frac{2m-2}{2}+\frac{h}{2}} < \mu_1^{\frac{m}{2}} \times \left(\frac{4}{3}\mu_2\right)^{\frac{m-2}{2}} \times \left(\frac{3}{2}\mu_3\right)^{\frac{h}{2}},$$

$$\mu_2^{\frac{k+2}{2}} < \mu_2 \times \left(\frac{4}{3}\mu_3\right)^{\frac{k}{2}},$$

откуда

$$\mu_1^{\frac{2m-2+h}{2}} \mu_2^{\frac{k+2}{2}} \mu_3^{\frac{l}{2}} < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{m+k-2}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{h}{2}} (\mu_1\mu_2\mu_3)^{\frac{m}{2}},$$

или

$$\mu_1^{\frac{2m-2+h}{2}} \mu_2^{\frac{k+2}{2}} \mu_3^{\frac{l}{2}} < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{m+k-2}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{h}{2}},$$

или, наконец,

$$A_{h,\,k,\,l} \times A^2_{m-1,\,1,\,0} < D_{h,\,k,\,l} D^2_{m-1,\,1,\,0} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{m+k-2}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{h}{2}}.$$

Произведение

$$A_{h,\,k,\,l} \text{ и } A^2_{m-1,\,1,\,0}$$

ограничено. Но $A_{m-1,\,1,\,0}$, которое не обращается в нуль, по меньшей мере равно 1. Значит, $A_{h,\,k,\,l}$ ограничено и существует только конечное число приведенных форм первой категории, эквивалентных H *.

Пусть теперь $\Delta(H)$ — произвольный ковариант формы H. Имеем

$$\Delta(H) \cdot T' = \Delta(H \cdot T'),$$

где T' — произвольное унитарное преобразование.

Если, кроме того, коэффициенты $H \cdot T'$ целые, то коэффициенты $\Delta(H) \cdot T'$ тоже целые.

Предположим, что среди форм, алгебраически эквивалентных $\Delta(H)$, в качестве канонической выбрана $\Delta(H)$. $\Delta(H) \cdot T'$ будет в том случае приведенной формой, когда T' будет приведенным преобразованием для T, т. е. если $H \cdot T$ — приведенная форма.

---

* Аналогичную проверку можно сделать в предположении, что $A_{m,\,0,\,0}$ не равно нулю, образуя так же

$$A_{h,\,k,\,l} \times A^2_{m,\,0,\,0}. \qquad (А.\ Ш.).$$

Мы скажем, что $\Delta(H)$ есть *ковариант первого вида*, если символ Δ обозначает такую операцию, что форме $\Delta(H)$ соответствует единственная форма H (например, гессиан тернарных кубических форм первого семейства).

Мы скажем, что $\Delta(H)$ есть *ковариант второго вида*, если, не являясь ковариантом первого вида, он имеет ту же степень, что и H (например, гессиан тернарных кубических форм второго семейства).

Наконец, $\Delta(H)$ будет *третьего вида*, если он не принадлежит ни к первому, ни ко второму виду.

$H \cdot T$ мы назовем приведенной формой *второй категории*, если, не принадлежа к первой категории, она такова, что $\Delta(H) \cdot T$ первой категории, а $\Delta(H)$ первого вида.

Ясно, что приведенных форм $\Delta(H) \cdot T$ первой категории и, следовательно, приведенных форм $H \cdot T$ второй категории, конечное число.

$H \cdot T$ мы назовем *приведенной формой третьей категории*, если, не принадлежа к первой категории, она такова, что $\Delta(H) \cdot T$ первой категории, а $\Delta(H)$ второго вида. Тогда

$$\Delta(H) + \lambda H,$$

где λ — произвольное целое, есть ковариант первого или второго вида, а

$$[\Delta(H) + \lambda H] \cdot T$$

является приведенной, относительно $[\Delta(H) + \lambda H]$, формой первой категории.

Следовательно, существует только конечное число приведенных форм с целыми коэффициентами вида

$$[\Delta(H) + \lambda H] \cdot T$$

и так как имеется только конечное число приведенных форм $\Delta(H) \cdot T$ с целыми коэффициентами, то приведенных форм $H \cdot T$ третьей категории конечное число.

$H \cdot T$ назовем *приведенной формой четвертой категории*, если, не принадлежа к первой категории, она такова, что коэффициент в $\Delta(H) \cdot T$ при члене, в котором степень x_1 наибольшая *, отличен от нуля, и если, кроме того, $\Delta(H)$ — ковариант третьего вида. Этих приведенных форм четвертой категории снова конечное число.

Действительно, приведенных форм с целыми коэффициентами вида $\Delta(H) \cdot T$ снова конечное число. Пусть m — степень H, а p — степень $\Delta(H)$. Выражение

$$\Delta(H)^m + H^p$$

---

* По-видимому, лучше было бы сказать: *такова, что* $\Delta(H) \cdot T$ содержит одночлен с одним x_1. (*А. Ш.*).

представляет собой ковариант, а

$$[\Delta(H)^m + H^p] \cdot T$$

— приведенную форму. Если в $\Delta(H) \cdot T$ коэффициент при x_1^p не равен нулю, в то время как в $H \cdot T$ коэффициент при x_1^m равен нулю (что имеет место, так как $H \cdot T$ — приведенная форма четвертой категории), то коэффициент при x_1^{mp} в

$$[\Delta(H)^m + H^p] \cdot T$$

не равен нулю, и, следовательно, это приведенная форма первой категории.

Значит, существует только конечное число приведенных форм:

1) таких, как $\Delta(H) \cdot T$;
2) таких, как $\Delta(H)^m \cdot T$;
3) таких, как $[\Delta(H)^m + H^p] \cdot T$;
4) таких, как $H^p \cdot T$;
5) наконец, таких, как $H \cdot T$.

Окончательно получаем, что существует только конечное число приведенных форм с целыми коэффициентами, полученных из H, первой, или второй, или третьей, или четвертой категорий (эти категории определены с помощью произвольного коварианта формы H).

Для того чтобы существовало бесконечное число приведенных форм, полученных из H, необходимо, следовательно, чтобы имелись приведенные формы, не принадлежащие ни к первой, ни ко второй, ни к третьей, ни к четвертой категории относительно каждого из ковариантов H.

Посмотрим, что это означает на геометрическом языке.

Предположим, что преобразование T записывается в виде

$$X_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,$$
$$X_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3,$$
$$X_3 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3.$$

Сказать, что коэффициент при x_1^m в $H \cdot T$ равен нулю — это все равно, что сказать, что точка

$$x_2 = x_3 = 0,$$

или

$$\frac{X_1}{\alpha_1} = \frac{X_2}{\beta_1} = \frac{X_3}{\gamma_1}$$

лежит на кривой

$$H = 0.$$

Сказать, что коэффициенты при x_1^m и $x_1^{m-1}x_2$ в $H \cdot T$ равны нулю одновременно — это значит сказать, что прямая

$$x_3 = 0, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} X_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ X_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ X_3 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

касается кривой $H = 0$ в точке

$$x_2 = x_3 = 0.$$

Сказать, что $H \cdot T$ — приведенная форма, не принадлежащая ни к первой, ни ко второй, ни к третьей, ни к четвертой категории, значит сказать, что прямая

$$x_3 = 0$$

касается в точке

$$x_2 = x_3 = 0$$

всех кривых

$$\Delta(H) = 0,$$

где $\Delta(H)$ — произвольный ковариант первого или второго вида, и что точка

$$x_2 = x_3 = 0$$

лежит на всех кривых

$$\Delta_1(H) = 0,$$

где $\Delta_1(H)$ — произвольный ковариант третьего вида.

Для того чтобы существовало конечное число приведенных форм, необходимо, таким образом, чтобы все кривые

$$\Delta(H) = 0, \qquad \Delta_1(H) = 0$$

проходили через одну точку и чтобы все кривые

$$\Delta(H) = 0$$

касались одной и той же прямой в этой точке.

Для того чтобы три кривые

$$H = 0, \qquad \Delta(H) = 0, \; \Delta_1(H) = 0$$

пересекались в одной точке, необходимо, чтобы некоторый инвариант равнялся нулю. Аналогично, для того чтобы две кривые

$$H = 0, \qquad \Delta(H) = 0$$

касались друг друга, необходимо, чтобы другой инвариант обращался в нуль.

Для того чтобы существовало бесконечно много приведенных форм, т. е. для того чтобы теорема Жордана не выполнялась, необходимо, следовательно,

чтобы все таким образом полученные инварианты одновременно равнялись нулю.

Все, что мы сейчас сказали относительно тернарных форм, распространяется на формы большего числа переменных.

X. Кубические тернарные формы первого и второго семейств

Мы сейчас применим предыдущие принципы к кубическим тернарным формам.

Рассмотрим сначала форму

$$6\alpha X_1 X_2 X_3 + \beta (X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) = H,$$

являющуюся канонической для первого и второго семейств *.

Мы видели, что такая форма инвариантна только относительно подстановки второй категории, которая сводится к перестановке букв x, y, z. Пусть τ — одна из этих подстановок, воспроизводящих форму H.

Пусть

$$F = H \cdot S$$

—произвольная форма, действительно эквивалентная H.

Подстановки, переводящие H в F, все имеют вид

$$\tau \cdot S.$$

Чтобы найти различные формы, приведенные относительно F, необходимо, таким образом, отыскать целые унитарные подстановки E, приводящие

$$(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \cdot \tau \cdot S,$$

и применить их к F. Но ведь τ воспроизводит

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2;$$

следовательно, E должны приводить

$$(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \cdot S.$$

Но, вообще говоря, существует только одна подстановка E, приводящая эту форму, и у F есть только одна приведенная форма

$$F \cdot E$$

Следовательно, у тернарных кубических форм первого и второго семейства есть, вообще говоря, только одна приведенная форма.

* См. выше, первую часть работы, стр. 831, формула (5). (*А. Ш.*).

В частном случае, который нас занимает, для того чтобы обнаружить эквивалентность двух форм, не нужно рассматривать приведенные формы. В самом деле, поскольку алгебраически перейти от одной формы к другой можно только с помощью конечного числа преобразований, достаточно выяснить, будут ли коэффициенты одного из этих преобразований целыми, чтобы узнать, эквивалентны ли эти две формы.

Посмотрим, что дает в частном случае, который нас интересует, теорема Жордана.

Мы рассмотрим только один из ковариантов H, а именно ее гессиан. Этот гессиан представляет собой ковариант первого вида, если H принадлежит к первому семейству, и второго вида, если H принадлежит ко второму семейству. Мы его обозначим, как обычно, через $\Delta(H)$.

Но кривые

$$H=0, \quad \Delta(H)=0$$

не могут касаться друг друга.

Значит, все приведенные формы, алгебраически полученные из H, принадлежат к первой или второй категории, если H принадлежит к первому семейству; к первой или третьей категории, если H принадлежит ко второму семейству.

Следовательно, теорема Жордана всегда верна для форм первого или второго семейства.

Возникающая теперь проблема заключается в том, чтобы найти как функции инвариантов S и T * верхние грани, которые коэффициенты этих приведенных форм не могут превзойти **.

Но ограничить эти коэффициенты функциями от S и T — значит ограничить их функциями от α и β, которые сами являются функциями от S и T, определенными с помощью равенств ***

$$S = 4\alpha(\alpha^3 - \beta^3)$$
$$T = 8\alpha^6 + 20\alpha^3\beta^3 - \beta^6.$$

Можно воспользоваться этими двумя равенствами либо для вычисления α и β, когда известны S и T, либо для нахождения верхних граней, которые просто выражаются в функциях S и T.

Когда затем коэффициенты приведенных форм будут ограничены в функциях α и β, можно будет легко получить выражения для граней этих функций от S и T, выражения, которые могут более или менее приближаться к точным граням и быть более или менее сложными.

---

* Контекст и запись формул позволяют не путать инварианты S и T формы (первая часть, стр. 832) с подстановками и матрицами S и T. (*А. Ш.*).

** Эта теорема является всего лишь *проверкой*; теорема Жордана доказывает существование этих граней. (*А. Ш.*).

*** Первая часть работы, стр. 832. (*А. Ш.*).

П е р в а я   п р о б л е м а. *Ограничить в функциях* α *и* β *коэффициенты приведенных форм первой категории.*

Пусть

$$H\cdot T = A_1x_1^3 + A_2x_2^3 + A_3x_3^3 + 3A_{12}x_1^2x_2 + 3A_{23}x_2^2x_3 + 3A_{31}x_3^2x_1 + \\ + 3A_{21}x_2^2x_1 + 3A_{32}x_3^2x_2 + 3A_{13}x_1^2x_3 + 6Cx_1x_2x_3$$

— приведенная форма первой категории.

По определению, A_1 и A_{12} не обращаются в нуль одновременно и *

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{31} \\ 0 & 1 & \varepsilon_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sqrt{\mu_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\mu_3} \end{vmatrix},$$

или

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\varepsilon_{21} + \beta_1 & \alpha_1\varepsilon_{31} + \beta_1\varepsilon_{32} + \gamma_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2\varepsilon_{21} + \beta_2 & \alpha_2\varepsilon_{31} + \beta_2\varepsilon_{32} + \gamma_2 \\ \alpha_3 & \alpha_3\varepsilon_{21} + \beta_3 & \alpha_3\varepsilon_{31} + \beta_3\varepsilon_{32} + \gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sqrt{\mu_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\mu_3} \end{vmatrix}.$$

Согласно принятой конструкции приведенных преобразований, подстановка

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

воспроизводит $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, и, следовательно, все ее коэффициенты меньше 1 по абсолютной величине. С другой стороны, ε меньше $^1/_2$ по абсолютной величине. Значит,

$$|\alpha_i| < 1, \quad |\alpha_i\varepsilon_{21} + \beta_i| < \frac{3}{2}, \quad |\alpha_i\varepsilon_{31} + \beta_i\varepsilon_{32} + \gamma_i| < 2.$$

Положим

$$\Phi = H \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\varepsilon_{21} + \beta_1 & \alpha_1\varepsilon_{31} + \beta_1\varepsilon_{32} + \gamma_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2\varepsilon_{21} + \beta_2 & \alpha_2\varepsilon_{31} + \beta_2\varepsilon_{32} + \gamma_2 \\ \alpha_3 & \alpha_3\varepsilon_{21} + \beta_3 & \alpha_3\varepsilon_{31} + \beta_3\varepsilon_{32} + \gamma_3 \end{vmatrix}$$

и

$$\Phi = a_1y_1^3 + a_2y_2^3 + a_3y_3^3 + 3b_{12}y_1^2y_2 + 3b_{23}y_2^2y_3 + 3b_{31}y_3^2y_1 + \\ + 3b_{21}y_2^2y_1 + 3b_{32}y_3^2y_2 + 3b_{13}y_1^2y_3 + 6cy_1y_2y_3.$$

---

* См. выше, стр. 868 (*А. Ш.*).

Неравенства, которым удовлетворяют коэффициенты подстановки, переводящей H в Φ, показывают, что a, b и c удовлетворяют неравенствам, которые мы сейчас составим.

Пусть

$$\lambda = 6|\alpha| + 3|\beta|.$$

Обозначим также через Λ величину, играющую по отношению к гессиану H ту же роль, что и λ по отношению к H. *Λ и λ представляют собой функции инвариантов S и T.*

Очевидно

$$\begin{gathered} |a_1| < \lambda, \quad |a_2| < \lambda\left(\frac{3}{2}\right)^3, \text{ или } \lambda\frac{27}{8}, \quad |a_3| < \lambda 2^3, \text{ или } 8\lambda, \\ |b_{12}| < \lambda\left(\frac{3}{2}\right), \quad |b_{23}| < \lambda\left(\frac{3}{2}\right)^2 2, \text{ или } \lambda\frac{9}{2}, \quad |b_{31}| < \lambda 2^2, \text{ или } 4\lambda, \\ |b_{21}| < \lambda\left(\frac{3}{2}\right)^2, \text{ или } \lambda\frac{9}{4}, \quad |b_{32}| < \lambda\frac{3}{2}2^2, \text{ или } 6\lambda, \quad |b_{13}| < 2\lambda, \\ |c| < \lambda\frac{3}{2}2, \text{ или } 3\lambda. \end{gathered} \tag{32}$$

Эти неравенства ограничивают $|a|$, $|b|$ и т. д. Найдем теперь ограничения на A, B, C, которые задаются по формулам

$$\begin{gathered} A_1 = a_1\mu_1^{\frac{3}{2}}, \quad A_2 = a_2\mu_2^{\frac{3}{2}}, \quad A_3 = a_3\mu_3^{\frac{3}{2}}, \\ B_{12} = b_{12}\mu_1\mu_2^{\frac{1}{2}}, \quad B_{23} = b_{23}\mu_2\mu_3^{\frac{1}{2}}, \quad B_{31} = b_{31}\mu_3\mu_1^{\frac{1}{2}}, \\ B_{21} = b_{21}\mu_1^{\frac{1}{2}}\mu_2, \quad B_{32} = b_{32}\mu_2^{\frac{1}{2}}\mu_3, \quad B_{13} = b_{13}\mu_3^{\frac{1}{2}}\mu_1, \\ C = c\mu_1^{\frac{1}{2}}\mu_2^{\frac{1}{2}}\mu_3^{\frac{1}{2}} = c. \end{gathered} \tag{33}$$

Итак,

$$\begin{gathered} |C| < 3\lambda, \\ |A_1| = |a_1|\mu_1^{\frac{3}{2}} < |a_1|\mu_1^{\frac{1}{2}}\mu_2^{\frac{1}{2}}\mu_3^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{4}{3}\frac{3}{2}}, \text{ откуда } |A_1| < \lambda\sqrt{2}, \\ |B_{12}| = |b_{12}|\mu_1\mu_2^{\frac{1}{2}} < |b_{12}|\mu_1^{\frac{1}{2}}\mu_2^{\frac{1}{2}}\mu_3^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}, \text{ откуда } |B_{12}| < \lambda\sqrt{\frac{27}{8}}, \\ |B_{21}| = |b_{21}|\mu_2\mu_1^{\frac{1}{2}} < |b_{21}|\mu_1^{\frac{1}{2}}\mu_2^{\frac{1}{2}}\mu_3^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{4}{3}}, \text{ откуда } |B_{21}| < \lambda\sqrt{\frac{27}{4}}, \\ |B_{13}| = |b_{13}|\mu_1\mu_3^{\frac{1}{2}} < |b_{13}|\mu_1^{\frac{1}{2}}\mu_2^{\frac{1}{2}}\mu_3^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{4}{3}}, \text{ откуда } |B_{13}| < \lambda\sqrt{\frac{16}{3}}. \end{gathered}$$

Так как до настоящего места мы не предполагали, что приведенная форма $H \cdot T$ принадлежит к первой категории, то эти пять неравенств

сохраняются для приведенных форм первой, второй или третьей категорий.

Имеем

$$|A_1A_2| = |a_1a_2|\,\mu_1^{\frac{3}{2}}\mu_2^{\frac{3}{2}} < |a_1a_2|\sqrt{\frac{4}{3}\,\frac{3}{2}}, \text{ откуда } |A_1A_2| < \lambda^2 \times \frac{27}{8}\sqrt{2},$$

$$|A_1B_{23}| = |a_1b_{23}|\,\mu_1^{\frac{3}{2}}\mu_2\mu_3^{\frac{1}{2}} < |a_1b_{23}|\sqrt{\frac{3}{2}}, \text{ откуда } |A_1B_{23}| < \lambda^2 \times \frac{9}{4}\sqrt{6},$$

$$|A_1B_{31}| = |a_1b_{31}|\,\mu_1^2\mu_3 < |a_1b_{31}|\,\frac{4}{3}, \text{ откуда } |A_1B_{31}| < \lambda^2 \times \frac{16}{3},$$

$$|A_1B_{32}| = |a_1b_{32}|\,\mu_1^{\frac{3}{2}}\mu_2^{\frac{1}{2}}\mu_3 < |a_1b_{32}|\sqrt{\frac{4}{3}}, \text{ откуда } |A_1B_{32}| < \lambda^2 \times 4\sqrt{3},$$

$$|B_{12}A_2| = |b_{12}a_2|\,\mu_1\mu_2^2 < |b_{12}a_2|\,\frac{4}{3}, \text{ откуда } |B_{12}A_2| < \lambda^2 \times \frac{27}{4},$$

$$|B_{12}B_{23}| = |b_{12}b_{23}|\,\mu_1\mu_2^{\frac{3}{2}}\mu_3^{\frac{1}{2}} < |b_{12}b_{23}|\sqrt{\frac{4}{3}}, \text{ откуда } |B_{12}B_{23}| < \lambda^2 \times \frac{9}{2}\sqrt{3},$$

$$|B_{12}B_{31}| = |b_{12}b_{31}|\,\mu_1^{\frac{3}{2}}\mu_2^{\frac{1}{2}}\mu_3 < |b_{12}b_{31}|\sqrt{\frac{4}{3}}, \text{ откуда } |B_{12}B_{31}| < \lambda^2 \times 4\sqrt{3},$$

$$|B_{12}B_{32}| = |b_{12}b_{32}|\,\mu_1\mu_2\mu_3 < |b_{12}b_{32}|, \text{ откуда } |B_{12}B_{32}| < \lambda^2 \times 9.$$

Поскольку из двух коэффициентов A_1 и B_{12}, по крайней мере, один не равен нулю и, следовательно, равен, по крайней мере, 1, то по абсолютной величине

$$|A_2| < \frac{27}{4}\lambda^2, \qquad |B_{23}| < \frac{9}{2}\lambda^2\sqrt{3}, \qquad |B_{31}| < 4\lambda^2\sqrt{3}, \qquad |B_{32}| < 9\lambda^2.$$

Остается ограничить A_2; мы сделаем это с помощью неравенств

$$|A_1^2A_3| = |a_1^2a_3|\,\mu_1^3\mu_2^{\frac{3}{2}} < |a_1^2a_3|\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$|B_{12}^2A_3| = |b_{12}^2a_3|\,\mu_1^2\mu_2\mu_3^{\frac{3}{2}} < |b_{12}^2a_3|\sqrt{\frac{4}{3}},$$

откуда

$$|A_1^2A_3| < \lambda^2 \times 8\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad |B_{12}^2A_3| < \lambda^3 \times 8\left(\frac{3}{2}\right)^2\sqrt{\frac{4}{3}}$$

и, наконец

$$|A_2| < 12\lambda^3\sqrt{3}.$$

Вторая проблема. *Ограничить в функциях α и β или, что то же самое, в функциях λ и Λ, коэффициенты приведенных форм второй и третьей категории.*

Я замечу сперва, что пять неравенств

$$|C| < 3\lambda, \quad |A_1| < \lambda\sqrt{2}, \quad |B_{12}| < \lambda\sqrt{\frac{27}{8}}, \quad |B_{13}| < \lambda\sqrt{\frac{8}{3}}, \quad |B_{31}| < \lambda\sqrt{\frac{27}{4}}$$

выполняются всегда. Кроме того, поскольку дискриминант не равен нулю, в то время как A_1, и B_{12} обращаются в нуль, должно выполняться

$$B_{13} \neq 0,$$

откуда

$$|B_{13}| \geqslant 1.$$

Итак, можно воспользоваться неравенствами

$$|B_{13}A_2| = |b_{13}a_2|\,\mu_1\mu_2^{\frac{3}{2}}\mu_3^{\frac{1}{2}} < |b_{13}a_2|\sqrt{\frac{4}{3}}, \quad \text{откуда} \quad |B_{13}A_2| < \frac{32}{3}\lambda^2\sqrt{3},$$

$$B_{13}B_{23} = b_{13}b_{23}\mu_1\mu_2\mu_3 = b_{13}b_{23}, \quad \text{откуда} \quad |B_{13}B_{23}| < 9\lambda^2,$$

откуда

$$|A_2| < \frac{32}{3}\lambda^2\sqrt{3}, \qquad |B_{23}| < 9\lambda^2.$$

Остается ограничить B_{31}, B_{32} и A_3.

Первый метод. Первый метод состоял бы в ограничении коэффициентов гессиана, затем в выражении коэффициентов самой формы через коэффициенты гессиана, используя формулы, данные Аронхольдом в томе 39 «Journal de Crelle». Так как этот метод неприменим к формам второго семейства, мы не будем его развивать.

Второй метод. Пусть B'_{31}, B'_{32}, A'_3 — коэффициенты при $x_3^2x_1$, $x_3^2x_2$, x_3^3 в гессиане рассматриваемой приведенной формы.

Поскольку $\Delta(H)\cdot T$ — приведенная форма первой категории, по отношению к которой Λ играет ту же роль, что и λ по отношению к $H\cdot T$, имеют место неравенства

$$\begin{aligned} &|B'_{31}| < 4\sqrt{3}\,\Lambda^2, \\ &|B'_{32}| < 9\Lambda^2, \\ &|A'_3| < 12\sqrt{3}\,\Lambda^3. \end{aligned} \tag{34}$$

Аналогично, $[\Lambda(H)+H]\cdot T$ — приведенная форма первой категории, по отношению к которой $\Lambda+\lambda$ играет ту же роль, что и λ по отношению к $H\cdot T$. Поэтому

$$\begin{aligned} &|B'_{31}+B_{31}| < 4\sqrt{3}\,(\Lambda+\lambda)^2, \\ &|B'_{32}+B_{32}| < 9\,(\Lambda+\lambda)^2, \\ &|A'_3+A_3| < 12\sqrt{3}\,(\Lambda+\lambda)^3. \end{aligned} \tag{35}$$

Из неравенств (34) и (35) получается, наконец,

$$|B_{31}| < 4\sqrt{3}\,[(\Lambda+\lambda)^2+\Lambda^2],$$
$$|B_{32}| < 9\,[(\Lambda+\lambda)^2+\Lambda^2],$$
$$|A_3| < 12\sqrt{3}\,[(\Lambda+\lambda)^3+\Lambda^3].$$

XI. Формы третьего семейства

Рассмотрим теперь форму

$$6\alpha X_1X_2X_3+\beta(X_2^3+X_3^3)=H,$$

являющуюся одной из канонических форм третьего семейства*.

Можно было бы показать, как и в случае первого и второго семейств, что формы, полученные из этой канонической, имеют, вообще говоря, единственную приведенную форму, и все замечания, сделанные нами на этот счет, нашли бы свое приложение.

Постараемся теперь применить теорему Жордана к этим формам.

Так как на сей раз двойная точка кривой $H=0$ служит двойной точкой кривой $\Delta(H)=0$, то существуют приведенные формы, полученные из H, которые не принадлежат к первой категории, но не принадлежат также ни ко второй, ни к третьей, ни к четвертой категориям по отношению к $\Delta(H)$.

Формы, приведенные относительно H, разделяются таким образом, на три вида.

Первый вид. Те, для которых не выполняется одновременно

$$A_1=B_{12}=0$$

и которые принадлежат к *первой категории* **.

Второй вид. Те, для которых выполняется одновременно

$$A_1=B_{12}=0, \qquad B_{13}\neq 0$$

и которые принадлежат ко *второй категории* *** по отношению к $\Delta(H)$.

Третий вид. Наконец, те, для которых выполняется одновременно

$$A_1=B_{12}=B_{13}=0$$

и которые требуют специального исследования.

Что касается приведенных форм двух первых видов, то мы нашли бы с помощью вычислений, *абсолютно аналогичных* тем, которые мы провели для форм первого и второго семейств, границы коэффициентов и

---

* Первая часть работы, стр. 830, формула (6). (*А. Ш.*).

** См. выше, стр. 867. (*А. Ш.*).

* См. выше, стр. 870. (*А. Ш.*).

пришли бы к тем же неравенствам при условии, что λ *будет обозначать не сумму абсолютных величин* 6α *и* 3β, *а сумму абсолютных величин* 6α *и* 2β, и Λ будет обозначать величину, которая по отношению к $\Delta(H)$ играет ту же роль, что и λ по отношению к H.

Остается найти границы коэффициентов приведенной формы третьего вида

$$\Phi = A_2x_2^3 + A_3x_3^3 + 3B_{23}x_2^2x_3 + 3B_{32}x_3^2x_2 + 3x_1(B_{21}x_2^2 + 2Cx_2x_3 + B_{31}x_3^2).$$

Но это невозможно, как мы сейчас легко увидим.

Действительно, положим в $H = 6\alpha X_1X_2X_3 + \beta(X_2^3 + X_3^3)$

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha_1x_1 + \beta_1x_2 + \gamma_1x_3, \\ X_2 &= \qquad\quad \beta_2x_2 + \gamma_2x_3, \\ X_3 &= \qquad\quad \beta_3x_2 + \gamma_3x_3. \end{aligned}$$

Для того чтобы подстановка

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

была приведенной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

была приведенной, т. е. чтобы

$$|\beta_1| < \frac{1}{2}\alpha_1, \quad |\gamma_1| < \frac{1}{2}\alpha_1$$

и чтобы α_1^2 было минимумом формы

$$(\alpha_1x_1 + \beta_1x_2 + \gamma_1x_3)^2 + (\beta_2x_2 + \gamma_2x_3)^2 + (\beta_3x_2 + \gamma_3x_3)^2.$$

Предположим, что эти условия выполнены и что у приведенной формы $H \cdot T$ — целые коэффициенты. Тогда ясно, что подстановка

$$T_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda^2}\alpha_1 & \frac{1}{\lambda^2}\beta_1 & \frac{1}{\lambda^2}\gamma_1 \\ 0 & \lambda\beta_2 & \lambda\gamma_2 \\ 0 & \lambda\beta_3 & \lambda\gamma_3 \end{vmatrix},$$

где λ — целое положительное число, тоже будет приведенной и что $H \cdot T_1$ — приведенная форма с целыми коэффициентами.

Значит, если можно найти одну приведенную форму с целыми коэффициентами, третьего вида, полученную из H, то можно найти бесконечно много таких форм.

А я утверждаю, что одна такая форма найдется, если только α^2 целое число.

Действительно, если α^2 целое число, то можно найти бесконечно много форм Θ с целыми коэффициентами. алгебраически эквивалентных бинарной форме

$$2\alpha X_2 X_3 = \theta.$$

Среди конечного числа линейных подстановок, переводящих θ в Θ, мы всегда можем выбрать одну:

$$X_2 = \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3,$$
$$X_3 = \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$$

где

$$\lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2 = 1,$$

так что

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} (h_2 + k_2 \alpha), \qquad \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{a}} (h_3 + k_3 \alpha),$$
$$\mu_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} (h_2 - k_2 \alpha), \qquad \mu_3 = \frac{1}{\sqrt{a}} (h_3 - k_3 \alpha),$$

где h_2, h_3, k_2, k_3 соизмеримы и a — подходящим образом выбранная величина.

Формы Θ разделятся на конечное число классов. Пусть

$$S = \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}.$$

Формы с целыми коэффициентами

$$(2\alpha X_2 X_3) \cdot S$$

эквивалентны конечному числу приведенных форм

$$(2\alpha X_2 X_3) \cdot S \cdot T$$

(T — целая унитарная подстановка) с целыми коэффициентами, где $S \cdot T$ — приведенное преобразование.

У формы

$$(X_2^3 + X_3^3) \cdot S,$$

а, значит, и у формы

$$(X_2^3 + X_3^3) \cdot S \cdot T$$

коэффициенты соизмеримы с $1/a\sqrt{a}$. Следовательно, всегда можно найти несоизмеримое число λ такое, чтобы коэффициенты формы

$$(\lambda^3 X_2^3 + \lambda^3 X_3^3) \cdot S \cdot T$$

были целыми.

Пусть тогда

$$S \cdot T = \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix};$$

μ — произвольное число, а Σ — подстановка

$$X_1 = \frac{1}{\lambda^2\mu^2}(x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3),$$
$$X_2 = \lambda\mu\nu (A_2 x_2 + A_3 x_3),$$
$$X_3 = \lambda \frac{\mu}{\nu} (B_2 x_2 + B_3 x_3).$$

Σ будет приведенным преобразованием, если только $1/\lambda^4\mu^4$ будет достаточно малым и если ε_2 и ε_3 будут меньше $^1/_2$ по абсолютной величине, а ν подходящим образом выбрано.

Мы скажем, что две подстановки Σ *принадлежат к одному и тому же роду**, если они отличаются только значениями μ и ν.

Ясно, что если $\beta\mu^3$ целое и если, кроме того,

$$\nu = 1, \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0,$$

то коэффициенты формы

$$H \cdot \Sigma$$

целые, так как

$$H \cdot \Sigma = (6\alpha X_1 X_2 X_3) \cdot \Sigma + (\beta X_2^3 + \beta X_3^3) \cdot \Sigma$$

или

$$H \cdot \Sigma = 3X_1 [(2\alpha X_2 X_3) \cdot S \cdot T] + \beta\mu^3 (\lambda^3 X_2^3 + \lambda^3 X_3^3) \cdot S \cdot T,$$

Следовательно, всегда существуют приведенные формы с целыми коэффициентами третьего вида, полученные из H.

Придавая $\beta\mu^3$ все возможные целые значения, можно было бы получить все приведенные формы третьего вида, для которых $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$.

---

* Две подстановки (или матрицы) Σ и Σ_1 будут, таким образом, *одного рода*, если они получаются одна из другой умножением слева на *диагональную матрицу* с положительными элементами и детерминантом, равным 1.

$$\Sigma = \begin{Vmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{Vmatrix} \times \Sigma_1, \qquad s_1 s_2 s_3 = 1.$$

В тексте

$$s_1 = \frac{1}{\mu^2}, \qquad s_2 = \mu\nu, \qquad s_3 = \frac{\mu}{\nu}.$$

(Две матрицы одного и того же рода характеризуют одну и ту же разложимую форму). (*А. Ш.*).

Если ε_2 и ε_3 не равны нулю, то для того чтобы коэффициенты $H \cdot \Sigma$ были целыми, необходимо, чтобы коэффициенты бинарной формы

$$3(\varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3)[(2aX_2X_3) \cdot S \cdot T] + \beta\mu^3\left[\left(\lambda^3\nu^3 X_2^3 + \frac{\lambda^3}{\nu^3} X_2^3\right) \cdot S \cdot T\right]$$

тоже были целыми.

Но коэффициенты этой бинарной формы имеют вид

$$\varepsilon_2 A_i + \varepsilon_3 B_i + \beta\mu^3\nu^3 C_i + \frac{\beta\mu^3}{\nu^3} D_i,$$

где A_i, B_i, C_i — заданные числа. Значит, для того чтобы все эти коэффициенты были целыми, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= h_1t_1 + h_2t_2 + h_3t_3 + h_4t_4, \\ \varepsilon_3 &= k_1t_1 + k_2t_2 + k_3t_3 + k_4t_4, \\ \beta\mu^3\nu^3 &= l_1t_1 + l_2t_2 + l_3t_3 + l_4t_4, \\ \frac{\beta\mu^3}{\nu^3} &= m_1t_1 + m_2t_2 + m_3t_3 + m_4t_4, \end{aligned} \tag{34}$$

где h, k, l — легко вычисляемые величины и где t — какие-нибудь целые числа, положительные или отрицательные.

Если рассматривать ε_2, ε_3, $\beta\mu^3\nu^3$ и $\beta\mu^3/\nu^3$ как координаты точки, то точки, удовлетворяющие условиям (34), образуют решетку Браве *. Существует бесконечно много точек этого соединения, удовлетворяющих неравенствам

$$-\frac{1}{2} < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}, \qquad -\frac{1}{2} < \varepsilon_3 < \frac{1}{2},$$

которые выражают тот факт, что Σ — приведенное преобразование. Однако существует конечное число таких точек, удовлетворяющих неравенствам

$$-\frac{1}{2} < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}, \qquad -\frac{1}{2} < \varepsilon_3 < \frac{1}{2}, \qquad -\frac{1}{2} < \beta\mu^3\nu^3 < \frac{1}{2}, \qquad -\frac{1}{2} < \frac{\beta\mu^3}{\nu^3} < \frac{1}{2},$$

а все остальные получаются из них изменением μ и ν.

Следствие. *Приведенные подстановки* Σ, *такие, что коэффициенты в* $H \cdot \Sigma$ — *целые, распадаются на конечное число родов.*

Окончательно:

1. ***Формы с целыми коэффициентами, полученные из*** H, ***образуют бесконечное множество классов. Эти классы мы назовем классами первого, второго или третьего вида, в зависимости от того, будут ли соответствующие приведенные формы первого, второго или третьего вида.***

---

* Относительно *решеток Браве*, или сеток, или арифметических модулей точек см. работу 1880 г. («Oeuvres», t. 5, p. 117) и примечание («Oeuvres», t. 5, p. 181). (*А. Ш.*).

2. *Классов первого и второго вида конечное число.*

3. *Классов третьего вида бесконечно много, но они распадаются на конечное число родов* при условии, что мы считаем принадлежащими к одному роду классы, приведенные формы которых получаются из H с помощью приведенных преобразований одного и того же рода *.

Нам следовало бы теперь изучить формы, *действительно эквивалентные* ** канонической форме

$$3\alpha X_1X_2^2+3\alpha X_1X_3^2+\beta X_2^3-3\beta X_2X_3^2,$$

но мы не станем проводить это исследование, которое привело бы нас с помощью *таких же* рассуждений к *таким же* результатам.

XII. Формы четвертого семейства

Рассмотрим формы с целыми коэффициентами, *действительно эквивалентные* *** форме

$$H=3X_1^2X_3+X_2^3.$$

Если одна из них, F, получается из H с помощью подстановки

$$X_1=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3,$$
$$X_2=\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_3,$$
$$X_3=\gamma_1x_1+\gamma_2x_2+\gamma_3x_3,$$

которую мы обозначим S, то легко видеть:

1) что α_1, α_2, α_3 соизмеримы между собой, β_1, β_2, β_3 соизмеримы между собой, так же как и γ_1, γ_2, γ_3;

2) что форма F может быть равным образом получена из H с помощью подстановки

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 & \lambda\alpha_2 & \lambda\alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \frac{1}{\lambda^2}\lambda_1 & \frac{1}{\lambda^2}\lambda_2 & \frac{1}{\lambda^2}\lambda_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{vmatrix} \times S.$$

Следовательно, подстановку S можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} ha_1 & ha_2 & ha_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ lc_1 & lc_2 & lc_3 \end{vmatrix},$$

* Это определение форм (или классов форм) одного рода показывает, что, на самом деле, разбиение на роды, как и на классы, имеет дело с подстановками (или матрицами) T (которые переводят каноническую алгебраическую кривую H в данную форму). (*А. Ш.*).

** Первая часть работы, стр. 832, формула (7). (*А. Ш.*).

*** Первая часть работы, стр. 830, формула (8). (*А. Ш.*).

где a_1, a_2, a_3 — целые взаимно простые числа, так же как b_1, b_2, b_3 и как c_1, c_2, c_3.

Рассмотрим теперь приведенные формы, эквивалентные этим формам.

Приведенные формы будут *первого вида*, если A_1 и B_{12} не равны нулю одновременно; *второго вида*, если A_1 и B_{12} равны нулю, в то время как B_{13} отлично от нуля, и, наконец, *третьего вида*, если *

$$A_1 = B_{12} = B_{13} = 0.$$

Можно было бы увидеть, как и в случае форм третьего семейства, что приведенных форм первого и второго вида конечное число, и можно было бы найти границы для их коэффициентов с помощью вычислений, полностью аналогичных тем, которые мы проделали выше для форм первого и второго семейств.

Напротив, если мы рассмотрим приведенные формы третьего вида, то увидим, что они получаются из H с помощью подстановок

$$T = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

или

$$\begin{vmatrix} 0 & ha_2 & ha_3 \\ 0 & kb_2 & kb_3 \\ lc_1 & lc_2 & lc_3 \end{vmatrix},$$

откуда

$$H \cdot T = 3h^2 l\,(a_2x_2 + a_3x_3)^2\,(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3) + k^3\,(b_2x_2 + b_3x_3)^2.$$

Произвольный коэффициент $H \cdot F$ имеет вид

$$h^2 l A_i + k^3 B_i,$$

где A_i и B_i — целые, так что для того, чтобы коэффициенты были целыми, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$h^2 l = \delta_1 t_1 + \delta_2 t_2,$$
$$k^3 = \zeta_1 t_1 + \zeta_2 t_2,$$

где δ_1, δ_2, ζ_1, ζ_2 — соизмеримые величины, которые легко определить, и где t_1, t_2 — какие-либо целые числа, положительные или отрицательные.

Мы скажем, что две подстановки T принадлежат к *одному роду*, если они отличаются только значениями h, k, l и если для них одинаково значение отношения h/k **.

---

* Определение *видов* см. выше, стр. 879. (*А. Ш.*).

** Это определение рода аналогично данному выше (стр. 882 и примечание). Однако два первых элемента диагональной матрицы таковы, что

$$s_1 = s_2, \qquad s_1^2 s_3 = 1. \qquad (\text{А. П.}).$$

Если подстановка приведенная, то все подстановки того же рода приведенные, при условии что l достаточно мало.

Пусть

$$\begin{vmatrix} 0 & ha_2 & ha_3 \\ 0 & kb_2 & kb_3 \\ lc_1 & lc_2 & lc_3 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} 0 & h'a_2 & h'a_3 \\ 0 & k'b_2 & k'b_3 \\ l'c_1 & l'c_2 & l'c_3 \end{vmatrix}$$

— две приведенные подстановки одного и того же рода и

$$h^2l = \delta_1 t_1 + \delta_2 t_2, \qquad h'^2 l' = \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2,$$
$$k^3 = \zeta_1 t_1 + \zeta_2 t_2, \qquad k'^3 = \zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2.$$

Должно выполняться

$$hkl = h'k'l',$$

так как детерминанты двух подстановок равны 1 и

$$\frac{h}{k} = \frac{h'}{k'},$$

откуда

$$h^2 l^2 = h'^2 l' \quad \text{и} \quad \delta_1 t_1 + \delta_2 t_2 = \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2, \quad \frac{l'}{l} = \frac{h^2}{h'^2} = \frac{k^2}{k'^2}.$$

Поскольку t_1, t_2, u_1, u_2 — целые, то в результате

$$t_1 = u_1 + \lambda_1 \tau, \qquad t_2 = u_2 + \lambda_2 \tau,$$

где τ — целое, а λ_1 и λ_2 — величины, которые легко вычислить.

Тогда

$$k'^3 = k^3 - (\zeta_1 \lambda_1 + \zeta_2 \lambda_2)\,\tau,$$

откуда

$$\frac{l'}{l} = \sqrt[3]{\frac{k^6}{k'^6}} = \left(1 - \frac{\zeta_1\lambda_1 + \zeta_2\lambda_2}{k^3}\,\tau\right)^{-2/3}.$$

Когда τ стремится к бесконечности, l' стремится к нулю. Значит, если придать τ достаточно большое целое значение, то T будет приведенной подстановкой, и коэффициенты $H \cdot T$ будут целыми.

Если мы говорим, что $H \cdot T$ и $H \cdot T_1$ одного рода всякий раз, когда T и T_1 одного рода*, то, в силу предыдущего, видно, что в одном роде содержится бесконечно много приведенных форм.

Кроме того, самих родов бесконечно много.

---

* См. примечание, уже сделанное выше, стр. 884 [примечание *]. (*А. Ш.*).

Действительно, для того чтобы преобразование

$$T=\begin{vmatrix} 0 & ha_2 & ha_3 \\ 0 & kb_2 & kb_3 \\ lc_1 & lc_2 & lc_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & ha_2 & ha_3 \\ 0 & h\lambda b_2 & h\lambda b_3 \\ lc_1 & lc_2 & lc_3 \end{vmatrix}$$

было приведенным и чтобы коэффициенты $H \cdot T$ были целыми, необходимо и достаточно:

1) чтобы h и l были выбраны подходящим образом;

2) чтобы a_2 и a_3; b_2 и b_3; c_1, c_2 и c_3 были соответственно целыми и взаимно простыми;

3) чтобы преобразование

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ \lambda b_2 & \lambda b_3 \end{vmatrix}$$

было приведенным;

4) чтобы c_2/c_1 и c_3/c_1 были меньше $1/2$ по абсолютной величине.

Таким образом, если выбрать произвольно

1) два целых взаимно простых a_2 и a_3;

2) два целых взаимно простых b_2 и b_3;

3) три целых взаимно простых c_1, c_2 и c_3;

4) произвольное λ;

потребовать, чтобы

$$\left|\frac{c_2}{c_1}\right|<\frac{1}{2}, \quad \left|\frac{c_3}{c_1}\right|<\frac{1}{2}$$

и чтобы подстановка

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ \lambda b_2 & \lambda b_3 \end{vmatrix}$$

была приведенной, то можно всегда найти для h и l такие значения, чтобы $H \cdot T$ была приведенной формой с целыми коэффициентами.

Следовательно, система так выбранных величин

$$a_2, a_3, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, \lambda$$

определяет род.

Так как этот выбор можно сделать бесконечным множеством способов, то существует бесконечно много родов.

Будем различать теперь два вида приведенных форм.

Пусть F — произвольная форма, алгебраически эквивалентная H; F можно получить из H с помощью бесконечного множества преобразований S, так что

$$F=H \cdot S;$$

но единственное из этих преобразований (которое мы обозначим S_1) имеет детерминант 1.

Пусть E — такое преобразование, что $S \cdot E$ — приведенная подстановка, а E_1 — такое преобразование, что $S_1 \cdot E_1$ — приведенная подстановка.

Приведенные формы $F \cdot E$ все эквивалентны F, но только одна $F \cdot E_1$ получается из H с помощью приведенного преобразования с детерминантом 1.

Приведенные формы $F \cdot E$ мы назовем тогда *вторичными приведенными формами*, в то время как $F \cdot E_1$ будет *главной приведенной формой.*

Все, о чем мы говорили до сих пор, применимо только к главным приведенным формам, так что по отношению к ним мы можем изложить следующие результаты:

1) *в каждом классе, вообще говоря, есть только одна главная приведенная форма;*

2) *существует бесконечно много классов;*

3) *главные приведенные формы делятся на три вида;*

4) *форм первого и второго вида конечное число;*

5) *формы третьего вида разделяются на бесконечное множество родов, а каждый род содержит бесконечно много приведенных форм.*

Займемся теперь вторичными приведенными формами.

Пусть

$$S_1 = \begin{vmatrix} ha_1 & ha_2 & ha_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ lc_1 & lc_2 & lc_3 \end{vmatrix}$$

— подстановка с детерминантом 1, такая что

$$F = H \cdot S_1.$$

Если положить

$$S = \begin{vmatrix} \lambda ha_1 & \lambda ha_2 & \lambda ha_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ \frac{1}{\lambda^2} lc_1 & \frac{1}{\lambda^2} lc_2 & \frac{1}{\lambda^2} lc_3 \end{vmatrix},$$

то

$$F = H \cdot S.$$

Если $S \cdot E$ — приведенная подстановка, то $F \cdot E$ — вторичная приведенная форма.

Коэффициенты E зависят от коэффициентов S, т. е. от λ. Значит, коэффициенты приведенной формы $F \cdot E$ являются функциями λ.

Когда λ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, то приведенная форма изменяется прерывистым образом, как показал Эрмит в своей работе «О введении

непрерывных переменных в теории чисел». От одной приведенной формы к смежной переходят скачками.

Так как у нас здесь только одно неизвестное λ, то приведенные формы, полученные из F, можно изобразить одну за другой на некоторой линии, так чтобы каждая из них была смежной с предыдущей и с последующей. Они образуют, таким образом, *цепочку*, как и приведенные формы неопределенных бинарных квадратичных форм, а не сетку, как приведенные формы неопределенных тернарных квадратичных форм.

Я утверждаю, что в каждом классе содержится только конечное число вторичных приведенных форм. Действительно, если сперва изменять λ в ограниченных пределах, положительных и отличных от нуля, то найдется только конечное число приведенных форм.

Положим теперь λ достаточно большим и зададимся целью найти подстановку E такую, чтобы $S \cdot E$ было приведенным преобразованием.

Это значит, что надо отыскать подстановку E такую, чтобы квадратичная форма

$$\Big[(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2\lambda^2h^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2k^2+ \\ +(c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3)^2\frac{1}{\lambda^4}l^2\Big]\cdot E$$

была приведенной.

Так как три целых числа a_1, a_2, a_3 взаимно просты, то всегда существует девять целых чисел, удовлетворяющих следующим условиям:*

$$\begin{aligned} a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3&=1,\\ a_1&=\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2,\\ a_2&=\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3,\\ a_3&=\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1.\end{aligned}$$

Тогда подстановка

$$\begin{aligned} x_1&=\alpha_1X_3+\beta_1Y_1+\gamma_1Y_2,\\ x_2&=\alpha_2X_3+\beta_2Y_1+\gamma_2Y_2,\\ x_3&=\alpha_3X_3+\beta_3Y_1+\gamma_3Y_2,\end{aligned}$$

---

* Достаточно образовать матрицу с детерминантом 1, первая строка которой состоит из a_1, a_2, a_3 (что является свойством, хорошо известным в линейной теории чисел). Обратной матрицей тогда будет

$$\begin{Vmatrix}\alpha_1&\beta_1&\gamma_1\\ \alpha_2&\beta_2&\gamma_2\\ \alpha_3&\beta_3&\gamma_3\end{Vmatrix}.$$

(*А. Ш.*).

дает соотношения вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = X_3,$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = \lambda_1 (d_1Y_1 + d_2Y_2 + d_3X_3),$$
$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = \lambda_2 (e_1Y_1 + e_2Y_2 + e_3X_3),$$

где d_1 и d_2, e_1 и e_2 — целые взаимно простые числа и где d_3 и e_3 всегда можно выбрать меньшими $^1/_2$ по абсолютной величине

Пусть теперь δ_1 и δ_2 — целые числа такие, что

$$d_1\delta_1 - d_2\delta_2 = 1.$$

Подстановка

$$Y_1 = -d_2X_1 + \delta_1X_2,$$
$$Y_2 = d_1X_1 + \delta_2X_2$$

дает соотношения вида

$$d_1Y_1 + d_2Y_2 = X_2,$$
$$e_1Y_1 + e_2Y_2 = \mu (X_1 + fX_2),$$

где всегда можно предполагать, что f меньше $^1/_2$ по абсолютной величине.

Преобразование

$$E = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -d_2 & \delta_1 & 0 \\ d_1 & \delta_2 & 0 \end{vmatrix},$$

очевидно, целое с детерминантом 1, и

$$\Big[(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 h^2\lambda^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 k^2 + (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)^2 l^2 \frac{1}{\lambda^4}\Big] \cdot E = h^2\lambda^2X_3^2 + k^2\lambda_1^2 (X_2 + d_3X_3)^2 + l^2 \frac{1}{\lambda^4} \lambda_2^2\mu \Big(X_1 + fX_2 + \frac{e_3}{\mu} X_3\Big).$$

Эта квадратичная форма будет приведенной, как только

$$l^2\lambda_2^2\mu \frac{1}{\lambda^4} < k^2\lambda_1^2 < h^2\lambda^2,$$

или

$$\lambda > \frac{k\lambda_1}{h}, \qquad \lambda > \sqrt{\frac{l\lambda_2\mu}{k\lambda_1}}.$$

Значит, всякий раз, когда λ будет больше некоторой величины A, $F \cdot E$ не будет зависеть от λ.

Аналогично, всякий раз, когда λ станет меньше некоторой положительной величины B, $F \cdot E$ не будет зависеть от λ.

Наконец, E не меняется при замене λ на $-\lambda$, так что достаточно изменять λ от нуля до $+\infty$.

Когда λ изменяется от 0 до B, приведенных форм одна.

Когда λ изменяется от B до A, приведенных форм конечное число.

Когда λ изменяется от A до $+\infty$, приведенных форм одна.

Следовательно, в каждом классе содержится конечное число приведенных форм, так же, как и в каждом классе неопределенных бинарных квадратичных форм. Но, благодаря одной особенности, достойной того, чтобы ее отметить, эти два случая весьма различны.

Приведенные формы, полученные из неопределенной бинарной квадратичной формы, можно изобразить на одной линии последовательно одну за другой; эта линия не определена с двух сторон, так что каждая приведенная форма периодически повторяется бесконечно много раз.

Приведенные формы, полученные из формы четвертого семейства, напротив, образуют *ряд, ограниченный с двух сторон*, так что он заканчивается достижением крайних приведенных форм, которые соответствуют

$$\lambda > A \quad \text{и} \quad \lambda < B.$$

Следовательно, формы четвертого семейства не могут быть инвариантными относительно подобного арифметического преобразования, т. е. относительно преобразования с целыми коэффициентами и детерминантом 1, что легко было предвидеть.

Посмотрим теперь, как предыдущие рассмотрения позволяют трактовать вопросы, относящиеся к эквивалентности форм четвертого семейства.

Если нужно только узнать, эквивалентны ли две заданные формы, т. е. получается ли одна из другой с помощью целого преобразования с детерминантом 1, то достаточно рассмотреть только главные приведенные формы, и даже, в крайнем случае, можно обойтись и без этого, так как одну форму можно получить из другой с помощью преобразования с детерминантом 1 всего лишь одним способом. Вопрос можно трактовать с помощью чисто алгебраических приемов.

Но можно поставить более общую проблему.

Пусть даны две формы. Определить, является ли одна из них эквивалентной другой, умноженной на подходящую константу.

В этом случае необходимо рассматривать вторичные приведенные формы.

Действительно, для того чтобы подобная эквивалентность имела место, необходимо и достаточно, чтобы система приведенных форм одной формы совпадала, с точностью до постоянного множителя, с системой приведенных форм другой формы.

Ясно, что для того чтобы установить это совпадение, достаточно сравнить две приведенные формы одного ранга в каждом из рядов и, например, сравнить крайние приведенные формы, которые легко образовать.

Отсюда следующее правило:

Для того чтобы узнать, эквивалентна ли F форме F', с точностью до постоянного множителя, образуют форму, приведенную относительно F, и такую же относительно F', которые соответствуют бесконечному λ, и проверяют, отличаются ли эти две формы только на постоянный множитель.

XIII. Формы пятого семейства

Пусть канонической будет форма *

$$6\alpha X_1X_2X_3+X_3^3=H,$$

инвариантная относительно подстановки

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{vmatrix}.$$

Укажем сначала на важное различие между этим и предыдущим случаями. Эта каноническая форма инвариантна только относительно подстановок с детерминантом 1. Значит вводить, как мы это делали для четвертого семейства, вторичные приведенные формы здесь не имеет смысла.

Сразу видно, как и для третьего семейства, что приведенных форм конечное число, что они разделяются на три вида и что *приведенных форм первого и второго видов конечное число.*

Рассмотрим теперь приведенные формы *третьего вида* и исследуем их распределение по родам.

Пусть

$$T=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

— приведенное преобразование, переводящее каноническую форму в приведенную форму третьего вида, с целыми коэффициентами.

Для того чтобы T было приведенным, здесь снова необходимо, чтобы:

1) $T'=\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ было приведенным;

2) $|\alpha_2|<\frac{1}{2}|\alpha_1|$, $|\alpha_3|<\frac{1}{2}|\alpha_1|$;

3) α_1^2 было достаточно малым.

Форму

$$(6\alpha X_1X_2X_3+X_3^3)\cdot T$$

---

* Первая часть работы, стр. 830, формула (9). (*А. П.*).

можно записать в виде

$$3\alpha_1 x_1 [(2\alpha X_2 X_3) \cdot T'] + (3\alpha_2 x_2 + 3\alpha_3 x_3) [(2\alpha X_2 X_3) \cdot T'] + (\gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)^3.$$

Полагая

$$T_1' = \begin{vmatrix} \beta_2 \sqrt{\alpha_1} & \beta_3 \sqrt{\alpha_1} \\ \gamma_2 \sqrt{\alpha_1} & \gamma_3 \sqrt{\alpha_1} \end{vmatrix},$$

где детерминант этой подстановки равен 1, мы напишем форму

$$F_1 + F_2 + F_3,$$

где

$$F_1 = 3x_1 [(2\alpha X_2 X_3) \cdot T_1'],$$

$$F_2 = \left(3x_2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 3x_3 \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) [(2\alpha X_2 X_3) \cdot T_1'],$$

$$F_3 = (\gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)^2.$$

Так как детерминант T_1' равен 1, форма $F_1/3x_1$ должна быть приведенной неопределенной бинарной квадратичной формой с целыми коэффициентами. Значит, эти коэффициенты ограничены, и если рассмотреть теперь саму подстановку T_1', то можно всегда полагать

$$\beta_2 \sqrt{\alpha_1} = b_2, \quad \beta_3 \sqrt{\alpha_1} = b_3, \quad \gamma_2 \sqrt{\alpha_1} = c_2, \quad \gamma_3 \sqrt{\alpha_1} = c_3,$$

где

$$b_2 c_3 - b_3 c_2 = 1,$$

а отношения b_2/b_3 и c_2/c_3 могут принимать только конечное множество значений.

Так как α_2/α_1 и α_3/α_1 ограничены, коэффициенты F_2 тоже ограничены.

Коэффициенты бинарной формы $F_2 + F_3$ должны быть ограниченными. Но они имеют вид

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} A_i + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} B_i + \frac{1}{\alpha_1 \sqrt{\alpha_1}} C_i = D_i,$$

где A_i, B_i и C_i — заданные величины. A_i и B_i целые, так как они являются коэффициентами формы $F_1/3x_1$. Что касается C_i, то они сводятся соответственно к

$$c_2^3, \quad c_2^2 c_3, \quad c_2 c_3^2, \quad c_3^3.$$

А я утверждаю, что c_2 и c_3 должны быть соизмеримы между собой. Действительно

$$\Delta(H) = 12\alpha^3 X_1 X_2 X_3 - 6\alpha^2 X_3^3, \quad \Delta(H) - 2\alpha^2 H = -8\alpha^2 X_3^3,$$

так что коэффициенты формы

$$[\Delta(H) - 2\alpha^2 H] \cdot T = -8\alpha^2 (\gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)^3$$

должны быть целыми. Следовательно, $\gamma_2/\gamma_3 = c_2/c_3$ (корни уравнения третьего порядка, у которого все корни совпадают и все коэффициенты целые) соизмеримы. Значит, c_2 и c_3 соизмеримы между собой. Но

$$(2\alpha X_2 X_3) \cdot T_1' = \frac{F_1}{3x_1} = Ax_2^2 + 2Bx_2x_3 + Cx_3^2,$$

где A, B, C — целые, а эту форму можно записать в виде

$$A\left(x_2 + \frac{c_3}{c_2} x_3\right)\left(x_2 + \frac{b_3}{b_2} x_3\right).$$

Итак,

$$\frac{b_3}{b_2} = \frac{2B}{A} - \frac{c_3}{c_2} = \text{соизмеримое число}.$$

Но ведь дискриминант этой бинарной квадратичной формы равен с одной стороны α^2, а с другой стороны

$$A^2\left(\frac{b_3}{b_2} - \frac{c_3}{c_2}\right).$$

Таким образом,

$$\alpha = \pm A\left(\frac{b_3}{b_2} - \frac{c_3}{c_2}\right) = \text{соизмеримое число}.$$

Следствие. *Если* $4S$* *не является точной четвертой степенью, то не существует приведенной формы третьего вида.*

Рассмотрим теперь каноническую форму**

$$H = 3\alpha X_1^2 X_3 + 3\alpha X_2^2 X_3 + X_3^2,$$

Можно было бы так же показать:

1) что приведенных форм первого и второго видов конечное число;

2) что не может существовать приведенной формы третьего вида, *действительно* эквивалентной H, так как в этом случае двойные точки кривой $H=0$ *мнимые.*

Следовательно:

Если двойные точки $H=0$ *мнимые или если* $4S$ *не является точной четвертой степенью, то существуют приведенные формы только первого и второго видов. Значит, существует только конечное число приведенных форм. Эти приведенные формы делятся на конечное число классов. В каждом классе их конечное число. Приведенные формы одного класса можно распо-*

---

* $S=4\alpha^4$ является, разумеется, инвариантом формы. (*А. Ш.*).

** Первая часть работы, стр. 830, формула (10). (*А. Ш.*).

ложить в цепочку так, чтобы каждая из них была смежной с предыдущей и с последующей, и, следуя вдоль этой цепочки, можно было бы увидеть, что различные формы периодически повторяются.

Если двойные точки $H=0$ действительны и если $4S$ — точная четвертая степень, то мы разделим классы, полученные из H, на две категории.

Первая категория будет содержать формы, полученные из H с помощью подстановки

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

где α_1, α_2, α_3 так же, как β_1, β_2, β_3 и как γ_1, γ_2, γ_3, соизмеримы между собой.

Вторая категория будет содержать формы, не удовлетворяющие этому условию.

Классов первой категории конечное число, и все, что мы сказали о четвертом семействе, применимо к этим классам. Следовательно, в каждом классе приведенные формы располагаются в цепочку, ограниченную представителями двух крайних форм. Единственная разница состоит в том, что здесь не надо делать никакого различия между главными и вторичными приведенными формами.

Классов второй категории конечное число, и все, что мы сказали в случае, когда $4S$ не является точной четвертой степенью, приложимо к этим классам. Следовательно, в каждом классе приведенные формы располагаются в бесконечную цепочку, где можно видеть, что они повторяются периодически.

XIV. Формы шестого семейства

Пусть каноническая форма имеет вид *

$$H=3X_2^2X_3+3X_1^2X_2.$$

1. Мы снова здесь имеем главные и вторичные приведенные формы, так как каноническая форма H может быть инвариантной как относительно подстановок с детерминантом 1, так и относительно подстановок с детерминантом, отличным от 1.

2. Выражение для подстановок, воспроизводящих H, содержит многочисленные произвольные параметры. Следовательно, в каждом классе может содержаться много приведенных форм, и эти формы образуют не *цепочку*, а *сетку*, так что каждая форма смежна со *всеми* соседними с ней в сетке.

---

* Первая часть работы, стр. 831, формула (11). (*А. Ш.*).

3. Легко было бы показать, что может существовать только конечное число главных приведенных форм первого и второго видов*, в то время, как может быть бесконечное число вторичных приведенных форм первого и второго видов.

4. Изучим теперь приведенные формы третьего вида, т. е. те, которые можно получить из H с помощью подстановки

$$T=\begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Легко было бы показать, что β_2 и β_3 соизмеримы между собой:

$$\beta_2=\lambda b_2, \qquad \beta_3=\lambda b_3,$$

где b_2 и b_3 — два целых взаимно простых числа.

Будем считать принадлежащими к *одному роду*** две приведенные подстановки

$$T=\begin{vmatrix} 0 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ 0 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \\ \frac{1}{\lambda^2}c_1 & \frac{1}{\lambda^2}c_2 & \frac{1}{\lambda^2}c_3 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad T_1=\begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 a_2 & \lambda_1 a_3 \\ 0 & \lambda_1 b_2 & \lambda_1 b_3 \\ \frac{1}{\lambda_1^2}c_1 & \frac{1}{\lambda_1^2}c_2 & \frac{1}{\lambda_1^2}c_3 \end{vmatrix},$$

отличающиеся только значениями λ и λ_1, как и две приведенные формы, полученные из H с помощью подстановок одного рода. Тогда видно:

1. Что число родов бесконечно.

Действительно, предположим, что b_2, b_3, a_2, a_3 — четыре целых числа таких, что преобразование

$$\begin{vmatrix} \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ \lambda b_2 & \lambda b_3 \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

приведенное.

Это можно сделать бесконечно многими способами.

Форму $H \cdot T$ можно тогда записать в виде

$$3c_1x_1(b_2x_2+b_3x_3)^2+3(c_2x_2+c_3x_3)(b_2x_2+b_3x_3)^2+3\lambda^3(a_2x_2+a_3x_3)^2(b_2x_2+b_3x_3).$$

---

* Определение вида см. выше, стр. 879. (*А. Ш.*).

** Определение рода такое же, как и в случае четвертого семейства (стр. 885). Две подстановки одного рода получаются одна из другой с помощью умножения слева на диагональную матрицу с положительными элементами и детерминантом, равным 1, у которой два первых элемента равны. (*А. Ш.*).

Если c_1 — целое число, то у формы

$$3c_1x_1(b_2x_2+b_3x_3)^2=3Ax_1x_2^2+6Bx_1x_2x_3+3Cx_1x_3^2$$

целые коэффициенты.

Форма

$$3(c_2x_2+c_3x_3)(b_2x_2+b_3x_3)^2+3\lambda^3(a_2x_2+a_3x_3)^2(b_2x_2+b_3x_3)$$

должна иметь целые коэффициенты, т. е. величины

$$3\frac{c_2}{c_1}A+3\lambda^3a_2^2b_2,$$

$$\frac{c_2}{c_1}B+\frac{c_3}{c_1}A+\lambda^3(a_2^2b_3+2a_2a_3b_2),$$

$$\frac{c_2}{c_1}C+\frac{c_3}{c_1}B+\lambda^3(2a_2a_3b_3+a_3^2b_2),$$

$$3\frac{c_3}{c_1}C+3\lambda^3a_2^2b_3$$

должны быть целыми. Но если рассматривать c_2/c_1, c_3/c_1 и λ^3 как координаты точки в пространстве, то это означает, что наша точка совпадает с одним из узлов решетки Браве *.

Для того чтобы подстановка T была приведенной, необходимо и достаточно, чтобы λ^3 было достаточно большим и чтобы c_2/c_1 и c_3/c_1 были меньше $^1/_2$ по абсолютной величине. Но всегда существует бесконечно много узлов решетки Браве, удовлетворяющих этому условию. Таким образом, в каждом роде для любых a_2, a_3, b_2, b_3 всегда содержится бесконечно много приведенных форм, и ясно, кроме того, что существует бесконечно много родов.

В интересующем нас случае я не вижу никаких причин, по которым в каждом классе содержалось бы конечное число приведенных форм.

Следовательно, общий метод определения эквивалентности двух форм становится иллюзорным. Но в данном случае некий специальный метод позволит быстрее прийти к результату.

Действительно, пусть две формы F и F_1 принадлежат к шестому семейству. Предположим, что требуется узнать, будет ли F эквивалентна αF_1, где α — константа.

Пусть

$$F=H\cdot T,$$

$$F_1=H\cdot T_1.$$

$\alpha F_1=F\cdot E$, где E — унитарное преобразование с целыми коэффициентами.

* См. примечание, уже сделанное выше, стр. 883 (*А. Ш.*).

Если взять гессиан, то найдем

$$\Delta(F) = (-6X_2^3)\cdot T,$$

$$\Delta(F_1) = (-6X_2^3)\cdot T_1,$$

$$\Delta(\alpha F_1) = \alpha^3\Delta(F_1) = \Delta(F)\cdot E.$$

Отсюда получаем

$$\alpha\sqrt[3]{\Delta(F_1)} = \sqrt[3]{\Delta(F)}\cdot E.$$

Пусть

$$\frac{F}{\sqrt[3]{\Delta(F)}} = G, \qquad \frac{F}{\sqrt[3]{\Delta(F_1)}} = G_1,$$

G и G_1 — квадратичные формы, так как они равны с точностью до постоянного множителя

$$(X_2X_3 + X_1^2)\cdot T \quad \text{и} \quad (X_2X_3 + X_1^2)\cdot T_1.$$

Тогда

$$G_1 = (\alpha G)\cdot E.$$

Значит, необходимо узнать, будет ли G_1 эквивалентна G с точностью до постоянного множителя, и в случае, когда эта эквивалентность установлена, узнать, переводит ли $\sqrt[3]{\Delta(F)}$ в $\alpha\sqrt[3]{\Delta(F_1)}$ подстановка, переводящая αG в G_1. Что касается значения, которое должно принимать α, то его можно получить из детерминантов G и G_1.

Нам нечего добавить относительно форм седьмого семейства, изученных Эрмитом *.

XV. Резюме

Первое и второе семейства

Конечное число приведенных форм; конечное число классов.

Единственная приведенная форма, вообще говоря, в каждом классе.

Третье семейство

Каждый класс содержит, вообще говоря, единственную приведенную форму.

---

* Изучение форм седьмого семейства, представляющих собой разложимые формы, эквивалентно исследованию «*единиц*» (или делителей 1) поля третьей степени. Это исследование может привести к систематическому методу приведения квадратных матриц 3-го порядка, определенных с точностью до произведения слева на диагональную матрицу, и, соответственно, к арифметической эквивалентности справа [A. Châtelet. Sur certains ensembles de tableax, . . . (Ann. l'École Norm., *1911*)]. (*А. Ш.*).

Классы разделяются на три вида

Форм первого и второго вида конечное число	Формы третьего вида разделяются на конечное число родов Каждый род содержит бесконечное число классов

Четвертое семейство

Главные приведенные формы делятся на три вида		Вторичные приведенные формы делятся на три вида	
Форм первого и второго вида конечное число	Формы третьего вида делятся на бесконечное число родов Каждый род содержит бесконечное число приведенных форм	Форм первого и второго вида бесконечное число	Форм третьего вида также бесконечно много
Каждый класс содержит, вообще говоря, единственную главную приведенную форму		Существует бесконечно много классов. Каждый класс содержит конечное число вторичных приведенных форм. Эти вторичные формы располагаются в ограниченную цепочку; каждая из них смежна с предыдущей и с последующей, кроме последней формы, смежной только с предыдущей, и первой формы, смежной только с последующей формой	

Пятое семейство

Имеются только главные приведенные формы

Первый случай	Двойные точки мнимы		
Второй случай	Двойные точки действительны; $4S$ не является точной четвертой степенью		
Третий случай Двойные точки действительны, $4S$ есть точная 4-я степень	Классы делятся на две категории	Классы первой категории	Конечное число родов, делящихся на бесконечное число классов. Каждый класс содержит конечное число приведенных форм, образующих ограниченную цепочку, как и в случае четвертого семейства

Классы второй категории	Конечное число классов
	Каждый класс содержит конечное число форм, образующих неопределенную цепочку, где они повторяются периодически, как и в случае квадратичных форм

Шестое семейство

Приведенные формы делятся на:

Главные приведенные формы, делящиеся на три вида		Вторичные приведенные формы, делящиеся на три вида	
Форм первого и второго вида конечное число	Формы третьего вида делятся на конечное число родов, и каждый род содержит их бесконечно много	Форм первого и второго вида конечное число	Формы третьего вида делятся на бесконечное число родов, и каждый род содержит их бесконечно много

Имеется бесконечно много классов. Каждый класс содержит бесконечно много главных приведенных форм, образующих неопределенную цепочку, как и в случае квадратичных бинарных форм (за исключением периодического повторения). А бесконечное множество вторичных приведенных форм образуют сетку, как и в случае неопределенных тернарных квадратичных форм.

Те же принципы можно приложить ко всем формам и, в частности, к кубическим кватернарным формам. Но крайнее многообразие случаев, которые я был бы вынужден рассмотреть, если бы я захотел сделать полное исследование подобных форм, остановило меня. Сделаем, тем не менее, одно важное замечание. Какова главная причина различий, которые мы наблюдаем в свойствах форм разных семейств? Та, что одни инвариантны, а другие — нет относительно некоторых преобразований. Таким образом, видно, какую важную роль при изучении арифметических свойств форм играет это чисто алгебраическое исследование их инвариантности относительно линейных подстановок. Именно поэтому я хотел в первой части данной работы полностью изучить группы преобразований, способных воспроизводить заданную кватернарную кубическую форму. Решение этой проблемы должно, в действительности, служить отправным пунктом для геометра, который захотел бы исследовать эти формы с арифметической точки зрения.

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ*

I. Введение

Арифметические свойства некоторых выражений и, в частности, бинарных квадратичных форм крайне тесно связаны с изменением этих форм под действием линейных преобразований с целыми коэффициентами. Я не буду здесь особенно останавливаться на той стороне этого вопроса, которая касается изучения таких преобразований и которая достаточно хорошо известна всем, интересующимся теорией чисел.

Можно полагать, что изучение групп аналогичных преобразований призвано сыграть большую роль в теории чисел. Именно это и побудило меня опубликовать нижеследующие соображения, хотя они представляют собой скорее программу исследования, чем подлинную теорию **.

Я спросил себя, нельзя ли многие проблемы анализа связать друг с другом на систематической основе, благодаря новой классификации однородных полиномов высшего порядка, аналогичной в некотором смысле классификации квадратичных форм.

Эту классификацию следовало бы строить на основе группы бирациональных преобразований *с рациональными коэффициентами*, которую допускает алгебраическая кривая.

II. Уникурсальные кривые

Пусть $f(x, y, z)$ — однородный относительно x, y, z полином с целыми коэффициентами ***. Равенство

$$f(x, y, z)=0$$

можно рассматривать как уравнение плоской алгебраической кривой в однородных координатах. Две кривые $f=0$ и $f_1=0$ будут тогда *эквивалентными*, или принадлежащими к *одному классу*, если от одной из них

---

* Journal de mathématiques, serie 5, 1901, 7, 161—233.

** Примечания, подписанные Ф. Ш., принадлежат Франсуа Шателе, а подписанные А. Н.,— А. Нерону. Когда они писали некоторые свои работы, то их вдохновлял тот труд, который сам А. Пуанкаре скромно назвал программой исследования (*А. Ш.*).

*** Можно считать эти коэффициенты взаимно простыми. (*А. Ш.*).

можно перейти к другой с помощью бирационального преобразования с целыми или рациональными коэффициентами *.

Я замечу сперва, что две прямые

$$ax+by+cz=0, \qquad a_1x+b_1y+c_1z=0$$

(где коэффициенты в левых частях, разумеется, целые или рациональные) всегда эквивалентны. Действительно, достаточно задать соответствие между точкой M, принадлежащей первой прямой, и точкой M_1, принадлежащей второй прямой, так чтобы прямая MM_1 проходила через данную фиксированную точку F с рациональными координатами. Таким образом, имеется только один класс прямых.

Рассмотрим теперь конические сечения. Если коническое сечение проходит через точку C с рациональными координатами (такую точку я буду называть для краткости *рациональной точкой*), то оно эквивалентно прямой. Действительно, достаточно рассмотреть какую-нибудь прямую D с рациональными коэффициентами (такую прямую я буду называть *рациональной прямой*) и задать соответствие между точкой M, принадлежащей коническому сечению, и точкой M_1, принадлежащей прямой D, так чтобы три точки MM_1C лежали на одной прямой.

Отсюда немедленно следует, что если коническое сечение содержит рациональную точку, то оно содержит бесконечно много таких точек. Это можно увидеть следующим образом. Пусть C — рациональная точка, принадлежащая коническому сечению, и пусть P — произвольная точка плоскости. Проведем прямую PC; эта прямая пересекает коническое сечение во второй точке M, которая является, очевидно, рациональной.

Конические сечения, содержащие рациональную точку, образуют, следовательно, один класс, и этому классу принадлежат все прямые. Узнать, принадлежит ли коническому сечению рациональная точка — в этом состоит проблема, которую предложил нам Гаусс в «Disquisitiones arithmeticae» (т. 1, 1874 г.) в главе, названной «Representatio ciffroe».

Конические сечения, не содержащие рациональной точки, разбиваются

---

* Это надо понимать так, что системы уравнений

$$f(x, y, z)=0, \qquad \frac{x}{u(x', y', z')}=\frac{y}{v(x', y', z')}=\frac{z}{w(x', y', z')}$$

и

$$f_1(x', y', z')=0, \qquad \frac{x'}{u_1(x, y, z)}=\frac{y'}{v_1(x, y, z)}=\frac{z'}{w_1(x, y, z)},$$

где u, v, w и u_1, v_1, w_1 — однородные полиномы, взаимно простые (в совокупности), с рациональными коэффициентами, эквивалентны.

Всякое бирациональное преобразование имеет обратное, и произведение двух бирациональных преобразований есть снова бирациональное преобразование; именно это дает основания для термина *класс*. (*А. Ш.*).

на многочисленные классы, и условия этого разбиения выводятся немедленно из принципов той же главы Гаусса.

Рассмотрим теперь *кубическую уникурсальную кривую* (с рациональными коэффициентами). Эта кривая содержит двойную точку C, которая в силу своей единственности будет необходимо рациональной. Такая кривая эквивалентна прямой. Пусть D — произвольная рациональная прямая. Достаточно поставить в соответствие точке M кубической кривой точку M_1 прямой D так, чтобы прямая MM_1 проходила через C.

Те же принципы можно приложить к произвольной рациональной алгебраической кривой $f=0$ степени m. У нее есть $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ двойных точек, через которые можно провести ∞^{m-2} кривых степени $m-2$. Так как эти двойные точки являются единственными двойными точками кривой с рациональными коэффициентами, то всякая симметрическая функция их координат будет рациональной *.

Отсюда следует, что через эти двойные точки и через $m-2$ произвольно взятых ** точек на плоскости можно провести кривую степени $m-2$ и притом единственную, и что эта кривая *рациональна* (я хочу сказать, задается уравнением с рациональными коэффициентами).

Общее уравнение кривой степени $m-2$, проходящей через двойные точки, имеет вид

$$\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\ldots+\alpha_{m-1}\varphi_{m-1}=0,$$

где α — произвольные коэффициенты, а φ — целые однородные полиномы от x, y и z степени $m-2$ с рациональными коэффициентами. Положим

$$\frac{\xi_1}{\varphi_1}=\frac{\xi_2}{\varphi_2}=\ldots=\frac{\xi_{m-1}}{\varphi_{m-1}}. \qquad (1)$$

Если мы будем рассматривать ξ как однородные координаты точки в пространстве $m-2$ измерений, то уравнение (1) определит преобразование, которое переводит нашу плоскую уникурсальную кривую в некоторую кривую K этого $(m-2)$-мерного пространства.

Я замечу сначала, что эта кривая имеет степень $m-2$. Действительно, пусть

$$\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\ldots+\alpha_{m-1}\xi_{m-1}=0$$

— уравнение произвольной плоскости нашего $(m-2)$-мерного простран-

* В данном рассуждении эти двойные точки предполагаются различными. Здесь следовало бы показать, что к этому случаю можно прийти, совершая над кривой бирациональное преобразование с рациональными коэффициентами. Ниже (стр. 905) приводится рассуждение, которое представляется более точным. (*А. Ш.*).

** Выражение «произвольно взятых» представляется некорректным; следовало бы лучше сказать «не удовлетворяющих каким-либо особым алгебраическим соотношениям». Если, например, наша кривая есть кривая четвертого порядка с тремя двойными точками, то необходимо, чтобы $m-2=2$ выбранные точки не были коллинеарны никаким двум двойным точкам. (*А. Ш.*).

ства. Чтобы найти точки пересечения этой плоскости с K, достаточно отыскать точки пересечения нашей уникурсальной кривой с кривой, заданной уравнением

$$\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_{m-1}\varphi_{m-1} = 0.$$

Так как кривая имеет степень $m-2$, то общее число точек пересечения равно $m(m-2)$. Из них $(m-1)(m-2)$ совпадает с данными двойными точками, и только $m-2$ точки подвижны.

Следовательно, число точек пересечения плоскости с K равно $m-2$.

Я отмечу затем, что преобразование (1) бирационально. Действительно, непосредственно видно, что ξ являются рациональными функциями x, y, z с рациональными коэффициентами. Я хочу теперь, наоборот, выразить три координаты x, y, z через ξ.

Чтобы найти x/z, например, я беру два произвольных равенства (1), допустим

$$\frac{\xi_1}{\varphi_1} = \frac{\xi_2}{\varphi_2} = \frac{\xi_3}{\varphi_3},$$

и из уравнения уникурсальной кривой и этих двух равенств исключаю y/z. Остаются два уравнения

$$F = 0, \quad F_1 = 0, \tag{2}$$

левые части которых однородны относительно x и z, с одной стороны, и относительно ξ_1, ξ_2, ξ_3 — с другой. Из этих двух уравнений я исключаю x/z методом наибольшего общего делителя. Последовательные деления приводят к серии равенств

$$F_2=0, \quad F_3=0, \quad \ldots, \quad F_p=0,$$

левые части которых представляют собой однородные полиномы с *рациональными коэффициентами* относительно x, z, с одной стороны, и относительно ξ_1, ξ_2, ξ_3 — с другой. Но в этой серии степень последовательных полиномов относительно x и z понижается. Последнее уравнение $F_p=0$ не содержит больше ни x, ни z. Оно выражает условие того, чтобы два уравнения (2) имели общий корень.

Это есть, следовательно, уравнение проекции кривой K на двумерную плоскость

$$\xi_4 = \xi_5 = \ldots = \xi_{m-1} = 0.$$

Предыдущее равенство $F_{p-1}=0$ представляет собой однородное уравнение первой степени относительно x и z. Отсюда получается выражение для x/z в виде рациональной функции ξ_1, ξ_2, ξ_3 с рациональными коэффициентами, за исключением того случая, когда $F_{p-1}=0$ есть тождество,

верное или само по себе, или при условии $F_p=0$. Но если бы это последнее обстоятельство имело место, то мы могли бы сказать, что уравнения

$$f=0, \quad \frac{\xi_1}{\varphi_1}=\frac{\xi_2}{\varphi_2}=\frac{\xi_3}{\varphi_3}$$

имеют два решения всякий раз, как они имеют одно. Из *алгебраической* теории уникурсальных кривых, на которой я не буду останавливаться, следует, что этого не может быть. Поэтому мы не будем заниматься этим исключением, не имеющим места на самом деле.

Из всего этого заключаем, что преобразование (1) есть бирациональное преобразование с рациональными коэффициентами (я буду говорить для краткости *чисто рациональное преобразование*), и то же самое верно для преобразования

$$\frac{\xi_1}{\varphi_1}=\frac{\xi_2}{\varphi_2}=\frac{\xi_3}{\varphi_3},$$

переводящего плоскую кривую $f=0$ в плоскую кривую $F_p=0$, которая, являясь проекцией K, имеет степень $m-2$. Отсюда делаем вывод.

Уникурсальная рациональная кривая всегда эквивалентна другой уникурсальной кривой, степень которой на две единицы меньше.

Последовательно приходим к следующему результату.

Уникурсальная рациональная кривая всегда эквивалентна прямой или коническому сечению *.

На рациональной прямой или коническом сечении находится бесконечное множество пар точек, таких, что любая симметрическая функция их координат является рациональной (такие пары я буду называть *рациональными парами*). Эти рациональные пары получаются при пересечении конического сечения произвольной рациональной прямой.

Следовательно, *на произвольной рациональной уникурсальной кривой всегда бесконечно много рациональных пар.*

---

* Эта теорема на другом языке была уже доказана Нетер (Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen. — Math. Ann., 23, 311), затем была уточнена Гильбертом и Гурвицем (Über die diophantischen Gleichungen von Geschlecht Null. — Acta math., 14, 217—224).

Майе, с другой стороны, установил следующий результат. Если уникурсальная кривая содержит бесконечно много рациональных точек, то все их можно получить, за исключением конечного числа в случае двойных точек, придавая параметру (выбранному подходящим образом) всевозможные значения, в том числе, быть может, ∞. [Détermination des points entiers des courbes algébriques unicursales à coefficients entiers (C. r. Acad. sci., 1919, 168; J. École Polytechn., 1919)].

Ф. Шателе получил обобщение на случай n-мерного пространства и дал новое доказательство теорем Нетер—Пуанкаре для того, что он называет «многообразиями Брауэра» [Variations sur une thème de H. Poincaré (Ann. École Norm. Super., 1944, 4, 251—265)]. Он не привлекал к рассмотрению двойные точки кривой, а исследовал только существование подходящей параметризации. (*А. Н.*).

Эти результаты можно получить еще по-другому. Я назову *рациональной группой* группу таких точек, что всякая симметрическая функция их координат является рациональной.

Я утверждаю сначала, что на уникурсальной кривой $f=0$ бесконечно много рациональных групп, содержащих $m-2$ точки. Это получается следующим образом.

Рассмотрим кривую степени $m-2$

$$\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\cdots+\alpha_{m-1}\varphi_{m-1}=0$$

и придадим коэффициентам α рациональные значения.

Эта кривая пересекает $f=0$ в $m-2$ точках, помимо двойных точек, и эти $m-2$ точки образуют, очевидно, рациональную группу.

Я утверждаю теперь, что имеется бесконечно много рациональных пар.

Действительно, через двойные точки можно провести $\infty^{2(m-1)}$ кривых степени $m-1$. Возьмем затем две рациональные группы из $m-2$ точек. Через двойные точки и через эти две группы точек можно провести ∞^2 кривых степени $m-1$, общее уравнение которых имеет вид

$$\alpha_1\psi_1+\alpha_2\psi_2+\alpha_3\psi_3=0, \tag{3}$$

где α — произвольные коэффициенты, а ψ — однородные полиномы *с рациональными коэффициентами* степени $m-1$ относительно x, y, z.

Придадим произвольным α какие-либо рациональные значения. Кривая (3) пересечет кривую $f=0$:

1) в двойных точках, что даст $(m-1)(m-2)$ пересечений;

2) в точках, принадлежащих двум рациональным группам, что даст $2(m-2)$ пересечений;

3) в двух других подвижных точках.

Эти две подвижные точки образуют, очевидно, рациональную пару *.

Рассмотрим преобразование

$$\frac{\xi_1}{\varphi_1}=\frac{\xi_2}{\varphi_2}=\frac{\xi_3}{\varphi_3}.$$

Можно заметить, как и в случае (1), что это преобразование чисто рационально; оно переводит $f=0$ в коническое сечение, так как кривые (3) пересекают $f=0$ в двух подвижных точках.

Следовательно, всякая уникурсальная кривая эквивалентна некоторому коническому сечению.

Возьмем, наконец, нечетное m. Я утверждаю, что имеется бесконечно много рациональных точек. Действительно, рассмотрим $(m-3)/2$ произ-

---

* Существование рациональных пар немедленно следует из эквивалентности нашей кривой и некоторого (рационального) конического сечения. Обратно, это существование, установленное здесь непосредственно, доказывает, возможно более строго, эту эквивалентность (*А. Ш.*).

вольных рациональных пар. Через эти пары и двойные точки можно провести пучок кривых степени $m-2$ с общим уравнением

$$\alpha_1\theta_1+\alpha_2\theta_2=0,$$

где α произвольны, а θ — рациональные коэффициенты.

Придадим α какие-нибудь рациональные значения. Кривая (4) пересечет $f=0$ не только в двойных точках и $m-3$ точках рациональных пар, но и еще в одной точке. Эта точка простая и поэтому рациональная.

III. Рациональные точки кубических кривых

Мы видели, с какой легкостью был исследован случай уникурсальных кривых. Перейдем теперь к кривым рода 1 и сначала к более простым из них, другими словами, к кривым 3-го порядка.

Займемся сначала распределением рациональных точек на этих кривых.

Я замечаю, что если известны две рациональные точки на кривой третьего порядка, то можно найти третью. Действительно, прямая, соединяющая две данные рациональные точки, пересечет нашу кривую в третьей точке. Эта точка простая и, следовательно, рациональная.

Аналогично, если мы знаем одну рациональную точку, то можем найти другую; касательная к нашей кривой в рациональной точке представляет собой рациональную прямую, которая пересекает нашу кривую в другой рациональной точке.

Посмотрим, что это за рациональные точки, которые мы можем последовательно найти, зная одну, две, три и т. д. заданные рациональные точки.

С каждой точкой кривой рода 1 связан некоторый *эллиптический аргумент*, а на кривой третьего порядка сумма эллиптических аргументов трех точек, лежащих на прямой, постоянна с точностью до периода.

Мы определим аргумент так, чтобы эта постоянная равнялась нулю. Нужно отметить, что этот аргумент определен только с точностью до трети периода, так как если добавить ко всем аргументам треть периода, то сумма аргументов трех точек, лежащих на прямой, не перестанет равняться периоду.

Заметив это, обозначим через M_0 рациональную точку с эллиптическим аргументом α. Касательная в M_0 пересекает нашу кривую в рациональной точке M_{-1}, эллиптический аргумент которой равен -2α. Касательная в M_{-1} пересекает нашу кривую в рациональной точке M_1, с эллиптическим аргументом 4α.

Прямая M_0M_1 пересекает нашу кривую в рациональной точке M_{-2}, аргумент которой равен -5α; прямая $M_{-2}M_{-1}$ пересекает кривую в рациональной точке M_2 с аргументом 7α.

Прямая M_2M_0 пересекает кривую в точке M_{-3} с аргументом -8α, а прямая $M_{-3}M_{-1}$ пересекает ее в точке M_3 с аргументом 10α.

Закон установлен, и мы получаем, что нашей кривой принадлежит последовательность рациональных точек M_n (где n — целое число, изменяющееся от $-\infty$ до $+\infty$), а эллиптический аргумент M_n равен $(3n+1)\alpha$.

Все эти точки различны, если только α не соизмеримо с периодом.

Прямая, соединяющая M_n и M_p, пересекает нашу кривую в третьей рациональной точке, эллиптический аргумент которой равен

$$[3(-n-p-1)+1]\alpha$$

и которая, таким образом, является одной из точек M_n.

Пусть теперь M_0 и N_0 — две рациональные точки с аргументами α и β. Точки M_n и N_p с аргументами

$$(3n+1)\alpha \quad \text{и} \quad (3p+1)\beta$$

тоже рациональны. Третья точка пересечения нашей кривой с прямой M_nN_p имеет аргумент

$$-(3n+1)\alpha-(3p+1)\beta$$

и является рациональной. Так как две точки

$$\beta \quad \text{и} \quad -(3n+1)\alpha-(3p+1)\beta$$

рациональны, то найдется еще одна с аргументом

$$(3n+1)\alpha+3p\beta.$$

Аналогично, рациональной будет и точка

$$3n\alpha+(3p+1)\beta.$$

Короче говоря, рациональными будут все точки с аргументами

$$a\alpha+b\beta,$$

где a и b — целые числа, удовлетворяющие одной из трех систем сравнений

$$\begin{aligned} a&\equiv 1, & b&\equiv 0, & \\ a&\equiv 0, & b&\equiv 1, & \pmod 3 \\ a&\equiv -1, & b&\equiv -1, & \end{aligned}$$

или, в других терминах, все точки с аргументами

$$\alpha+3n\alpha+p(\beta-\alpha),$$

где n и p целые.

Заметим, что если соединить две такие точки, то соответствующая рациональная прямая пересечет нашу кривую в третьей точке, аргумент которой имеет тот же вид.

Это показывает, что *все* рациональные точки, которые можно получить из M_0 и N_0 такими построениями, выражаются той же самой формулой.

Более общо, если точки с эллиптическими аргументами

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_q$$

рациональны, то такими же будут все точки, аргументы которых выражаются формулой

$$\alpha + 3n\alpha + p_1(\alpha_1 - \alpha) + p_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p_q(\alpha_q - \alpha), \tag{1}$$

где n и p — целые числа *.

Будут ли различными все точки, выраженные этой формулой (1)? Да, будут, если только между аргументами

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_q$$

и периодом не существует линейной зависимости с целыми коэффициентами.

Можно считать, что аргументы

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_q \tag{2}$$

выбраны таким образом, что формула (1) выражает все рациональные точки нашей кривой. $q+1$ рациональных точек с аргументами (2) образуют тогда то, что мы назовем *системой рациональных фундаментальных точек* **.

Ясно, что выбрать систему рациональных фундаментальных точек можно бесконечным множеством способов. Нужно с самого начала сделать наш выбор таким, чтобы число $q+1$ фундаментальных точек было как можно меньшим. Это минимальное значение числа $q+1$ я назову рангом нашей кривой; это, очевидно, очень важный элемент классификации кубических рациональных кривых ***.

---

* Пожалуй, предпочтительнее пользоваться симметричной формулировкой: все точки с аргументами

$$\sum x_i\alpha_i, \quad \text{где} \quad x_i \quad \text{целые;} \quad \sum x_i \equiv 1 \pmod 3$$

— рациональны. (*А. Ш.*).

** А. Пуанкаре предполагает здесь, что существует конечная система рациональных фундаментальных точек. Это свойство на самом деле трудно доказывается. Доказательство дано Л. Дж. Морделлом (L. J. Mordell. On the rational solutions of the indeterminate equations of the third or fourth degrees. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1922, 21, p. 179—192)]. Его улучшил А. Вейль [A. Weil. Sur un thèorème de Mordell. — Bull. sci. math., 1930, 2, 54, 187—191)]. (*Ф. Ш.*).

*** Следовало бы показать, что так определенный ранг действительно инвариантен относительно любого бирационального преобразования, переводящего данную кубическую кривую в другую кубическую кривую или в кривую рода 1. Доказательство этого факта не представляет больших трудностей, но было бы еще легче при лучшем выборе обозначений. В тех обозначениях, которые здесь приняты, нужно сделать ограничение, состоящее в том, что если 3α — период (или, что то же самое, M_0 — точка перегиба), то в качестве ранга надо взять q вместо $q+1$. (*Ф. Ш.*).

Существуют и другие элементы классификации.

Известно, что действительные кубические кривые разделяются на две категории: одни из них имеют одну ветвь, на которой все аргументы действительны, другие имеют две ветви. Аргументы всех точек первой ветви (нечетной ветви) действительны, аргументы всех точек второй ветви (четной ветви) равны некоторому действительному числу плюс мнимый полупериод, который я обозначу $\omega'/2$.

В первом случае у всех рациональных точек действительные аргументы, так что все величины α, α_1, ..., α_q действительны.

Во втором случае снова может оказаться, что все эти величины действительны, и тогда получится, что все рациональные точки лежат на нечетной ветви, а на четной таких точек нет.

Но также может случиться, что одно из α равно действительному числу плюс $\omega'/2$, так что одна из рациональных фундаментальных точек лежит на четной ветви. Мы можем всегда считать, что таких точек не больше одной. Действительно, если бы этой четной ветви принадлежали две фундаментальные точки с аргументами β и γ, то мы могли бы их заменить точками с аргументами β и $-\beta-\gamma$, и вторая из этих точек оказалась бы на нечетной ветви.

Итак, пусть α, α_1, ..., α_{q-1} действительны. Положим

$$\alpha_q = \beta + \frac{\omega'}{2},$$

где β действительно; тогда рациональные точки нечетной ветви зададутся формулой

$$\alpha + 3n\alpha + p_1(\alpha_1 - \alpha) + p_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p_{q-1}(\alpha_{q-1} - \alpha) + 2p_q(\beta - \alpha).$$

Каждой рациональной точке нечетной ветви соответствует одна точка четной ветви, и разность аргументов соответствующих точек равна

$$\beta - \alpha + \frac{\omega'}{2}.$$

С этой точки зрения мы должны рассмотреть три категории рациональных кубических кривых (помимо кривых ранга нуль, которые не содержат рациональных точек): 1) те, у которых только одна ветвь; 2) те, у которых две ветви, но рациональные точки лежат только на нечетной ветви; 3) те, у которых две ветви, и рациональные точки есть на каждой из них.

Мы должны различать кривые еще и по другому признаку. Может оказаться, что среди величин

$$2n\alpha + p_1(\alpha_1 - \alpha) + \ldots + p_q(\alpha_q - \alpha), \tag{3}$$

представляющих собой значения, которые принимает разность аргументов рациональных точек, найдутся делители действительного периода. Рассмотрим все величины (3), также соизмеримые с этим действительным периодом, который я назову ω. Их наибольший общий делитель содержится

среди (3), и поскольку все эти величины определены только с точностью до некоторого кратного периоду ω, можно считать, что наибольший общий делитель ω и тех величин (3), которые соизмеримы с ω, снова содержится среди (3).

Пусть ω/m — этот наибольший общий делитель. Все кратные ω/m содержатся среди (3) и представляют собой единственные величины (3), соизмеримые с ω.

Мы можем положить тогда либо $\alpha = \omega/3m$, либо $\alpha_1 = \alpha + \omega/m$. Если существуют величины (3), соизмеримые с ω, то число m является, очевидно, тоже одним из наиболее важных элементов классификации рациональных кубических кривых.

Может случиться, что единственной рациональной фундаментальной точкой будет $\omega/3m$; более общо, может оказаться, что все рациональные точки задаются одной из формул

$$\frac{K\omega}{m}, \qquad \frac{K\omega}{m} + \frac{\omega}{3m}, \qquad \frac{K\omega}{m} + \frac{2\omega}{3m} \tag{4}$$

или, лучше сказать, рациональные точки нечетной ветви задаются одной из формул (4), а рациональные точки четной ветви получаются добавлением к эллиптическим аргументам или $\omega'/2$, или $\omega/2m + \omega'/2$.

В этих случаях число рациональных точек всего лишь конечно. Во всех других случаях этих точек бесконечно много. Добавлю, что их бесконечно много на каждой дуге нашей кривой, если у нее одна ветвь, на каждой дуге нечетной ветви, если у нее две ветви, и, наконец, на каждой дуге любой из ветвей, если у нее две ветви и рациональные точки на каждой из них.

Столь же естественно возникает следующая проблема:

Какие значения может принимать целое число, которое мы назвали рангом *кубической рациональной кривой? Каковы среди категорий кривых, перечисленных нами и являющихся логически возможными, те, которые существуют на самом деле?*

IV. Другие кривые рода 1

Эти принципы можно приложить к произвольным кривым рода 1.

Рассмотрим, например, пространственную кривую четвертого порядка (quartique gauche). С каждой точкой этой кривой связан эллиптический аргумент, и сумма аргументов четырех точек пересечения нашей кривой с некоторой плоскостью равна нулю. Таким образом, если точки α, β, γ рациональны, то такова же и точка

$$-\alpha - \beta + \gamma.$$

Если точка α рациональна, то такова же точка -3α и точки

$$5\alpha = -[\alpha + 2(-3\alpha)],$$
$$-7\alpha = -[5\alpha + \alpha + \alpha],$$

$$9\alpha = -[(-7\alpha) + \alpha + (-3\alpha)],$$
$$-11\alpha = -[9\alpha + \alpha + \alpha]$$

и, короче говоря, все точки $(4n+1)\alpha$.

Если α, β, γ рациональны, то таковы же точки

$$-\alpha - \beta - \gamma$$

и

$$-(2\alpha + \gamma),$$

и, следовательно,

$$\gamma + \beta - \alpha = -[2\alpha + (-\alpha - \beta - \gamma)].$$

Таким образом, если

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$$

рациональны, то рациональными будут точки

$$(4n+1)\alpha + p_1(\alpha_1 - \alpha) + p_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p_q(\alpha_q - \alpha), \qquad (1)$$

где n, p_1, p_2, ..., p_q — * целые.

Эта формула аналогична формуле (1) предыдущего параграфа, и ее можно было бы обсудить таким же образом.

Рассмотрим, более общо, кривую рода 1 и степени m в $m-1$-мерном пространстве. Некоторая *плоскость* пересекает эту кривую в m точках, и сумма их эллиптических аргументов равна нулю.

Можно провести те же рассуждения. Если α, α_1, α_2, ..., α_q рациональны, то таковы же

$$-(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{m-1}),$$

различные точки

$$-(m-1)\alpha, \qquad -\alpha_2 - (m-2)\alpha, \qquad -\alpha_2 - \alpha_1 - (m-3)\alpha,$$
$$-\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha) = -\{-(m-2)\alpha - [-\alpha_2 - \alpha_1 - (m-3)\alpha]\}$$

---

* Как было сказано выше (стр. 909), было бы предпочтительней заменить эту формулу на следующую:

$$\sum x_i\alpha_i, \qquad x_i \text{ — целые}, \qquad \sum x_i \equiv 1 \pmod 4$$

и, более общо,

$$\sum y_i\alpha_i, \qquad y_i \text{ — целые}, \qquad \sum y_i \equiv 1 \pmod n$$

для кривой рода 1 и степени n в пространстве $n-1$ измерений.

При определении ранга по формуле текста следовало бы сделать ограничения, аналогичные уже сделанному, относительно некоторых значений α. (*А. Ш.*).

и, более общо, точки

$$(nm+1)\alpha+p_1(\alpha_1-\alpha)+p_2(\alpha_2-\alpha)+\ldots+p_q(\alpha_q-\alpha),$$

задаваемые формулой, аналогичной формуле (1).

К тем же результатам легко было бы прийти прямо, рассматривая плоские кривые. Пусть C — кривая m-й степени и 1-го рода; у нее есть

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}-1$$

двойных точек. Через эти двойные точки можно провести ∞^{m-1} кривых K $(m-2)$-го порядка, пересекающих нашу кривую в m подвижных точках. Если имеется $m-1$ рациональных точек с эллиптическими аргументами

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{m-1},$$

то через эти точки можно провести кривую K, пересекающую C в m-й точке с аргументом

$$-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{m-1}),$$

которая, очевидно, рациональна.

Остальные рассуждения следуют так же, как и выше. Определим теперь, в каких случаях кривая четвертого порядка или кривая более высокой степени может быть эквивалентна некоторой кубической кривой.

Рассмотрим сначала произвольную плоскую кривую четвертого порядка 1-го рода. Предположим, что она содержит рациональную точку P. Через эту точку и через две двойные точки можно провести ∞^2 конических сечений, которые пересекут нашу кривую в трех подвижных точках. Общее уравнение этих конических сечений имеет вид

$$\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\alpha_3\varphi_3=0,$$

где α произвольны, а φ — полиномы второй степени с рациональными коэффициентами.

Рассмотрим тогда преобразование

$$\frac{\xi_1}{\varphi_1}=\frac{\xi_2}{\varphi_2}=\frac{\xi_3}{\varphi_3},$$

в котором мы считаем ξ однородными координатами точки на плоскости. Оно переводит нашу кривую четвертого порядка в кубическую кривую, и можно видеть, как и в случае преобразования (1) параграфа II, что это чисто рациональное преобразование.

Следовательно, наша кривая четвертого порядка эквивалентна некоторой кубической кривой.

Обратно, рассмотрим какую-либо кривую четвертого порядка и *предположим, что она эквивалентна некоторой кубической кривой. Я утверждаю, что она содержит, по крайней мере, одну рациональную точку.*

Действительно, пусть u—эллиптический аргумент некоторой точки на нашей кривой; эллиптический аргумент соответствующей точки на кубической кривой равен $u+k$, где k — константа. Если три точки кубической кривой лежат на рациональной прямой, то три соответствующие точки нашей кривой с эллиптическими аргументами α, β, γ образуют рациональную группу и выполняется равенство

$$\alpha+\beta+\gamma=-3k.$$

Через эти три точки и две двойные точки можно провести рациональное коническое сечение, пересекающее нашу кривую в другой точке, которая в силу своей простоты обязана быть рациональной. Эта рациональная точка имеет аргумент $-\alpha-\beta-\gamma$, т. е. $3k$.

Кубическая кривая (эквивалентная некоторой кривой четвертого порядка) должна также содержать рациональную точку. Действительно, через двойные точки кривой четвертого порядка я провожу рациональное коническое сечение, которое пересекает эту кривую в четырех простых точках. Четыре соответствующие точки на кубической кривой образуют рациональную группу. Через четыре точки этой группы можно провести бесконечно много рациональных конических сечений, пересекающих кубическую кривую в двух других точках. Эти две точки образуют рациональную пару. Соединив две точки одной из этих рациональных пар, получим рациональную прямую, пересекающую кубическую кривую в третьей рациональной точке.

Обратно, *если некоторая кубическая кривая содержит рациональную точку P, то она эквивалентна кривой четвертого порядка.* Действительно, рассмотрим в пространстве произвольную рациональную точку S и примем ее за вершину конуса третьего порядка C, направляющей которого служит наша кривая третьего порядка. Через точку P проведем какую-нибудь рациональную прямую, которая пересечет кубическую кривую в двух точках M и M_1, образующих рациональную пару. Через прямые SM и SM_1 можно провести рациональную поверхность второго порядка. Полное пересечение этой поверхности и конуса, имея шестую степень, распадается на две прямые SM и SM_1 и рациональную пространственную кривую четвертого порядка. Проекция этой кривой четвертого порядка на произвольную рациональную плоскость представляет собой плоскую рациональную кривую четвертого порядка.

Окончательно.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы некоторая рациональная кривая четвертого порядка была эквивалентна кубической кривой, является принадлежность к нашей кривой рациональной точки.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы некоторая рациональная кубическая кривая была эквивалентна кривой четвертого порядка, является принадлежность к нашей кривой рациональной точки.

Пусть $f=0$ — плоская кривая рода 1 и степени m. При каком условии она будет эквивалентна кривой степени p с уравнением $f_1=0$?

Необходимо, прежде всего, чтобы кривая $f=0$ содержала рациональную группу из p точек.

Действительно, если мы пересечем произвольной рациональной прямой образ $f_1=0$, то эта прямая пересечет его в p точках, образующих рациональную группу. Соответствующие точки на кривой $f=0$ также образуют рациональную группу.

Это условие является достаточным. Через рациональную группу из p точек и через двойные точки можно провести бесконечно много кривых степени $m-3+k$ с общим уравнением

$$\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\ldots+\alpha_q\varphi_q+\theta f=0, \tag{2}$$

где $q=km-p$ и где α_i произвольны, φ_i — полиномы степени $m-3+k$ с рациональными коэффициентами, а θ — произвольный полином степени $k-3$ (член θf исчезает при $k<3$).

Эти кривые пересекают $f=0$ в $km-p$ подвижных точках. Если α_i — рациональные числа, то эти $km-p$ точек образуют рациональную группу.

Рассмотрим одну из таких рациональных групп, содержащую $km-p$ точек. Через эту группу и двойные точки можно провести бесконечно много кривых степени $m-3+k$ с общим уравнением

$$\alpha_1\psi_1+\alpha_2\psi_2+\ldots+\alpha_p\psi_p+\eta f=0,$$

где α_j произвольны, ψ_j — полиномы степени $m-3+k$ с рациональными коэффициентами, а η — произвольный полином степени $k-3$.

Они пересекают $f=0$ в p подвижных точках. Рассмотрим тогда преобразование

$$\frac{\xi_1}{\psi_1}=\frac{\xi_2}{\psi_2}=\frac{\xi_3}{\psi_3},$$

где ξ — однородные координаты точки на плоскости. В силу доказательства, оно всегда чисто рационально и переводит $f=0$ в кривую степени p [так как кривая (2) пересекает $f=0$ в p подвижных точках].

В этом доказательстве предполагалось:

1. Что $km>p$; для этого всегда можно выбрать k достаточно большим.

2. Что $p\geqslant 3$. Если $p=1$ или 2, то теорема, очевидно, неверна, так как не существует кривой рода 1 и степени 1 или 2.

Если имеется рациональная точка, то существует также рациональная группа из трех точек (а именно, группа, содержащая три точки, совпадающие между собой и с этой рациональной точкой). Следовательно, кривая эквивалентна кубической кривой. Таким же образом можно было бы доказать, что она эквивалентна кривой произвольной степени.

Если имеется рациональная пара, то существует также рациональная группа из четырех точек (а именно, группа, содержащая четыре точки,

совпадающие попарно и с двумя точками пары). Следовательно, кривая эквивалентна кривой произвольной *четной* степени *.

Если m нечетно и если имеется рациональная пара, то существует также и рациональная точка. В самом деле, через двойные точки и через рациональную группу, содержащую $m-1$ точек, совпадающих по $(m-1)/2$ штук между собой и с двумя точками пары, можно провести кривую степени $m-2$ и притом одну. Эта кривая рациональна. Она пересекает $f=0$ в другой точке, которая является простой и рациональной.

Окончательно.

Для того чтобы рациональная кривая рода 1 и степени m была эквивалентна некоторой кривой степени $p>3$, необходимо и достаточно, чтобы она обладала группой из p рациональных точек **.

Чтобы двигаться дальше, предположим, что кривая степени m и рода 1 содержит некоторое число рациональных групп; для определенности — три.

Пусть эти группы G_1, G_2, G_3 образованы соответственно из p_1, p_2 и p_3 точек. Тогда существует рациональная группа, состоящая из точек, число которых равно наибольшему общему делителю δ четырех целых величин

$$m,\ p_1,\ p_2,\ p_3.$$

Действительно, можно найти четыре положительных целых числа

$$K,\ h_1,\ h_2,\ h_3,$$

таких, что

$$Km-h_1p_1-h_2p_2-h_3p_3=\delta.$$

Тогда существует бесконечно много кривых степени

$$m-3+K,$$

проходящих через двойные точки и имеющих с $f=0$ касание порядка h_1-1 в точках группы G_1, порядка h_2-1 в точках группы G_2, порядка

---

* В этих рассуждениях, по-видимому, предполагается, что кривая содержит две различные двойные точки. Установленные свойства, однако, имеют место в общем случае; это следует из того, что сказано в примечании * на стр. 905. (*А. Ш.*).

** Можно дополнить эти результаты следующим образом: *для того чтобы плоская рациональная кривая рода 1 была эквивалентна кубической кривой с уравнением*

$$y^2=x^3+px+q \qquad (p,\ q \text{ рациональны}),$$

необходимо и достаточно, чтобы она содержала рациональную точку; для того чтобы она была эквивалентна кривой четвертого порядка с уравнением

$$y^2=x^4+ax^2+bx+c \qquad (a,\ b,\ c \text{ рациональны}),$$

необходимо и достаточно, чтобы на ней существовала рациональная пара. (*Ф. Ш.*).

h_3-1 в точках группы G_3. Среди этих кривых содержится бесконечно много рациональных.

Они пересекают $f=0$ в h_1p_1 точках, совпадающих с группой G_1, в h_2p_2 точках, совпадающих с группой G_2, в h_3p_3 точках, совпадающих с группой G_3, и в

$$Km-h_1p_1-h_2p_2-h_3p_3=\delta$$

других точках, которые тоже образуют рациональную группу.

Пусть тогда δ — самое маленькое число, такое что на $f=0$ существует рациональная группа из δ точек. В силу сказанного выше получаем.

1. Степень m есть кратное этого характеристического числа δ.

2. То же самое верно и для степени любых кривых, эквивалентных $f=0$.

3. Это же верно и для числа точек произвольной рациональной группы, принадлежащей $f=0$.

Таким образом, это характеристическое число δ является одним из наиболее важных элементов классификации рациональных кривых 1-го рода *.

Мне осталось упомянуть об одной детали.

Рассмотрим пространственную кривую четвертого порядка, эквивалентную кубической кривой. Например, кубическая кривая является перспективой этой кривой четвертого порядка, если за центр перспективы взять точку S кривой четвертого порядка.

В силу вышеизложенного, точка S должна быть рациональной. Пусть α — ее эллиптический аргумент на кривой четвертого порядка и

$$\alpha'=\alpha+k$$

— ее аргумент на кубической кривой. Пусть, с другой стороны,

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_9$$

— аргументы других рациональных фундаментальных точек на кривой четвертого порядка и

$$\alpha'_i=\alpha_i+k \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ 9)$$

— их аргументы на кубической кривой.

Мы видели, что аргументы рациональных точек на кривой четвертого порядка задаются формулой

$$\beta=\alpha+4n\alpha+\sum p_i(\alpha_i-\alpha),$$

а на кубической кривой—формулой

$$\beta'=\alpha'+3n\alpha'+\sum p_i(\alpha'_i-\alpha').$$

* Было бы интересно для данного m определить те значения, которые может принимать δ. Возможно, что это все делители m; так обстоит дело для $m=3$ и, похоже, для $m=4$. (*А. Н.*).

Надо показать, что эти две формулы согласуются, т. е. что

$$\beta' = \beta + k.$$

А это очевидно, если заметить, что

$$3k = \alpha, \quad \alpha_i - \alpha = \alpha'_i - \alpha', \quad 3\alpha' = 4\alpha.$$

V. Исследование некоторых преобразований

Пусть α — аргумент произвольной рациональной точки на кубической кривой; преобразование, переводящее точку с аргументом u в точку с аргументом $-\alpha-u$, является, очевидно (три точки α, u, $-\alpha-u$ лежат на одной прямой), *чисто рациональным преобразованием*, переводящим нашу кривую в себя.

Если α и β — аргументы двух рациональных точек, то преобразования

$$(u, \ -\alpha-u),$$
$$(u, \ -\beta-u)$$

будут чисто рациональными, так же как и композиция этих преобразований

$$(u, \ \beta-\alpha+u).$$

Притом, если α рационально, то рационально и -2α, откуда следует, что преобразование $(u, 3\alpha+u)$ чисто рационально.

Изучим более тщательно эти преобразования $(u, \ \beta-\alpha+u)$.

Если x, y, z — координаты точки с аргументом u, а ξ, η, ζ — координаты образа этой точки, имеющего аргумент $\beta-\alpha+u$, то преобразование должно задаваться формулой

$$\frac{\xi}{X} = \frac{\eta}{Y} = \frac{\zeta}{Z}, \tag{1}$$

где X, Y, Z — целые полиномы относительно x, y, z с рациональными коэффициентами.

Как построить эти полиномы?

Прямая $x=0$ пересекает нашу кривую в трех точках $M_1M_2M_3$ с аргументами γ_1, γ_2, γ_3. Рассмотрим образы этих трех точек при преобразовании, обратном к (1); их аргументы равны

$$\alpha-\beta+\gamma_1, \quad \alpha-\beta+\gamma_2, \quad \alpha-\beta+\gamma_3;$$

я обозначу эти точки через M'_1, M'_2, M'_3.

Имеем

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим сначала три точки P_1, P_2, P_3 с аргументами ε_1, ε_2, ε_3, подчиненными единственному условию

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=3\beta-3\alpha. \tag{3}$$

Эти три точки можно выбрать так, чтобы они образовывали рациональную группу.

Шесть точек M_1', M_2', M_3', P_1, P_2, P_3 лежат, в силу (2) и (3), на одном и том же коническом сечении, и это коническое сечение рационально. Пусть

$$X_1=0$$

— его уравнение; я предполагаю далее, что коэффициенты X_1 целые и взаимно простые.

С другой стороны, прямая $y=0$ пересекает нашу кривую в трех точках N_1, N_2, N_3, образами которых будут N_1', N_2', N_3'. Шесть точек N_1', N_2', N_3', P_1, P_2, P_3 лежат на одном и том же рациональном коническом сечении с уравнением

$$Y_1=0,$$

коэффициенты Y_1 целые и взаимно простые.

Аналогично, прямая $z=0$ пересекает нашу кривую в трех точках Q_1, Q_2, Q_3, чьими образами являются Q_1', Q_2', Q_3'. Шесть точек Q_1', Q_2', Q_3', P_1, P_2, P_3 лежат на одном и том же рациональном коническом сечении с уравнением

$$Z_1=0;$$

коэффициенты Z_1 целые и взаимно простые.

Рассмотрим тогда функцию

$$\frac{XY_1}{YX_1}.$$

Это дважды периодическая функция эллиптического аргумента точки x, y, z; она не может обращаться в бесконечность, так как знаменатель обращается в нуль только одновременно с числителем. Следовательно, она представляет собой константу; по той же причине

$$\frac{XZ_1}{ZX_1}$$

есть константа *. Таким образом, можно положить

$$X=aX_1,\quad Y=bY_1,\quad Z=cZ_1,$$

где a, b, c — три целых взаимно простых числа.

* Это рассуждение, многократно повторяющееся далее, неудовлетворительно. Следовало бы показать, что кратности соответствующих нулей и в числителе, и в знаменателе одинаковы. (*А. Н.*).

Преобразование (1) тоже можно записать в таком виде, чтобы X, Y, Z были полиномами второго порядка.

Это снова можно сделать бесконечно многими способами, так как три точки P_1, P_2, P_3 удовлетворяют только одному соотношению.

Пусть X', Y', Z' — три полинома второго порядка, полученные тем же способом, что и X, Y, Z, но вместо трех точек P_1, P_2, P_3 взяты три другие точки P'_1, P'_2, P'_3, удовлетворяющие, как и первые, условию (3). Преобразование

$$\frac{\xi}{X'}=\frac{\eta}{Y'}=\frac{\zeta}{Z'} \tag{1'}$$

то же самое, что и преобразование (1); этим я хочу сказать, что точка кривой $f=0$ имеет один и тот же образ при любом из этих двух преобразований. Преобразования (1) и (1') можно было бы применить к произвольной точке плоскости, но тогда они не обязаны были бы совпадать.

Отсюда следует, что три полинома четвертой степени

$$YZ'-ZY'; \quad ZX'-XZ'; \quad XY'-YX'$$

делятся на f.

Важно отметить, что преобразование (1) есть *кремоново преобразование*; другими словами, отношения x/z, y/z можно выразить с помощью рациональных функций от ξ, η, ζ даже тогда, когда точка x, y, z не лежит на нашей кривой. Действительно, два конических сечения

$$\alpha X+\beta Y+\gamma Z=0, \quad \alpha' X+\beta' Y+\gamma' Z=0$$

пересекаются только в одной подвижной точке, не считая трех фиксированных точек P_1, P_2, P_3.

Эти три фиксированные точки представляют собой *базисные точки* преобразования.

Если разрешить уравнения (1), то получим

$$\frac{x}{X_0(\xi,\eta,\zeta)}=\frac{y}{Y_0(\xi,\eta,\zeta)}=\frac{z}{Z_0(\xi,\eta,\zeta)}, \tag{4}$$

где X_0, Y_0, Z_0 — полиномы второго порядка. Преобразование (4) является, таким образом, обратным к (1).

Каковы базисные точки этого обратного преобразования?

Я напомню, что при квадратичном кремоновом преобразовании всякая прямая, проходящая через базисную точку этого преобразования, переходит в прямую, проходящую через базисную точку обратного преобразования.

Итак, пусть прямая D проходит через точку P; она пересекает нашу кривую в двух других точках H_1 и H_2. Сумма аргументов этих двух точек есть константа, равная $-\varepsilon_1$.

Пусть H'_1 и H'_2 — образы H_1 и H_2; сумма их аргументов есть константа, равная

$$2(\beta-\alpha)-\varepsilon_1.$$

Прямая $H'_1H'_2$, образ D, пересекает нашу кривую в третьей точке R_1 с аргументом

$$\varepsilon_1-2(\beta-\alpha).$$

Поскольку это число постоянно, точка R_1 остается неподвижной, когда прямая D вращается вокруг P_1. Следовательно, R_1 — базисная точка (4). Две другие точки R_2 и R_3 имеют аргументы

$$\varepsilon_2-2(\beta-\alpha),$$
$$\varepsilon_3-2(\beta-\alpha).$$

Таким образом, три базисные точки (4) снова лежат на нашей кривой, и сумма их аргументов равна

$$3\alpha-3\beta.$$

Значит, если мы рассмотрим три точки R_1, R_2, R_3, то их образы, которые я обозначу Q_1, Q_2, Q_3, лежат на прямой, а образы их образов совпадают с тремя точками P_1, P_2 и P_3.

Рассмотрим теперь выражение

$$f(X,\ Y,\ Z);$$

это полином шестой степени относительно x, y, z. Так как преобразование не меняет кривой $f=0$, то имеем тождество

$$f(X,\ Y,\ Z)=f(x,\ y,\ z)\,\eta(x,\ y,\ z), \tag{5}$$

где η — полином третьей степени.

Поскольку три базисные точки P_1, P_2, P_3 должны быть тройными точками кривой шестого порядка

$$f(X,\ Y,\ Z)=0$$

и поскольку они являются простыми точками кубической кривой

$$f(x,\ y,\ z)=0,$$

то они представляют собой двойные точки кубической кривой $\eta=0$, откуда следует, что эта кубическая кривая распадается на три прямые, являющиеся сторонами треугольника $P_1\ P_2\ P_3$.

С другой стороны, в силу того, что преобразования (1) и (4) взаимно обратны, имеем

$$\frac{X_0(X,\ Y,\ Z)}{x}=\frac{Y_0(X,\ Y,\ Z)}{y}=\frac{Z_0(X,\ Y,\ Z)}{z}=\eta',$$

где

$$X_0(X,\ Y,\ Z)=x\eta',$$
$$Y_0(X,\ Y,\ Z)=y\eta', \qquad (6)$$
$$Z_0(X,\ Y,\ Z)=z\eta'.$$

Так как левые части представляют собой полиномы четвертой степени, то η' — полином третьей степени. Поскольку три базисные точки будут двойными для кривых четвертого порядка

$$X_0(X,\ Y,\ Z)=0, \qquad Y_0=0, \quad Z_0=0,$$

то они будут также двойными точками для кубической кривой $\eta'=0$. Таким образом, эта кубическая кривая распадается на три прямые, образующие три стороны треугольника $P_1P_2P_3$.

Значит, два полинома η и η' могут отличаться только постоянным множителем.

Полином η разложим *с алгебраической точки зрения* на три линейных множителя, но это разложение не всегда будет возможно с арифметической точки зрения. Оно возможно, если три точки P_1, P_2 и P_3 рациональны. Ясно, что всегда можно выбрать эти точки [которые удовлетворяют только условию (3)] так, чтобы они были рациональны, причем бесконечно многими способами, полагая

$$\varepsilon_i=q_i(\beta-\alpha)+\alpha+3p_i\alpha \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

при условии

$$q_1+q_2+q_3=3, \qquad p_1+p_2+p_3=-1.$$

Это мы и будем предполагать в дальнейшем, если не оговорено противное.

Пусть x, y, z — три целых взаимно простых числа; X, Y, Z тоже целые. Нужно узнать, каков их наибольший общий делитель S.

Заметим, что

$$X_0(X,\ Y,\ Z),\ \ Y_0(X,\ Y,\ Z),\ \ Z_0(X,\ Y,\ Z)$$

делятся на S^2. Отсюда следует, что η' делится на S^2. А это уже замечание, которое поможет нам определить S.

Снова рассмотрим девять точек

$$P_i,\ \ Q_i,\ \ R_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Мы видели, что их аргументы равны

$$\varepsilon_i, \quad \varepsilon_i-(\beta-\alpha), \quad \varepsilon_i-2(\beta-\alpha)$$

при условии, что

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=3(\beta-\alpha).$$

Отсюда немедленно следует, что эти девять точек лежат по три на семи прямых, а именно:

$$Q_1Q_2Q_3,\quad P_1Q_2R_3,\quad P_3Q_2R_1,\quad Q_1R_2P_3,\quad P_1R_2Q_3,\quad Q_1P_2R_3,\quad R_1P_2Q_3.$$

Кроме того, так как сумма аргументов девяти точек (так же как и сумма аргументов шести точек P_i и R_i) равна нулю, шесть точек P_i и R_i лежат на одном и том же коническом сечении C, а девять точек лежат на бесконечном множестве кривых третьего порядка.

Тогда видно, что шесть точек P_i и R_i представляют собой вершины шестиугольника Паскаля, вписанного в коническое сечение C, и что точки Q_1, Q_2, Q_3, расположенные на прямой линии, являются пересечениями трех пар противоположных сторон этого шестиугольника.

Рассмотрим кубические кривые, проходящие через эти девять точек; они образуют пучок. Одна из них — это наша кривая $f=0$. Другая распадается на коническое сечение C, описанное около шестиугольника Паскаля, и прямую $Q_1Q_2Q_3$. Две из этих кубических кривых распадаются на три прямые. Для одной это будут

$$R_1Q_2P_3,\quad R_2Q_3P_1,\quad R_3Q_1P_2, \tag{7}$$

а для другой

$$R_1Q_3P_2,\quad R_2Q_1P_3,\quad R_3Q_2P_1. \tag{8}$$

Наше преобразование переводит кубическую кривую f в себя, оно переводит коническое сечение C в прямую $Q_1Q_2Q_3$ и обратно; оно переводит друг в друга прямые (7) так же, как и прямые (8). Следовательно, имеются четыре кубические кривые пучка, для которых непосредственно видно, что они не меняются под действием нашего преобразования. Но это достаточно знать для двух из них, чтобы заключить, что это верно и для всех кубических кривых пучка.

Значит, все кубические кривые пучка не меняются под действием преобразования (1).

Если

$$f(x,\ y,\ z)=0,\qquad \varphi(x,\ y,\ z)=0$$

— уравнения двух из этих кубических кривых, то

$$f(X,\ Y,\ Z)=f(x,\ y,\ z)\,\eta,$$

$$\varphi(X,\ Y,\ Z)=\varphi(x,\ y,\ z)\,a\eta,$$

где a — некоторая константа и, аналогично,

$$f(X,\ Y,\ Z)+\lambda\varphi(X,\ Y,\ Z)=[f(x,\ y,\ z)+\lambda\varphi(x,\ y,\ z)]\,b\eta,$$

где b — некоторая другая константа. А это возможно, только если $a=b=1$, откуда следует, что коэффициент η, который фигурирует в уравнении (5), один и тот же для всех кривых пучка.

Пусть теперь

$$D = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

— уравнение прямой $Q_1Q_2Q_3$; пусть

$$S(x, y, z) = 0$$

— уравнение конического сечения C; я предполагаю, что коэффициенты полинома D так же, как и полинома S, взаимно просты. Уравнение C можно равным образом задать одной из формул

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0, \quad \alpha X_0 + \beta Y_0 + \gamma Z_0 = 0,$$

так что тождественно

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = \theta S,$$

$$\alpha X_0 + \beta Y_0 + \gamma Z_0 = \theta_0 S,$$

где θ и θ_0 целые.

Мы находим далее

$$\theta_0 S(X, Y, Z) = \alpha X_0(X, Y, Z) + \beta Y_0(X, Y, Z) + \gamma Z_0(X, Y, Z) = D\eta$$

и, с другой стороны,

$$S(X, Y, Z)(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) = \eta S(x, y, z) D,$$

откуда

$$\theta_0 \eta SD = \theta \eta' SD$$

и, наконец, *

$$\theta_0 \eta = \theta \eta'.$$

VI. Подразделение классов на подклассы

Пусть C и C' — две эквивалентные кубические кривые. C можно перевести с C' с помощью некоторого чисто рационального преобразования T, которое, как мы сейчас увидим, будет, вообще говоря, квадратичным. Пусть

$$\frac{\xi}{X} = \frac{\eta}{Y} = \frac{\zeta}{Z} \tag{1}$$

---

* В этом разделе А. Пуанкаре изучает, в случае, когда кубическая кривая (рода 1) содержит две рациональные точки, некоторое преобразование этой кривой в себя. Это преобразование можно рассматривать как применение к кривой некоторого кремонова преобразования плоскости. Базисные точки этого преобразования и обратного к нему образуют шестиугольник, вписанный в коническое сечение, точки Паскаля которого лежат на кубической кривой. Изучение этого частного случая подготавливает почву для общих исследований следующего раздела. (*А. Ш.*).

— это преобразование, где X, Y, Z — целые полиномы с рациональными коэффициентами. Прямая $x=0$ пересекает кривую C' в трех точках M_1, M_2, M_3 с аргументами γ_1, γ_2, γ_3. Пусть M_1', M_2', M_3' — образы этих точек при преобразовании T^{-1}, обратном к T. Эти три точки лежат на кривой C и имеют аргументы

$$\gamma_1 - k, \quad \gamma_2 - k, \quad \gamma_3 - k; \quad (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0).$$

Через эти точки, образующие на C рациональную группу, и через две произвольные рациональные точки плоскости можно провести рациональное коническое сечение, которое пересечет C в трех других точках; я обозначу их через P_1, P_2, P_3. Они образуют рациональную группу, а их аргументы ε_1, ε_2, ε_3 связаны соотношением

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3k.$$

Пусть $X_1 = 0$ — уравнение этого конического сечения.

С другой стороны, прямая $y=0$ пересекает C' в трех точках N_1, N_2, N_3. Их образы при T^{-1}, обозначенные мною через N_1', N_2', N_3', имеют на C аргументы, сумма которых равна $-3k$ (по тем же причинам, что и сумма аргументов точек M_1', M_2', M_3').

Шесть точек N_1', N_2', N_3', P_1, P_2, P_3, сумма аргументов которых равна нулю, лежат на одном и том же коническом сечении. Оно рационально, поскольку эти шесть точек образуют две рациональные группы. Пусть $Y_1 = 0$ — уравнение этого конического сечения.

Наконец, прямая $z=0$ пересекает C' в трех точках, образы которых при преобразовании T^{-1} лежат вместе с точками P_1, P_2, P_3 на одном и том же рациональном коническом сечении с уравнением $Z_1 = 0$.

X_1, Y_1, Z_1 — полиномы второй степени с рациональными коэффициентами.

Можно показать, как и в предыдущем разделе, что дважды периодические функции

$$\frac{XY_1}{YX_1}, \quad \frac{XZ_1}{ZX_1}$$

сводятся к рациональным константам, которые, без ограничения общности, мы примем равными 1. Следовательно, можно взять

$$X = X_1, \quad Y = Y_1, \quad Z = Z_1.$$

Также можно всегда предполагать, что полиномы X, Y и Z имеют вторую степень и представляют собой левые части уравнений трех конических сечений, имеющих три общие точки. Преобразование T — это квадратичное кремоново преобразование с базисными точками P_1, P_2, P_3.

Если мы разрешим уравнения (1), то получим

$$\frac{x}{X_0(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{y}{Y_0(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{z}{Z_0(\xi, \eta, \zeta)}, \tag{2}$$

где X_0, Y_0, Z_0 — три полинома второй степени с рациональными коэффициентами.

Уравнения (2) определяют преобразование T^{-1}, обратное к T.

Каковы базисные точки этого преобразования?

Пусть D — произвольная прямая, проходящая через P_1; она пересекает C в двух других точках H_1 и H_2 с аргументами u и v, удовлетворяющими соотношению

$$u + v + \varepsilon_1 = 0.$$

Образы H'_1 и H'_2 этих двух точек лежат на C' и имеют аргументы, равные $u + k$ и $v + k$. Образ D представляет собой коническое сечение, распадающееся на две прямые. Одной из них является прямая R_2R_3, а вторая, $H'_1H'_2$, должна проходить через R_1.

Прямая $H'_1H'_2$ пересекает C' в третьей точке с аргументом $\varepsilon_1 - 2k$. Она остается неподвижной, когда прямая D вращается вокруг точки P_1; значит, это может быть только точка R_1.

Окончательно получаем, что три базисные точки преобразования (2) лежат на C' и имеют аргументы

$$\varepsilon_1 - 2k, \quad \varepsilon_2 - 2k, \quad \varepsilon_3 - 2k.$$

Заметим, что наше кремоново преобразование (1) переводит всякую кубическую кривую, проходящую через три точки P_1, P_2, P_3, в кубическую кривую, проходящую через три точки R_1, R_2, R_3.

Каково условие того, чтобы среди этих кубических кривых были кривые рода 1, совпадающие со своими собственными образами? В силу того, что мы видели в предыдущем параграфе, необходимо прежде всего, чтобы шесть базисных точек лежали на одном и том же коническом сечении. Если данное условие выполнено, то это коническое сечение переходит в прямую так, что образы Q_1, Q_2, Q_3 трех точек R_1, R_2, R_3 лежат на прямой.

Необходимо далее потребовать, чтобы эти три точки были точками пересечения противоположных сторон шестиугольника, построенного на точках P и R. Если это условие выполнено, то мы видели, что кубические кривые, проходящие через девять точек P, Q, R, не меняются под действием нашего преобразования.

Отсюда следует прежде всего, что если кубическая кривая C эквивалентна кубической кривой C' и так именно, что аргументы соответствующих точек отличаются на k, то на C содержится бесконечно много рациональных групп из трех точек, сумма аргументов которых равна $-3k$. Это те точки, образы которых лежат на рациональной прямой. На C поэтому

имеется бесконечно много рациональных групп из трех точек (я буду говорить рациональных *триплетов*), сумма аргументов которых равна $-3k$, как, например, триплет P_1, P_2, P_3.

Обратно, если существует триплет P_1, P_2, P_3, сумма аргументов которого равна $-3k$, то кубическая кривая C эквивалентна кубической кривой C', так что аргументы соответствующих точек отличаются от k на треть периода. Действительно, поскольку эти три точки образуют рациональную группу, то через них можно провести три рациональных конических сечения

$$X=0,\ Y=0,\ Z=0.$$

Кремоново преобразование

$$\frac{\xi}{X}=\frac{\eta}{Y}=\frac{\zeta}{Z}$$

переведет тогда C в другую кривую C', удовлетворяющую данному условию.

Если теперь существует триплет с суммой, равной $3k$, то существует бесконечно много триплетов с суммой $-3k$, так как через этот триплет можно провести бесконечно много рациональных конических сечений. Каждое из них пересечет нашу кривую в трех других точках, образующих рациональную группу с суммой $-3k$. Отсюда заключаем немедленно, что если имеется один триплет с суммой $3k$, то имеется бесконечно много таких триплетов.

Я утверждаю теперь, что если на C существует триплет с суммой $3k$, то существует бесконечно много триплетов с суммой $3nk$, где n — произвольное целое, положительное или отрицательное. Для этого, согласно предыдущему, достаточно установить, что если имеется триплет с суммой $3n'k$ и триплет с суммой $3n''k$, то имеется триплет с суммой $-3k\,(n'+n'')$ и, следовательно, еще один с суммой $3k\,(n'+n'')$.

Действительно, рассмотрим шесть точек, образующих два триплета с суммами $3n'k$ и $3n''k$. Через эти три точки и через три произвольные рациональные точки плоскости можно провести рациональную кубическую кривую. Эта кривая пересечет C в трех других точках, образующих рациональную группу с суммой аргументов $-3k\,(n'+n'')$.

Отсюда получаем следующий результат:

Если C эквивалентна кубической кривой C_1 так, что аргументы соответствующих точек на C и C_1 отличаются на k, то она эквивалентна бесконечному множеству других кубических кривых C_2, C_3, . . ., C_n, . . ., C_{-1}, C_{-2}, C_{-3}, . . . и так, что аргументы соответствующих точек на C и C_n отличаются на nk.

Затем встает следующий вопрос. Согласно нашим определениям, две кубические кривые эквивалентны или принадлежат к одному *классу*, если от одной из них можно перейти к другой с помощью *бирационального* преобразования с рациональными коэффициентами. Я скажу, что они принадлежат к одному *подклассу*, если от одной из них можно перейти

к другой с помощью *линейного* преобразования с рациональными (я не говорю с целыми) коэффициентами.

Тогда можно спросить себя, принадлежат ли все кубические кривые C_n, которые я только что определил, к различным подклассам. Хотя от C можно перейти к C_n с помощью квадратичного преобразования так, чтобы аргументы соответствующих точек отличались на nk, это еще не является основанием для заключения, что равным образом можно перейти от C к C_n с помощью линейного преобразования и, например, так, чтобы аргументы соответствующих точек были равны.

Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы C переводилась в себя с помощью квадратичного преобразования, при котором разность соответствующих аргументов равнялась бы nk.

Но я утверждаю, что C не изменяется при рациональном квадратичном преобразовании, которое переводит точку с аргументом u в точку с аргументом $u+3k$. Другими словами, я утверждаю, что координаты точки $u+3k$ являются рациональными функциями координат точки u или, если угодно, что координаты точки $u+3k$ становятся рациональными *после присоединения координат точки* u *к области рациональности.*

Действительно, пусть ε_1, ε_2, ε_3 — аргументы точек C, образующих триплет с суммой $-3k$. Через точку u и через произвольную рациональную точку плоскости я провожу прямую, которая пересекает C в двух других точках с аргументами v и w такими, что

$$u+v+w=0.$$

Две точки v и w образуют рациональную пару *после присоединения координат точки* u.

Через пять точек ε_1, ε_2, ε_3, v и w можно провести коническое сечение, которое будет рациональным *после присоединения координат* u; это коническое сечение пересечет C в шестой точке, которая будет рациональной после присоединения координат u и которая имеет аргумент $u+3k$.

Аналогично, кубические кривые C и C_3 или, более общо, кубические кривые C_n и C_{n+3} принадлежат к одному подклассу. Следовательно, кривые C_n разделяются не более чем на три подкласса.

Для того чтобы двигаться дальше, мы должны различать два случая: первый, когда на кривой C есть рациональная точка. Тогда, если α — аргумент этой точки и если кривая C не меняется под действием чисто рационального преобразования, такого, что аргументы соответствующих точек отличаются на $3k$, то точка с аргументом $\alpha+3k$ также рациональна.

Я утверждаю, что на C имеется триплет с суммой аргументов $-3k$, так что она эквивалентна кубической кривой C_1, а разность аргументов соответствующих точек равна k. Действительно, я провожу через точку α произвольную рациональную прямую; она пересекает C в двух точках с аргументами β и γ, образующих рациональную пару, и таких, что

$$\alpha+\beta+\gamma=0.$$

Через две точки β и γ, через рациональную точку $\alpha+3k$ и через две произвольные рациональные точки плоскости я провожу коническое сечение, которое рационально; оно пересекает C в трех других точках, которые образуют рациональный триплет с суммой аргументов, равной

$$-\beta-\gamma-(\alpha+3k)=-3k.$$

Если теперь кривая C содержит рациональную точку, то все ее рациональные точки выражаются формулой

$$\alpha+2n\alpha+p_1(\alpha_1-\alpha)+p_2(\alpha_2-\alpha)+\ldots+p_q(\alpha_q-\alpha),$$

где $q+1$ — ранг нашей кривой.

Я предполагаю, кроме того, что ни одна из величин

$$3n\alpha+p_1(\alpha_1-\alpha)+p_2(\alpha_2-\alpha)+\ldots+p_n(\alpha_n-\alpha)$$

не является делителем периода, но что

$$\alpha_{n+1}-\alpha, \quad \alpha_{n+2}-\alpha, \quad \ldots, \quad \alpha_q-\alpha$$

— делители периода, так что при $s<q$

$$m_s(\alpha_s-\alpha)$$

есть период (m_s — целое).

Каково число подклассов того класса, к которому принадлежит C? Каково условие того, чтобы существовала кубическая кривая C_k, эквивалентная C, а разность аргументов равнялась k?

Необходимым и достаточным условием этого является требование того, чтобы существовало преобразование C в себя, при котором разность аргументов равнялась $3k$, т. е. чтобы

$$3k=3n\alpha+p_1(\alpha_1-\alpha)+p_2(\alpha_2-\alpha)+\ldots+p_q(\alpha_q-\alpha). \tag{3}$$

Кроме того, два значения k' и k'' числа k приводят к двум кривым $C_{k'}$ и $C_{k''}$, принадлежащим к одному и тому же подклассу, если *

$$k'-k''=3n\alpha+p_1(\alpha_1-\alpha)+p_2(\alpha_2-\alpha)+\ldots+p_q(\alpha_q-\alpha). \tag{4}$$

Уравнение (3) дает нам значения k; видно, что каждому значению правой части соответствуют девять различных значений k, отличающихся между собой на треть периода. Но важно отметить, что эти девять значений не приводят к кубическим кривым C_k, принадлежащим к разным под-

* Это, притом, единственный случай, когда можно перевести $C_{k'}$ в $C_{k''}$ линейным преобразованием *так, чтобы разность аргументов соответствующих точек была константой*; но может получиться также, что одна кубическая кривая переводится в другую линейными преобразованиями другой природы, которые мы назовем *несобственными*. Мы вернемся к этому вопросу дальше.

классам. Действительно, аргумент точки на C_k определен тем условием, что сумма аргументов трех точек, лежащих на прямой, равна нулю (или, точнее, периоду). Но это условие, очевидно, определяет аргумент с точностью до трети периода.

Каждой системе целых чисел

$$n,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_q$$

соответствует, таким образом, некоторая кубическая кривая C_k. Но если две подобные системы целых чисел отличаются только на числа, кратные трем, то соответствующие кубические кривые принадлежат одному и тому же подклассу. Если правая часть (3) или (4) не может быть делителем периода, то число подклассов не превосходит 3^{q+1}.

Но если, например $m_q\,(\alpha_q-\alpha)$ — период, а целое число m_q не делится на 3, то можно взять две системы целых чисел

$$n',\ p_1',\ p_2',\ \ldots,\ p_q',$$
$$n'',\ p_1'',\ p_2'',\ \ldots,\ p_q''$$

так, чтобы каждое число первой системы было равно соответствующему числу второй системы, за исключением чисел p_q' и p_q''.

Тогда, если k' и k'' — значения соответствующих k, то

$$k'-k''=\frac{p_q'-p_q''}{3}(a_q-\alpha).$$

Можно взять

$$\alpha_q-\alpha=\frac{\omega}{m_q}$$

и положить

$$p_q'-p_q''=3\mu+m_q\nu$$

(где μ и ν целые), откуда

$$k'-k''=\frac{\mu\omega}{m_q}+\frac{\nu\omega}{3}=(\alpha_q-\alpha)+\frac{1}{3}\ \text{периода}.$$

Две кривые $C_{k'}$ и $C_{k''}$ будут снова принадлежать к одному подклассу.

Следовательно, для того чтобы две кубические кривые принадлежали к одному и тому же подклассу, достаточно, чтобы две соответствующие системы целых чисел отличались только на кратные трем, за исключением тех чисел этих двух систем, которые соответствуют разностям $\alpha_s-\alpha$, являющимся m_s-ми долями некоторого периода, где целые m_s не делятся на три.

Значит, если имеется q' чисел m_s, не делящихся на три, то класс распадается не более чем на $3^{q+1-q'}$ подклассов.

Рассмотрим, например, кривую

$$x^3+y^3+z^3=0.$$

В силу теоремы Ферма, она имеет только три рациональные точки перегиба, лежащие на прямой линии

$$x = y + z = 0, \quad \arg 0,$$

$$y = x + z = 0, \quad \arg \frac{\omega}{3},$$

$$z = x + y = 0, \quad \arg \frac{2\omega}{3}.$$

Следовательно, имеется не более трех различных подклассов, соответствующих значениям k

$$k = 0, \quad k = \frac{\omega}{9}, \quad k = \frac{2\omega}{9}.$$

Если мы совершим преобразование

$$\frac{\xi}{x^2 - zx + z^2 - y^2} = \frac{\eta}{xy} = \frac{\zeta}{y(y+z)},$$

базисными точками которого будут три точки перегиба, не лежащие на одной прямой

$$x = y + z = 0, \quad y^2 = x^2 - zx + z^2 = 0,$$

и для которого обратным преобразованием будет

$$\frac{x}{\eta(2\zeta - \eta + \xi)} = \frac{y}{\eta^2 - \eta\zeta + \zeta^2} = \frac{z}{\zeta^2 + \xi\zeta - \eta^2},$$

то наша кривая преобразуется в кривую

$$\eta^3 + \zeta^3 + \xi(\zeta^2 - 2\eta^2 + 2\eta\xi) + \xi^2(\eta + \zeta) = 0,$$

принадлежащую ко второму подклассу; ей принадлежат три рациональные точки

$$\eta = \zeta = 0, \qquad \zeta = \xi - \eta = 0, \qquad \xi = \eta + \zeta = 0,$$

соответствующие рациональным точкам данной кривой. Легко показать, что каждая из них лежит на касательной, проведенной к кривой в одной из двух других точек, их аргументы равны соответственно

$$\frac{\omega}{9}, \quad \frac{4\omega}{9}, \quad \frac{7\omega}{9}.$$

Если мы хотим теперь построить кубическую кривую, эквивалентную заданной, и так, чтобы точке с аргументом u соответствовала точка с аргументом $u + 2\omega/9$, то достаточно в этих преобразованиях поменять роль букв y и z. Ясно, что мы придем этим путем к такому же образу кривой.

Мы имеем, следовательно, только два подкласса, и число подклассов не достигает максимума, указанного предыдущим анализом, который равнялся бы трем. Это происходит от того, что C переводится в себя одним из тех *несобственных линейных преобразований*, о которых я упомянул выше и к которым я сейчас возвращаюсь.

Предположим, что кубическая кривая C переходит в другую кубическую кривую C' при бирациональном преобразовании, коэффициенты которого не предполагаются рациональными.

Пусть u — аргумент точки M на C, а u' — аргумент соответствующей точки M' на C'. Можно всегда предполагать, что эти аргументы определены так, чтобы периоды для этих двух кривых были одинаковы.

Если это выполнено, то ясно, что u и u' должны быть связаны линейным соотношением

$$u' = su + k$$

и что это соотношение должно быть таким, чтобы u' увеличивался на период, когда u увеличивается на период, и обратно.

Это можно осуществить тремя способами:

1. $s=1$, при этом периоды могут быть произвольными. Я скажу тогда, что преобразование *собственное*.

2. $s=-1$, при этом периоды могут быть произвольными. Я скажу тогда, что это *общее несобственное преобразование*.

3. s и периоды имеют надлежащие значения. Я скажу тогда, что это *специальное несобственное преобразование*.

Таких преобразований существует три сорта:

1) $s=\pm i$, отношение периодов $=i$ (четверичное преобразование);

2) $s=e^{\pm 2i\pi/3}$, отношение периодов $=s$ (троичное преобразование);

3) $s=e^{\pm i\pi/3}$, отношение периодов $=s$ (шестеричное преобразование).

Для того чтобы наше преобразование было линейным, необходимо и достаточно, чтобы три точки, лежащие на прямой до преобразования, оставались на прямой после преобразования; т. е. для того чтобы

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

влекло за собой

$$u_1' + u_2' + u_3' = 0,$$

$$u_1' = su_1 + k, \qquad u_2' = su_2 + k, \qquad u_3' = su_3 + k,$$

необходимо и достаточно, чтобы k равнялось трети периода.

Самыми интересными из этих преобразований являются те, которые переводят C в себя. Каковы условия того, чтобы эти преобразования были чисто рациональными, т. е. чтобы их коэффициенты были рациональными?

Я не буду возвращаться к собственным преобразованиям. Начнем с общих несобственных преобразований. Для того чтобы преобразование $(u, -u+k)$ было рациональным, т. е. чтобы координаты точки $-u+k$

были рациональными функциями координат точки u, необходимо и достаточно, чтобы аргумент $-k$ был рационален, так как три точки u, $-u+k$ и k лежат на прямой.

Пусть теперь $s=i$ и предположим сначала, что преобразование линейно; мы можем положить $k=0$. Каково условие того, чтобы преобразование (u, iu) было рациональным?

Неподвижные точки этого преобразования задаются равенством

$$u=iu+m\omega+n\omega',$$

где ω и ω' — периоды; но, поскольку отношение этих периодов равно i, можно записать уравнение

$$u=iu+\omega(m+ni) \quad (m \text{ и } n \text{ целые}),$$

которое имеет два различных решения

$$u=0; \qquad u=\frac{\omega}{2}(1+i).$$

Значит, эти две точки должны образовывать рациональную пару, если преобразование рационально. Но так как первая из них есть точка перегиба, а для второй это не имеет места, то эти две точки должны быть рациональны. Если к тому же, вторая из этих точек рациональна, то первая рациональна с необходимостью, так как касательная во второй точке проходит через первую.

Пусть тогда A — точка $u=0$; B — точка $\frac{\omega}{2}(1+i)$; C и D — точки $\frac{\omega}{2}$ и $i\frac{\omega}{2}$ (так, чтобы три точки B, C, D лежали на одной прямой). Пусть M — произвольная точка u и M' — ее образ iu. Ангармоническое отношение четырех прямых BA, BC, BM, BM', равное константе, являлось бы рациональным, если бы преобразование было рационально. Но ведь оно равно i; значит, преобразование не может быть рациональным.

Следовательно, не существует четверичного рационального и линейного преобразования, переводящего кубическую кривую в себя. Перейдем к троичным преобразованиям.

Пусть (u, su) — троичное линейное преобразование; так как периоды равны ω и $s\omega$, то неподвижные точки преобразования задаются уравнением

$$u=su+\omega(m+ns),$$

которое имеет три различных решения

$$u=0, \qquad u=\frac{\omega}{3}(2+s), \qquad u=\frac{\omega}{3}(1+2s).$$

Эти три неподвижные точки лежат на прямой и являются точками перегиба. Они должны образовывать рациональную группу, если преобразо-

вание рационально, откуда вытекает, что прямая, их соединяющая, рациональна. Пусть D — эта прямая.

Пусть M — произвольная точка u, M' и M'' — два ее последовательных образа su и s^2u. Эти три точки лежат на прямой, и все прямые $MM'M''$ пересекаются в одной точке (полюс прямой D относительно кубической кривой), которая обязана быть рациональной, если преобразование рационально.

В этих предположениях ангармоническое отношение точки A, точек M, M' и пересечения MM' с D, отношение, равное константе, являлось бы рациональным, если бы преобразование было рационально. Но ведь оно равно s.

Значит, не существует троичных линейных и рациональных преобразований кубической кривой в себя (а стало быть, и шестеричных преобразований).

Окончательно получаем, что *не существует преобразования кубической кривой в себя, которое являлось бы одновременно специальным несобственным, линейным и рациональным.*

Правду говоря, предыдущее доказательство не полно, так как оно применимо только к случаю, когда $k=0$ и когда для того, чтобы преобразование было линейным, достаточно, чтобы k равнялось трети периода. Но мы сейчас сможем доказать результат в случае произвольного k, т. е. не только для тех линейных преобразований, где k является третью периода, не равняясь нулю, но также для произвольных бирациональных преобразований.

Пусть $(u,\ iu+k)$ — четверичное преобразование C в себя. Неподвижными точками являются

$$\frac{k}{2}(1+i), \qquad \frac{k+\omega}{2}(1+i),$$

и они образуют рациональную пару; отсюда следует, что точка

$$-\left(k+\frac{\omega}{2}\right)(1+i),$$

лежащая на прямой вместе с двумя первыми, сама рациональна. Я назову эти три точки A, A' и B.

Квадрат данного преобразования есть общее несобственное преобразование $(u,\ -u+k+ki)$, и если оно рационально, то точка

$$-k(1+i),$$

которую я назову C, сама рациональна.

Пусть M — произвольная точка u и M' — ее образ $iu+k$. Прямая MB пересекает кубическую кривую в третьей точке M_1, а прямая $M'B$ пересекает кривую в третьей точке M_1', являющейся образом M_1.

Прямые MB и $M'B$ образуют, следовательно, гомографический пучок, неподвижными прямыми которого являются рациональная прямая $AA'B$ и прямая BD, соединяющая точку B с двумя точками

$$\frac{k}{2}(1+i)+\frac{\omega}{2}, \qquad \frac{k}{2}(1+i)+\frac{\omega i}{2},$$

которые являются образами одна другой и образуют рациональную пару. Эта прямая тоже должна быть рациональной.

Постоянное ангармоническое отношение четырех прямых BA, BD, BM, BM' являлось бы рациональным, если бы преобразование было рационально. Но оно равно i; значит, наше преобразование не может быть рациональным.

Рассмотрим теперь троичное преобразование $(u,\ su+k)$; аргументы трех неподвижных точек этого преобразования равны

$$\frac{k}{1-s}, \qquad \frac{k}{1-s}+\frac{\omega}{3}(2+s), \qquad \frac{k}{1-s}+\frac{\omega}{3}(2s+1).$$

Сумма аргументов равна с точностью до периода $k(2+s)$, и эти точки образуют рациональный триплет. Пусть A, A', A'' — эти три точки.

Через рациональный триплет можно провести рациональное коническое сечение, которое я назову K и которое пересечет кубическую кривую в точках другого рационального триплета. Я назову его T; сумма аргументов этого триплета равна $-k(2+s)$.

Пусть далее M — точка u, M' и M'' — два ее последовательных образа с аргументами

$$su+k, \qquad s^2u+k(1+s).$$

Так как сумма этих трех аргументов равна $k(2+s)$, три точки M, M', M'' и триплет T лежат на одном коническом сечении, которое я назову H.

Пусть D — пересечение H и K.

Сразу видно, что через одну точку кривой проходит единственное коническое сечение H, так что эти конические сечения проходят через четыре фиксированные точки; три из этих точек образуют триплет T; четвертая, которую я назову E, лежит вне кривой. Поскольку она простая, то она будет рациональной.

Ангармоническое отношение четырех точек E, D, M, M' на коническом сечении H постоянно. Если бы преобразование было рациональным, то это отношение являлось бы рациональным. Но оно равно s.

Значит, не может существовать ни троичных рациональных преобразований, ни, следовательно, шестеричных.

Окончательно получаем: *преобразование кубической кривой в себя не может быть одновременно специальным несобственным и рациональным.*

Если бирациональное преобразование T переводит одну кубическую кривую C в другую кубическую кривую C', то мы обозначим через u

эллиптический аргумент точки M на C и через u' — аргумент ее образа M' на C'. Мы можем всегда предполагать, что

$$du' = du,$$

так как если du — абелев дифференциал первого рода на C, то такой же дифференциал есть и на C'. Значит, u' и u отличаются только на константу k

$$u' = u + k.$$

Мы будем всегда считать u' определенным так, чтобы сумма аргументов трех точек, лежащих на прямой, равнялась нулю; это определяет k с точностью до периода.

Предположим, что коэффициенты T рациональны и что другое преобразование T_1 с рациональными коэффициентами переводит C в другую кубическую кривую C_1'. Пусть M_1' — образ M на C_1' и u_1' — его аргумент на C_1':

$$u_1' = u + k_1.$$

Две кривые C' и C_1' принадлежат к одному классу; в каких случаях они будут принадлежать к одному подклассу, т. е. в каких случаях C_1' можно перевести в C' линейным преобразованием L с рациональными коэффициентами?

Пусть N — образ M_1' при преобразовании L; N лежит на C' и пусть v — его аргумент. Я не могу более утверждать, что $dv = du_1' = du$, так как эллиптические аргументы точек на C' уже определены и поскольку я использовал произвол, участвующий в этом определении.

Преобразование

$$T^{-1}T_1L$$

чисто рационально; оно переводит C' в себя и M' в N; *отсюда следует, как мы только что видели, что оно не может быть специальным несобственным преобразованием*. Значит, оно является собственным или общим несобственным, т. е.

$$v = u' + \varepsilon \quad \text{или} \quad v = -u' + \varepsilon,$$

где ε — константа.

Какие значения может принимать ε?

1. Для собственных преобразований этими значениями будут

$$\varepsilon = 3n\alpha + p_1(\alpha_1 - \alpha) + p_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p_q(\alpha_q - \alpha).$$

2. Для общих несобственных преобразований ими будут

$$\varepsilon = -(3n+1)\alpha + p_1(\alpha_1 - \alpha) + p_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p_q(\alpha_q - \alpha) - k$$

(так как точка $-\varepsilon$ должна быть рациональной на C' и, следовательно точка $-\varepsilon - k$ — на C).

Рассмотрим три точки на C; пусть $\sum u$ — сумма их аргументов; рассмотрим также их образы при T на C', сумма аргументов которых равна $\sum u'$, их образы при T_1 на C'_1, сумма аргументов которых равна $\sum u'_1$; и, наконец, образы этого последнего триплета при L; эти образы образуют триплет на C', и сумма его аргументов равна $\sum v$.

Поскольку преобразование L линейно, то, если один из этих двух последних триплетов лежит на прямой, это же верно и для другого, т. е. две суммы $\sum u'_1$ и $\sum v$ должны обращаться в нуль одновременно.

Но мы имеем

$$\sum u'_1 = \sum u' + 3k_1 - 3k$$

и, кроме того,

$$\sum v = \sum u' + 3\varepsilon,$$

если L собственное, и

$$\sum v = -\sum u' + 3\varepsilon,$$

если L несобственное

Следовательно, в первом случае

$$\sum v - \sum u'_1 = 3\varepsilon + 3k - 3k_1,$$

а во втором случае

$$\sum v + \sum u'_1 = 3\varepsilon + 3k_1 - 3k.$$

Значит, в первом случае должно получиться (4)

$$k_1 - k = 3n\alpha + p_1(\alpha_1 - \alpha) + p_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p_q(\alpha_q - \alpha),$$

а во втором —

$$k_1 - 2k = (3n+1)\alpha + p_1(\alpha_1 - \alpha) + p_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p_q(\alpha_q - \alpha), \qquad (4')$$

все это с точностью до трети периода.

Первое из этих соотношений является не чем иным, как соотношением (4), которое уже обсуждалось.

В силу равенства (3), k и k_1 должны выражаться формулами

$$k = 3n'\alpha + p'_1(\alpha_1 - \alpha) + p'_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p'_q(\alpha_q - \alpha),$$
$$k_1 = 3n''\alpha + p''_1(\alpha_1 - \alpha) + p''_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p''_q(\alpha_q - \alpha),$$

где каждое из чисел n', n'', p', p'' является третью целого. Мы уже видели, что соотношение (4) имеет место, если разности

$$n' - n'',\ p'_1 - p''_1, \ldots,\ p'_q - p''_q$$

являются целыми числами, за исключением разностей $p'_s - p''_s$, соответствующих целому числу m_s, не делящемуся на три.

В каком же теперь случае будет выполнено равенство (4′)? Необходимо, чтобы разности

$$n'' - 2n' - \frac{1}{3}, \quad p_1'' - 2p_1', \quad p_2'' - 2p_2', \ldots, \quad p_q'' - 2p_q'$$

были целыми числами.

Заметим, что мы можем всегда полагать $\alpha = 0$; достаточно взять

$$k = -\alpha \quad \left(n' = -\frac{1}{3}, \quad p_s' = 0\right);$$

тогда точке α на C соответствует точка $\alpha + k = 0$ на C'.

В других терминах, если кубическая кривая имеет рациональную точку, то существует кубическая кривая, содержащая рациональную точку перегиба.

Итак, пусть $\alpha = 0$, что избавляет нас от рассмотрения чисел n' и n''. Число p_h может тогда принимать два значения 0 и $^1/_3$; значения 1 и 0, например, не являются различными, так как их разность есть целое число; значения $^1/_3$ и $^2/_3$ не являются различными, так как разность

$$p'' - 2p' = \frac{1}{3} - 2\left(\frac{2}{3}\right)$$

равна целому числу.

Отсюда следует, что если α равно нулю и если q' целое, а m_s не делятся на 3, то класс содержит $2^{q-q'}$ подклассов*.

Нам остается исследовать случай, когда на кубической кривой C нет рациональной точки.

Тогда не существует рациональных несобственных преобразований кривой C в себя, но могут существовать собственные рациональные преобразования.

---

* Здесь нужно отметить, что в этом выражении, $2^{q-q'}$, q представляет собой ранг кубической кривой, тогда как в ранее найденном выражении $3^{q+1-q'}$ (стр. 932) ранг был равен $q+1$.

В исследованном выше (стр. 932) примере

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

ранг равен 1 (группа рациональных точек есть циклическая группа порядка 3), а q' равно нулю (трехкратное каждой рациональной точки есть нулевой элемент). Если в формуле (1) (стр. 911) выбрать

$$\alpha = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\omega}{3}, \quad \text{или} \quad \frac{2\omega}{3},$$

то надо также взять

$$\alpha_1 = \frac{\omega}{3}, \quad \text{или} \quad \frac{2\omega}{3}, \quad \text{или} \quad 0;$$

но в качестве значения ранга надо взять 1 (а не $2 = q+1$). Точное число подклассов равно 2. (*Ф. Ш.*).

Эти преобразования $(u, u+k)$ получаются по формуле

$$k = p_1\beta_1 + p_2\beta_2 + \ldots + p_q\beta_q, \tag{5}$$

где β — данные константы, а p — произвольные целые.

Если C эквивалентна другой кубической кривой C', так что образом точки u на C' является точка $u+k'$, то на C существует бесконечно много рациональных триплетов, сумма аргументов которых равна $-3k'$. Пусть T — один из этих триплетов.

Пересечем далее C произвольной рациональной прямой; три точки пересечения u_1, u_2, u_3 образуют рациональный триплет.

Через T, через u_1 и через произвольную рациональную точку плоскости я проведу коническое сечение K_1; пусть также K_2 — коническое сечение Tu_2A, а K_3 — коническое сечение Tu_3A. Каждое из конических сечений K_1. K_2, K_3 не будет рациональным, но их *ансамбль* рационален (произведение левых частей их уравнений есть полином с рациональными коэффициентами).

K_1 пересекает C в двух других точках v_1 и v_1'; K_2 и K_3 пересекают C в двух других парах точек v_2 и v_2', v_3 и v_3'. Эти шесть точек v и v' образуют рациональную группу, и ансамбль трех прямых v_1v_1', v_2v_2', v_3v_3' образует рациональную кубическую кривую, хотя каждая из этих трех прямых, взятая отдельно, не будет рациональной.

Прямая v_1v_1' пересекает C в третьей точке $u_1 - 3k'$. Прямая v_2v_2' пересекает C в точке $u_2 - 3k'$; прямая v_3v_3' пересекает C в точке $u_3 - 3k'$. Эти три точки образуют рациональный триплет.

Если мы соединим три точки одного рационального триплета с тремя точками другого рационального триплета, то получим девять прямых, которые пересекут C в девяти точках, образующих рациональную группу. Если мы поступим подобным образом с рациональными триплетами

$$(u_1, u_2, u_3), \qquad (u_1 - 3k', u_2 - 3k', u_3 - 3k'),$$

то шесть из этих девяти точек попарно совпадут, так что группа из девяти точек распадается на простой рациональный триплет и двойной рациональный триплет $(u_1 + 3k', u_2 + 3k', u_3 + 3k')$. (Так как полином девятой степени с рациональными коэффициентами, имеющий три двойных корня и три простых корня, представляет собой произведение полинома третьей степени с рациональными коэффициентами на квадрат другого полинома третьей степени с рациональными коэффициентами.)

Сделав это, можно, как и в разделе V, построить переводящее C в себя рациональное кремоново преобразование, базисными точками которого будут $u_1 + 3k'$, $u_2 + 3k'$, $u_3 + 3k'$, в то время как базисными точками обратного преобразования будут $u_1 - 3k'$, $u_2 - 3k'$, $u_3 - 3k'$.

По формуле (5) имеем

$$3k' = p_1\beta_1 + \ldots + p_q\beta_q.$$

Могут ли целые числа $p_1, \ldots, p_q$ принимать произвольные значения? Не обязательно. Все, что я могу утверждать, это то, что, если эти числа могут принимать значения p'_h и p''_h, они могут принимать также значения $p'_h + p''_h$, так как существование двух триплетов с суммой аргументов $-3k'$ и $-3k''$ влечет за собой существование другого триплета с суммой аргументов $-3k' - 3k''$.

Значит, можно придавать числам p все значения, совместимые с некоторым числом линейных соотношений с целыми коэффициентами.

Ясно, что вместо β можно взять линейные комбинации с целыми коэффициентами, детерминант которых равен 1. Тогда можно выбрать эти комбинации так, чтобы некоторые p могли принимать произвольные значения, тогда как другие должны равняться нулю. Если одна из величин β_s равна частному от деления периода на m_s, в то время как m_s не делится на три, то можно давать p_s произвольные значения, тогда как остальные p равны нулю. Для того чтобы две эквивалентные кубические кривые (соответствующие двум системам p'_h и p''_h целых p) принадлежали к одному и тому же подклассу, необходимо и достаточно, чтобы

$$p'_h = p''_h \pmod 3,$$

за исключением целых p_s, которые соответствуют величинам β_s, равным частному от деления периода на m_s, в то время как целое m_s не делится на 3.

Тогда число подклассов равно некоторой степени 3.

Если кубическая кривая содержит рациональные точки, выражаемые формулой

$$\alpha + 3n\alpha + \sum p_s(\alpha - \alpha_s), \tag{6}$$

то, как мы только что видели, для рациональных триплетов сумма аргументов задается формулой

$$3n\alpha + \sum p_s(\alpha - \alpha_s). \tag{7}$$

Я добавлю, что для рациональных пар сумма аргументов задается формулой

$$2\alpha + 3n\alpha + \sum p_s(\alpha - \alpha_s), \tag{8}$$

так как прямая, соединяющая две точки рациональной пары, должна пересечь кривую в третьей рациональной точке, и, обратно, всякая рациональная прямая, проходящая через рациональную точку, пройдет и через рациональную пару.

Я утверждаю, более общо, что сумма аргументов рациональной группы из K точек задается формулой (6), (7) или (8) в зависимости от того, сравнимо ли K с 1, 0 или 2 по модулю 3.

Действительно, если, например, $K=3j+2$, то можно бесконечно многими способами найти j рациональных триплетов, удовлетворяющих формуле (7), и рациональную пару, удовлетворяющую формуле (8); совокупность этих точек образует рациональную группу из K точек, удовлетворяющую формуле (8).

Обратно, если имеется рациональная группа из

$$K=3j+\varepsilon \qquad (\varepsilon=1,\ 2 \text{ или } 0)$$

точек, то сумма аргументов задается формулой

$$\varepsilon\alpha+3n\alpha+\sum p_s(\alpha-\alpha_s).$$

Действительно, через эти K точек можно провести рациональную кривую порядка $j+1$; она пересечет, кроме того, кубическую кривую в $1-\varepsilon$ точках, которые образуют рациональную группу с суммой аргументов, задаваемой формулой

$$\varepsilon\alpha+\sum n\alpha+\sum p_s(\alpha-\alpha_s).$$

А сумма аргументов $3j+1=K+(1-\varepsilon)$ точек пересечения должна равняться нулю.

VII. Расширение области рациональности

Можно, очевидно, повторить те же доводы, рассматривая как рациональные не только рациональные величины в строгом смысле слова, но все рациональные величины определенного алгебраического поля; или, в других терминах, *присоединяя* к области рациональности алгебраические числа, образующие базис этого алгебраического поля.

Ничто не изменится в наших рассуждениях, за исключением тех мест, где предполагается *действительность* рациональных чисел. К этому случаю нельзя также приложить то, что я говорил в разделе III о двух ветвях, которые может иметь кубическая кривая, о распределении рациональных точек на этих ветвях и следствиях, вытекающих отсюда и касающихся классификации кубических кривых.

С другой стороны, мы не можем более всегда утверждать, что кубическая кривая не имеет специальных несобственных рациональных преобразований в себя. Но это всего лишь частные детали, а существенные результаты сохраняются.

Важность этих результатов увеличивается. Например, наши теоремы в первоначальной форме нельзя было применить к кривой

$$x^3+y^3+z^3=0,$$

так как она имеет только три рациональные точки, что получается немедленно. После присоединения некоторого алгебраического поля

к области рациональности это уже будет не верно, так как кривая может иметь бесконечно много рациональных точек, принадлежащих этому полю.

Отметим, что две кубические кривые, не эквивалентные до присоединения одного или нескольких алгебраических чисел, могут стать эквивалентными после такого присоединения *. Зато если они были эквивалентны до присоединения, то они таковыми и останутся a fortiori после присоединения.

С другой стороны, может случиться, что две эквивалентные кубические кривые не принадлежат к одному подклассу до присоединения и будут принадлежать к одному подклассу после присоединения **.

Во всех этих случаях такие рассмотрения могут служить основой новых относительных критериев классификации кривых третьего порядка.

Пусть, например, k — произвольная константа ***.

Рассмотрим преобразование $(u,\ u+k)$ кубической кривой в себя. Это преобразование не будет, вообще говоря, рациональным, но оно станет таковым после присоединения подходящим образом выбранного алгебраического поля. Это поле будет зависеть от заданной кривой и величины k. Но оно будет одним и тем же для некоторого k и всех кривых, принадлежащих к одному классу.

Следовательно, это новый элемент классификации кривых.

VIII. Производные кубические кривые

Рассмотрим сначала кубическую кривую, содержащую три рациональные точки перегиба, лежащие на прямой.

Ее уравнение можно записать в виде

$$A^3 = XYZ, \tag{1}$$

где A, X, Y, Z — полиномы первой степени относительно x, y, z с целыми коэффициентами. Предположим, что кривая содержит рациональную

---

* Пример. Кривые

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0 \quad \text{и} \quad x^3 + y^3 + 2z^3 = 0$$

не эквивалентны в поле R рациональных чисел, но становятся эквивалентными в расширении $R(\sqrt[3]{2})$. (*А. Н.*).

** Можно даже утверждать, что если две кубические кривые эквивалентны в поле K, то найдется алгебраическое расширение K' поля K, в котором эти две кривые будут принадлежать к одному подклассу. Достаточно сделать так, чтобы одно из преобразований $(u,\ u+k/3)$ было рационально в K'. В примере достаточно взять в качестве K' одно из полей $R(\sqrt[3]{2})$, $R(j\sqrt[3]{2})$, $R(j^2\sqrt[3]{2})$, где R обозначает поле рациональных чисел, а j — кубический корень из единицы. (*А. Н.*).

*** А. Пуанкаре рассматривает, очевидно, не произвольную константу k, а только такую константу k, эллиптические функции которой (представляющие униформизацию рассматриваемой рациональной кривой) являются алгебраическими числами. (*Ф. Ш.*).

точку, кроме этих трех точек перегиба, и пусть A_0, X_0, Y_0, Z_0 — результаты подстановки в A, X, Y, Z координат x_0, y_0, z_0 этой точки. Мы всегда можем предполагать, что эти координаты целые и взаимно простые, так что A_0, X_0, Y_0, Z_0 тоже целые.

Пусть p — число, делящее X_0 и Y_0 одновременно; оно должно делить также A_0. Так как числа x_0, y_0, z_0 взаимно просты, то p должно делить детерминант Δ'' трех линейных функций A, X, Y, поскольку оно, очевидно, делит $\Delta'' x_0$, $\Delta'' y_0$, $\Delta'' z_0$.

Значит, X_0 и Y_0 могут иметь только те общие сомножители, которые делят Δ''. Аналогично, Y_0 и Z_0 могут иметь только те общие сомножители, которые делят Δ, детерминант A, Y, Z, тогда как X_0 и Z_0 могут иметь только те общие сомножители, которые делят Δ', детерминант A, X, Z. Пусть наибольший общий делитель чисел X_0, Y_0, Z_0 равен δ; чисел Y_0/δ и Z_0/δ равен α; X_0/δ и Z_0/δ равен β; X_0/δ и Y_0/δ равен γ; α, β, γ попарно взаимно просты; X_0 делится на $\beta\gamma\delta$, Y_0 — на $\alpha\gamma\delta$, Z_0 — на $\alpha\beta\delta$, откуда

$$X_0 = a\beta\gamma\delta, \quad Y_0 = b\alpha\gamma\delta, \quad Z_0 = c\alpha\beta\delta, \quad A_0^3 = abc\,(\alpha\beta\gamma)^2\delta^3.$$

Видно, что числа a, b, c попарно взаимно просты; a взаимно просто с α, b с β, c с γ.

Пусть наибольший общий делитель a и $\alpha\beta\gamma$ равен μ_1; b и $\alpha\beta\gamma$ равен μ_2; c и $\alpha\beta\gamma$ равен μ_3. Поскольку a, b, c попарно взаимно просты, то это же верно для μ_1, μ_2, μ_3, с одной стороны, и для a/μ_1, b/μ_2, c/μ_3, с другой. Отсюда сразу следует, что $\alpha\beta\gamma$ делится на $\mu_1\mu_2\mu_3$, так что

$$A_0^3 = \delta^3 (\mu_1\mu_2\mu_3)^3 \left(\frac{\alpha\beta\gamma}{\mu_1\mu_2\mu_3}\right)^2 \frac{a}{\mu_1}\frac{b}{\mu_2}\frac{c}{\mu_3}.$$

Произведение

$$\left(\frac{\alpha\beta\gamma}{\mu_1\mu_2\mu_3}\right)^2 \frac{a}{\mu_1}\frac{b}{\mu_2}\frac{c}{\mu_3}$$

представляет собой, следовательно, точный куб, и так как сомножители этого произведения попарно взаимно просты, то каждый из сомножителей

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{\mu_1\mu_2\mu_3}, \quad \frac{a}{\mu_1}, \quad \frac{b}{\mu_2}, \quad \frac{c}{\mu_3}$$

есть точный куб.

Пусть

$$\omega^3, \ \xi_0^3, \ \eta_0^3, \ \zeta_0^3$$

— эти четыре куба; получаем

$$X_0 = \xi_0^3\mu_1\beta\gamma\delta, \quad Y_0 = \eta_0^3\mu_2\alpha\gamma\delta, \quad Z_0 = \zeta_0^3\mu_3\alpha\beta\delta, \quad A_0 = \delta\mu_1\mu_2\mu_3\omega^2\xi_0\eta_0\zeta_0.$$

Можно еще записать

$$X_0 = h_1\xi_0^3, \quad Y_0 = h_2\eta_0^3, \quad Z_0 = h_3\zeta_0^3, \quad A_0 = k\xi_0\eta_0\zeta_0,$$

где коэффициенты h и k целые.

Эти целые числа и ω ограничены, так как α, β, γ должны делить соответственно Δ, Δ', Δ'', которые являются заданными целыми числами. δ должно делить эти три детерминанта; μ_1, μ_2, μ_3 должны делить $\alpha\beta\gamma$.

Следовательно, относительно этих коэффициентов можно сделать конечное число предположений.

Положим тогда

$$X = h_1\xi^3, \qquad Y = h_2\eta^3, \qquad Z = h_3\zeta^3, \qquad A = k\xi\eta\zeta$$

и исключим x, y, z из этих четырех уравнений; мы получим линейное однородное соотношение с целыми коэффициентами между ξ^3, η^3, ζ^3, $\xi\eta\zeta$. Это есть уравнение рациональной кубической кривой C', на которой должны лежать точки ξ, η, ζ. Я скажу, что C' является кубической кривой, *производной* от C.

В силу сказанного выше, C имеет только *конечное число производных*, так как относительно целых h и k можно сделать только конечное число предположений.

Точка ξ_0, η_0, ζ_0 — рациональная точка на C'.

Видно, также, что *каждой рациональной точке на C соответствует рациональная точка на одной из ее производных. Если C содержит бесконечно много рациональных точек, то это же верно, по крайней мере, для одной из этих производных.*

Посмотрим, каково соотношение между двумя кривыми C и C'.

Каждой точке кривой C' соответствует единственная точка C; каждой точке C соответствуют три значения частных ζ/ξ, η/ξ и, следовательно, три точки C'. Координаты этих трех точек равны

$$\xi,\ \eta,\ \zeta; \quad \alpha\xi,\ \alpha^2\eta,\ \zeta; \quad \alpha^2\xi,\ \alpha\eta,\ \zeta,$$

где α — кубический корень из единицы. Пусть M_1, M_2, M_3 — эти три точки; u_1, u_2, u_3 — их аргументы.

Рассмотрим, в частности, три точки перегиба на C, задаваемые уравнениями

$$X = A = 0, \qquad Y = A = 0, \qquad Z = A = 0.$$

Их аргументы равны 0, $\omega/3$, $2\omega/3$, и я обозначу эти точки J_1, J_2, J_3.

Этим трем точкам соответствуют на C' девять точек перегиба, лежащих на трех прямых $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, с аргументами

$$\frac{m\omega_1 + n\omega_1'}{3},$$

где ω_1 и ω_1' — периоды относительно C', а m и n целые.

Кривая C не меняется при замене ξ, η, ζ на $\alpha\xi$, $\alpha^2\eta$, ζ. Такое преобразование не может быть несобственным, так как неподвижные точки несобственного преобразования лежат на самой кривой, а три неподвижные точки этого преобразования $\xi = \eta = 0$, $\xi = \zeta = 0$, $\eta = \zeta = 0$ не лежат

на кривой. Значит, оно имеет вид $(u, u+k)$, и, поскольку после трехкратного применения этого преобразования мы возвращаемся в исходную точку, необходимо, чтобы k равнялось трети периода.

Если u — аргумент точки на C', а v — аргумент соответствующей точки на C, то v — однозначная функция u, так как если u описывает маленький контур в своей плоскости, то v возвращается к первоначальному значению. Аналогично, если v опишет маленький контур в своей плоскости, то три величины ξ, η, ζ и, следовательно, три значения u не изменятся, так как неподвижные точки $\xi=\eta=0$, $\xi=\zeta=0$, $\eta=\zeta=0$ (для которых две из трех систем величин, ξ, η, ζ совпали бы) не принадлежат кривой C'. Следовательно, u — однозначная функция v и, так как v конечно, когда u конечно, и наоборот, между u и v должно быть линейное соотношение.

Когда u увеличивается на k или на период, v должно увеличиваться на период и обратно, когда v увеличивается на период, u должно увеличиваться на k или на период.

Пусть $0, \frac{\omega_1}{3}, \frac{2\omega_1'}{3}$ — аргументы трех точек перегиба $\xi=0$; $\frac{\omega_1}{3}, \frac{\omega_1+\omega_1'}{3}, \frac{\omega_1+2\omega_1'}{3}$ — аргументы трех точек перегиба $\eta=0$; $\frac{2\omega_1}{3}, \frac{2\omega_1+\omega_1'}{3}, \frac{2\omega_1+2\omega_1'}{3}$ — аргументы трех точек перегиба $\zeta=0$. Видно, что

$$k=\frac{\omega_1'}{3},$$

поскольку три точки $\xi=0$ переходят одна в другую при преобразовании $(u, u+k)$. Пусть

$$v=au+b.$$

В силу того, что мы только что видели, $a\omega_1$ и $a\omega_1'/3$ должны быть линейными комбинациями величин ω и ω' с целыми коэффициентами и обратно, откуда

$$a\omega_1=m\omega+n\omega',$$

$$\frac{a\omega_1'}{3}=m_1\omega+n_1\omega',$$

где m, n, m_1, n_1 — целые числа, такие что $mn_1-nm_1=1$.

Мы можем всегда полагать $a=1$, так как периоды на кривой C (или C') определены только с точностью до постоянного множителя.

Для $u=0, \frac{\omega_1}{3}, \frac{2\omega_1'}{3}$ должно выполняться $v=0$ с точностью до периода

Для $u=\frac{\omega_1}{3}, \frac{\omega_1+\omega_1'}{3}, \frac{\omega_1+2\omega_1'}{3}$ должно выполняться $v=\frac{\omega}{3}$ с точностью до периода.

Для $u=\frac{2\omega_1}{3}, \frac{2\omega_1+\omega_1'}{3}, \frac{2\omega_1+2\omega_1'}{3}$ должно выполняться $v=\frac{2\omega}{3}$ с точностью до периода.

Мы заключаем сперва, что b должно равняться периоду, который мы можем считать нулевым без ограничения общности, затем, что $\omega/3$ равно $\omega_1/3$ с точностью до периода C, или, что то же самое, что $\omega/3$ равно трети периода C', который мы можем обозначать через ω_1; отсюда следует, что $\omega=\omega_1$.

Наконец, $k=\omega_1'/3$ должно быть периодом ω' кривой C, образующим примитивную систему с ω. Окончательно

$$v=u, \quad \omega=\omega_1, \quad \omega'=\frac{\omega_1'}{3}.$$

Эллиптические функции, связанные с C', получаются, таким образом, из эллиптических функций, связанных с C, с помощью преобразования третьего порядка.

Все эти результаты применимы только к случаю, когда три точки перегиба C рациональны. Постараемся их обобщить.

Мы должны для этого только присоединить к области рациональности координаты трех точек перегиба, лежащих на прямой. Уравнение кубической кривой примет вид

$$XYZ=A^3; \tag{1'}$$

где X, Y, Z, A — полиномы первой степени, коэффициенты которых равны целым величинам из алгебраического поля, полученного этим присоединением.

Рассмотрим рациональную точку нашей кривой (или рациональную в обычном смысле, или ставшую рациональной после присоединения); мы можем предполагать, что ее координаты x_0, y_0, z_0 представляют собой целые числа из алгебраического поля.

Но здесь возникает первая трудность; имеем ли мы право считать, что эти целые алгебраические величины взаимно просты? Молчаливо предполагается, что все эти слова — *целые алгебраические взаимно простые величины*, *делимость* и т. д. — должны пониматься в смысле теории идеалов.

Если общий делитель x_0, y_0, z_0 представляет собой существующее * алгебраическое число, т. е. главный идеал, то их можно разделить на этот общий множитель, не меняя их взаимных частных. Но если общим делителем x_0, y_0, z_0 служит неглавный идеал, то это деление выполнить нельзя, так как частные не являются более алгебраическими числами.

Пусть тогда J — наибольший общий делитель x_0, y_0, z_0, а J' — идеал того же класса. Всегда найдутся два целых существующих алгебраических числа E и E', такие, что

$$EJ=E'J'.$$

---

* А. Пуанкаре, по-видимому, принимает здесь точку зрения Куммера, предпочитая ее точке зрения Дедекинда и рассматривая идеал как *несуществующее число*.

Если x_0, y_0, z_0 выбраны так, что н. о. д. служит один из *идеальных типов*, то они определены еще только с точностью до умножения на «единицу» (или делитель единицы) тела. (*А. Ш.*).

Тогда наибольшим общим делителем x_0E, y_0E, z_0E является $EJ=EJ'$, а

$$\frac{x_0E}{E'}, \quad \frac{y_0E}{E'}, \quad \frac{z_0E}{E'}$$

представляют собой три целых существующих алгебраических числа, с наибольшим общим делителем J'.

Значит, можно всегда заменить три целых алгебраических числа с наибольшим общим делителем J на три других с наибольшим общим делителем, равным идеалу J', произвольно выбранному в каждом классе.

Поскольку имеется только конечное число классов идеалов, можно выбрать конечное число идеалов J', которые я буду называть *идеальными типами*, так, чтобы содержалось по одному и только одному такому идеальному типу в каждом классе.

Нельзя всегда предполагать, что x_0, y_0, z_0 взаимно просты, но можно считать, что их наибольшим общим делителем является идеальный тип.

Я добавлю, что если x_0, y_0, z_0 — *обычные целые рациональные числа*, то можно предполагать, что они взаимно просты, так как наибольший общий делитель двух или более обычных целых рациональных чисел есть обычное целое рациональное число.

Пусть A_0, X_0, Y_0, Z_0 — результаты подстановки x_0, y_0, z_0 в A, X, Y, Z.

Если я обозначу, вдобавок, через Δ, Δ', Δ' три детерминанта четырех линейных функций A, X, Y, Z, то наибольший общий делитель X_0 и Y_0 делит $\Delta''J$, где J — наибольший общий делитель x_0, y_0, z_0; таким образом, снова мы можем сделать относительно этого наибольшего общего делителя только конечное число предположений. Аналогично и для наибольшего общего делителя X_0 и Z_0 или Y_0 и Z_0.

Мы, следовательно, можем сделать конечное число предположений относительно наибольшего общего делителя чисел X_0, Y_0, Z_0 (который я обозначу δ), делителей чисел Y_0/δ и Z_0/δ; X_0/δ и Z_0/δ; X_0/δ и Y_0/δ (которые я обозначу α, β, γ). Эти делители α, β, γ, δ представляют собой идеалы рассматриваемого алгебраического поля.

Имеем снова

$$X_0 = a\beta\gamma\delta, \qquad Y_0 = b\alpha\gamma\delta, \qquad Z_0 = c\alpha\beta\delta,$$

где a, b, c — идеалы поля. Идеалы a, b, c попарно взаимно просты; a взаимно просто с α, b с β, c с γ и

$$A_0^3 = abc\,(\alpha\beta\gamma)^2\,\delta^3.$$

Из этого равенства следует, что если μ_1, μ_2, μ_3 определить как и выше, то выражения

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{\mu_1\mu_2\mu_3}, \quad \frac{a}{\mu_1}, \quad \frac{b}{\mu_2}, \quad \frac{c}{\mu_3}$$

будут точными кубами, но только идеалов поля.

Пусть тогда λ_1, λ_2, λ_3 — идеальные типы, принадлежащие к тем же классам, что и

$$\sqrt[3]{\frac{a}{\mu_1}},\quad \sqrt[3]{\frac{b}{\mu_2}},\quad \sqrt[3]{\frac{c}{\mu_3}}.$$

Поскольку число классов конечно, относительно идеалов λ можно сделать только конечное число предположений.

Мы можем тогда положить

$$\sqrt[3]{\frac{a}{\mu_1}}=\lambda_1\xi_0,\qquad \sqrt[3]{\frac{b}{\mu_2}}=\lambda_2\eta_0,\qquad \sqrt[3]{\frac{c}{\mu_3}}=\lambda_3\zeta_0,$$

где ξ_0, η_0, ζ_0 — *рациональные* числа (которые, может быть, не являются целыми) данного алгебраического поля.

Тогда получится

$$X_0=h_1\xi_0^3,\quad Y_0=h_2\eta_0^3,\quad Z_0=h_3\zeta_0^3,\quad A_0=k\xi_0\eta_0\zeta_0,$$

где

$$h_1=\lambda_1^3\mu_1\beta\gamma\delta,\qquad h_2=\lambda_2^3\mu_2\alpha\gamma\delta,\qquad h_3=\lambda_3^3\mu_3\alpha\beta\delta,$$

$$k=\delta\mu_1\mu_2\mu_3\sqrt[3]{\frac{\alpha\beta\gamma}{\mu_1\mu_2\mu_3}},$$

и где h и k — целые числа поля, относительно которых можно сделать не более конечного числа предположений, поскольку таких предположений можно сделать только конечное число относительно идеалов δ, α, β, γ, μ, λ *.

---

* Рассуждения Пуанкаре не полны, так как идеалы δ, α, β, γ, μ, λ определяют числа h_1, h_2, h_3 только с точностью до умножения на «единицу» алгебраического поля (см. примечание на стр. 948), относительно которой можно сделать бесконечно много предположений. Но это рассуждение можно дополнить, используя теорему Дирихле о «единицах» алгебраического поля. Число h_1, например, равно произведению εm_1 числа m_1, относительно которого можно сделать только конечное число предположений, на «единицу» ε поля. Теорема Дирихле утверждает сперва, что ε имеет вид $\varepsilon_1^{n_1}\varepsilon_2^{n_2}\ldots\varepsilon_r^{n_r}$, где $n_1, n_2, \ldots, n_r$ — целые натуральные и где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ — система фундаментальных «единиц» поля, которую можно выбрать единым образом. Но h_1 можно умножить на куб числа из поля, при условии, что мы умножим ξ_0 на обратную величину этого числа, не изменяя соотношений, приведенных выше. Можно, в частности, заменить $n_1, n_2, \ldots, n_r$ на их вычеты по модулю 3; произвольная «единица» ε поля заменится, таким образом, на «единицу», относительно которой можно сделать только конечное число предположений (r^3). То же самое относится к h_2 и h_3; что касается k, то относительно этого числа можно сделать только конечное число предположений, когда h_1, h_2, h_3 уже выбраны, так как

$$h_1h_2h_3=k^3.$$

Именно это же самое арифметическое рассуждение, дополненное, как это только что было показано, использовали Морделл и Вейль применительно к аналогичным кривым, но немного отличным от «производных» кривых Пуанкаре (см. примечание на стр. 957 и работу А. Вейля: A. Weil. Sur un thèorème de Mordell. — Bull. Sci. math., 1930, 54, 182—191). (*Ф. Ш.*).

Если точки x_0, y_0, z_0 лежат на кубической кривой C, то точки ξ_0, η_0, ζ_0 лежат на кубической кривой C', которую снова я назову *производной* от C.

Теоремы, очевидно, остаются в силе:

Кубическая кривая C может иметь только конечное число производных, так как можно сделать только конечное число предположений относительно h и k.

Всякой рациональной точке на C соответствует рациональная точка на одной из ее производных, так, что если C содержит бесконечно много рациональных точек, то это же верно, по крайней мере, для одной из ее производных.

Эллиптические функции производной получаются из эллиптических функций кривой C с помощью преобразования третьего порядка.

Иногда отсюда можно извлечь результаты в форме, применимой только к обычным целым числам. Это получится, например, если одна из трех точек перегиба будет обычной рациональной точкой.

Если точка $X=A=0$, которую я обозначу M, обычная рациональная, то через эту точку M проходят четыре прямые, каждая из которых содержит по две других точки перегиба. Пусть

$$A_1=0, \qquad A_2=0, \qquad A_3=0, \qquad A_4=0$$

эти четыре прямые. Если мы присоединим к области рациональности коэффициенты A_1, то мы определим тем самым некоторое алгебраическое поле K_1.

Пусть теперь $Y_1=0$, $Z_1=0$ — две касательные перегиба в точках пересечения кубической кривой с $A_1=0$.

Присоединим к области рациональности координаты двух соответствующих точек перегиба; мы определим тем самым новое алгебраическое поле K_1', содержащее K_1. Мы можем предполагать, что уравнение кубической кривой имеет вид

$$XY_1Z_1=A_1^3,$$

где коэффициенты X — обычные целые числа, коэффициенты Y_1 и Z_1 — целые из поля K_1', коэффициенты A_1 — целые из поля K_1.

Если x_0, y_0, z_0 — обычная рациональная точка кривой C, такая, что x_0, y_0, z_0 целые взаимно простые; если X_1^0, Y_1^0, Z_1^0, A_1^0; результаты подстановки x_0, y_0, z_0, то в силу предыдущего имеем

$$X_1^0=h_1\xi_0^3, \qquad Y_1^0=h_2\eta_0^3, \qquad Z_1^0=h_4\zeta_0^3, \qquad A_1^0=k\xi_0\eta_0\zeta_0;$$

величины, фигурирующие в правых частях этих равенств, представляют собой рациональные величины поля K_1'. Но мы должны заметить, что если поменять местами две точки перегиба $Y_1=0$, $Z_1=0$, то всякая рациональная величина поля K_1' преобразуется в другую рациональную величину одного и того же поля, которую называют *сопряженной*. Всякая симметричная и

рациональная функция двух сопряженных величин есть рациональная величина поля K_1'.

Мы заключаем, что h_1, ξ_0 и k — рациональные величины поля K_1, если только h_2 и h_3, η_0 и ζ_0 сопряжены.

Пусть это выполнено, тогда, если мы переставим четыре прямые A_1, A_2, A_3, A_4, то поле K_1 поменяется на одно из сопряженных полей K_2, K_3, K_4.

Пусть $h_{1,2}$, $h_{1,3}$, $h_{1,4}$ — величины, которые получатся из h_1, если тело K_1 заменить одним из сопряженных полей K_2, K_3, K_4. Это целые алгебраические величины этих трех полей так же, как h_1 было целой алгебраической величиной поля K_1.

Пусть также $\xi_{0,2}$, $\xi_{0,3}$, $\xi_{0,4}$ — величины, полученные из ξ_0 подобным же способом. Это рациональные величины трех полей K_2, K_3, K_4 так же, как ξ_0 было рациональной величиной поля K_1.

Относительно целых алгебраических $h_{1,2}$, $h_{1,3}$, $h_{1,4}$ можно сделать только конечное число предположений.

Так как X_0 — обыкновенное целое, имеем

$$X_0 = h_1\xi_0^3, \quad X_0 = h_{1,2}\xi_{0,2}^3, \quad X_0 = h_{1,3}\xi_{0,3}^3, \quad X_0 = h_{1,4}\xi_{0,4}^3;$$

три последние равенства получаются из первого переходом от поля K_1 к одному из сопряженных полей. Если положить

$$h_1 h_{1,2} h_{1,3} h_{1,4} = H, \qquad \xi_0 \xi_{0,2} \xi_{0,3} \xi_{0,4} = U,$$

то получим

$$X_0^4 = HU^3$$

или

$$X_0 = H\left(\frac{U}{X_0}\right)^3,$$

где H — обычное целое число, так как h_1, $h_{1,2}$ $h_{1,3}$, $h_{1,4}$ сопряжены; U — обычная рациональная функция.

Поскольку относительно целого H можно сделать только конечное число предположений, получаем, что X_0 равно точному кубу, умноженному на ограниченное целое число.

В этой формулировке предполагается, что x_0, y_0, z_0 взаимно просты. Если освободиться от этого ограничения, то следует сказать, что X_0 равно точному кубу, умноженному на наибольший общий делитель x_0, y_0 и z_0 и на целое ограниченное число. Это утверждение можно лучше оценить, если вспомнить, что кубическая кривая, содержащая рациональную точку, эквивалентна кубической кривой, содержащей рациональную точку перегиба.

Чтобы обобщить эти результаты, мы еще можем попытаться представить уравнение кубической кривой в виде

$$X_1 X_2 \ldots X_p = Y^n, \qquad (1'')$$

где X_1, X_2, ..., X_p, Y — целые полиномы с целыми коэффициентами. Я наложу сперва условие, что две произвольные кривые

$$X_i = 0, \qquad X_k = 0$$

не имеют общих точек на кубической кривой.

Пусть тогда

$$u_i^{(1)},\ u_i^{(2)}, \ldots, u_i^{(q)}$$

— аргументы точек пересечения кубической кривой с $X_i=0$,

$$v_1,\ v_2, \ldots, v_m$$

— точки пересечения кубической кривой с $Y=0$.

Имеем с точностью до периода

$$\sum u_i = 0, \qquad \sum v = 0.$$

Совокупность точек u должна повторять n раз совокупность точек v. Каждая точка v должна фигурировать n раз в совокупности точек u, и, так как совокупность точек u_i не должна иметь общих точек с совокупностью точек u_k, каждая точка v должна фигурировать n раз в одном из ансамблей u_i. Отсюда следует, что точки u_i должны совпадать по n штук и кратность любой из них должна равняться числу, кратному n.

Рассмотрим тогда набор аргументов

$$w_i^{(1)},\ w_i^{(2)}, \ldots, w_i^{(s)} \qquad \left(s = \frac{q}{n}\right),$$

которые совпадают с аргументами u_i с той разницей, что теперь их кратности стали в n раз меньше. Тогда Σw_i представляет собой n-ю часть периода. Впрочем, совокупность точек w идентична совокупности точек v.

Проблема, таким образом, состоит в том, чтобы найти p рациональных групп; сумма аргументов каждой группы должна равняться n-й части периода, сумма аргументов всех групп — равняться периоду. Я добавлю, что число точек всех групп должно делиться на 3 и что то же верно для числа точек каждой группы, если только n не делится на 3.

Обратно, если эти условия выполнены, то уравнение можно представить в виде (1''). Действительно, можно найти полином X_i, имеющий нуль порядка n в каждой из точек w_i, и полином Y, имеющий простой нуль в каждой точке v_i.

Рассмотрим тогда отношение

$$\frac{Y^n}{X_1 X_2 \ldots X_p}.$$

Это дважды периодическая функция эллиптического аргумента точки на кубической кривой, и эта функция нигде не обращается в бесконечность; значит, она равна константе, которую мы можем принять равной 1.

Пусть x_0, y_0, z_0 — рациональная точка C. Для большей простоты я буду употреблять слово *рациональная* в обычном смысле. Впрочем, будет легко сделать обобщение на случай произвольного алгебраического поля. Значит я могу предположить, что x_0, y_0, z_0 — целые взаимно простые числа. Я обозначу через X_i^0 и Y_0 результаты подстановки этих целых в X_i и Y. Тогда получим

$$X_1^0 X_2^0 \ldots X_p^0 = Y_0^n.$$

Наибольший общий делитель X_1^0 и X_2^0 (являющихся целыми) должен делить Y_0, и, по предположению, $X_1=0$, $X_2=0$, $Y=0$ не имеют общих точек.

Отсюда, очевидно, следует, что если мы обозначим через Δ результат X_1, X_2, Y, то существует девять полиномов P с целыми коэффициентами, таких что выполняются тождества

$$\begin{aligned} P_1X_1 + P_2X_2 + P_3X_3 &= \Delta x^q, \\ P_1'X_1 + P_2'X_2 + P_3'X_3 &= \Delta y^q, \\ P_1''X_1 + P_2''X_2 + P_3''X_3 &= \Delta z^q, \end{aligned}$$

где q — надлежащий целый показатель. Поэтому наибольший общий делитель X_1^0, X_2^0, Y_0 должен делить одновременно Δx_0^q, Δy_0^q, Δz_0^q и, следовательно, Δ.

Таким образом, относительно общих делителей X_i^0 и Y_0 можно сделать только конечное число предположений.

С помощью рассуждения, совершенно аналогичного приведенному выше, получаем

$$\begin{aligned} &X_1^0 = h_1(\xi_1^0)^n, \qquad X_2^0 = h_2(\xi_2^0)^n, \\ &\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots \\ &X_p^0 = h_p(\xi_p^0)^n, \qquad Y_0 = k\xi_1^0\xi_2^0 \ldots \xi_p^0, \end{aligned}$$

где h и k — целые, относительно которых можно сделать только конечное число предположений, а ξ_i^0 целые.

Итак, мы подошли к тому, чтобы поставить следующий вопрос:

Если положить

$$X_i = a_i \xi_i^n, \qquad Y = k\xi_1\xi_2 \ldots \xi_p, \tag{2}$$

то каково геометрическое место точек ξ_1, ξ_2, ..., ξ_p в пространстве p измерений, когда точка x, y, z пробегает кривую C?

Рациональные точки этого геометрического места соответствуют рациональным точкам C, так что это геометрическое место играет роль, аналогичную производной кубической кривой C'.

Пусть u — эллиптический аргумент на C, ω и ω' — периоды, а $\theta(u)$ — функция θ, такая, что

$$\theta(0)=0, \qquad \theta(u+\omega)=\theta(u)$$
$$\theta(u+\omega')=e^{au+b}\theta(u), \qquad a=\frac{2\pi i}{\omega}.$$

Пусть λ_i — степень X_i и

$$\Theta(u)=\theta(u-w_i^{(1)})\,\theta(u-w_i^{(2)})\dots\theta(u-w_i^{(s)}), \qquad \left(s=\frac{3\lambda_i}{n}\right).$$

Пусть α_1, α_2, α_3 — точки пересечения кубической кривой с $x=0$ и

$$\eta=\theta(u-\alpha_1)\,\theta(u-\alpha_2)\,\theta(u-\alpha_3).$$

Выражения

$$\frac{X_i}{\Theta_i^n}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{-\lambda_i}, \qquad \frac{Y}{\Theta_1\Theta_2\dots\Theta_p}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{-q}$$

$\left(\text{где } q=\dfrac{\sum\lambda_i}{n} \text{ — степень } \lambda\right)$ представляют собой дважды периодические функции второго рода (переходящие в себя с точностью до постоянного множителя при добавлении периода к аргументу), нигде не обращающиеся в бесконечность. Значит, они сводятся к экспонентам; поэтому уравнение кубической кривой можно записать в виде

$$X_i=\mu_i\Theta_i^n\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\lambda_i}e^{n\rho_i u}, \qquad Y=\mu_{p+1}\Theta_1\Theta_2\dots\Theta_p\left(\frac{x}{\eta}\right)^q e^{\rho u},$$

где μ и ρ — константы, или еще

$$\xi_i=\nu_i\Theta_i\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\frac{\lambda_i}{n}}e^{\rho_i u},$$

где ν — константы.

Если все λ_i равны между собой, то это уравнение представляет собой уравнение кривой 1-го рода в однородных координатах в $(p-1)$-мерном пространстве. Какова степень этой кривой и каковы соответствующие периоды?

Имеем

$$\Theta_i(u+\omega)=\Theta_i(u); \qquad \Theta_i(u+\omega')=e^{a'u+b'-a\sum w_i}\Theta_i(u),$$
$$\Theta_i(u+h\omega')=e^{a''u+b''-ah\sum w_i}\Theta_i(u),$$

$$a'=\frac{3\lambda_i}{h}a, \qquad b'=\frac{3\lambda_i}{n}b, \qquad a''=ha', \qquad b''=h'b'+a'\omega'\frac{h(h-1)}{2}.$$

Когда u увеличивается на ω, величины X_i, η, Θ_i и x не меняются. Значит, $e^{n\rho_i u}$ не меняется. Когда u увеличивается на ω', величины X_i, x не меняются; Θ_i и η умножаются на

$$e^{a'u+b'-a\sum w_i}, \qquad e^{3au+3b}.$$

Следовательно, $n\rho_i\omega$ — кратное $2i\pi$, $n\rho_i\omega'$ равно $na\sum w_i$ с точностью до кратного $2i\pi$. Мы сказали, что $\sum w_i$ — n-я часть периода; значит,

$$n\sum w_i = \beta_i\omega + \beta_i'\omega',$$

где β_i и β_i' — целые. Тогда получится

$$\rho_i = \frac{2i\pi\beta_i'}{n}$$

и притом

$$\rho = \sum \rho_i.$$

Когда u увеличивается на ω или ω', логарифм $\Theta_u e^{\rho_i u}$ увеличивается на

$$\frac{2i\pi\beta_i'}{n} + a'u + b' - a\sum w_i + \frac{2i\pi\beta_i'\omega'}{n\omega'} = a'u + b' - \frac{2i\pi\beta_i}{n}.$$

Отсюда следует, что отношения ξ_i представляют собой дважды периодические функции u, периоды которых зависят от целых β_i и β_i', или, вернее, от остатков при делении этих целых на n. Эти функции имеют период

$$\gamma\omega + \gamma'\omega',$$

если только все $\gamma\beta_i + \gamma'\beta_i'$ дают одинаковый остаток при делении на n.

Таким образом, легко определить эти периоды, и отсюда легко находится степень этой кривой 1-го рода, которую мы снова можем назвать *кривой, производной от C*.

Видно, что число производных кривых снова конечно, что всякой рациональной точке C соответствует рациональная точка на одной из производных и что эллиптические функции, соответствующие производной, получаются из функций, соответствующих C, с помощью некоторого преобразования *.

Все производные кривые, содержащие рациональную точку, эквивалентны некоторой кубической кривой, как мы видели в разделе IV.

---

* Можно видеть, как и выше, что производные кривые C, относящиеся к целому n, порождают все подклассы кривых 1-го рода и степени n, имеющих тот же инвариант, что и C. (*Ф. Ш.*).

Если кривая C содержит бесконечно много рациональных точек, то можно также определить некоторое число других кубических кривых (эллиптические функции которых получаются из функций C с помощью некоторого преобразования), и, по крайней мере, на одной из них будет бесконечно много рациональных точек.

Не будем более предполагать, что λ_i равны.

Можно найти p^2 целых β_{ik}, детерминант которых равен 1, и p целых γ_i, таких, что

$$\sum \beta_{ik}\lambda_i = 0, \qquad \sum \gamma_i\lambda_i = \delta,$$

где δ — наибольший общий делитель λ_i.

Тогда произведения

$$Z_k = \prod \xi_i^{\beta_{ik}} = \prod (\nu_i\Theta_i e^{\rho_i u})^{\beta_{ik}}$$

являются дважды периодическими функциями u, периоды которых можно было бы определить, как это мы только что делали. $p—1$ величин Z_k представляют собой неоднородные координаты точки, пробегающей кривую 1-го рода в $(p—1)$-мерном пространстве. Эту кривую можно снова назвать *кривой, производной от C*, и эти производные снова обладают теми же свойствами, что и в случаях, изученных до сих пор.

Можно положить, например,

$$Z'_k = \xi_k \left(\prod \xi_i^{\gamma_i}\right)^{-\frac{\lambda_k}{\mu}},$$

где Z'_k снова дважды периодично. (Бесполезно повторять, что эти результаты становятся иллюзорными для $p=2$.)

Ничего не пришлось бы менять в предыдущих рассуждениях, если бы мы, вместо уравнения (1''), исходили из аналогичного уравнения

$$X_1^{q_1} X_2^{q_2} \ldots X_p^{q_p} = Y^n, \tag{1'''}$$

где q — произвольные целые. Здесь опять можно сделать только конечное число предположений относительно общих делителей X_1^0 и X_2^0, когда x_0, y_0, z_0 взаимно просты.

Поэтому X_k^0 (если q_k взаимно просто с n) — точная n-я степень с точностью до постоянного множителя, относительно которого можно сделать только конечное число предположений.

Посмотрим теперь, в каких случаях получится уравнение вида (1'').

Предположим, что $3\lambda_i/n$ равно кратному 3 плюс ε_i ($\varepsilon_i=0, 1, 2$). Тогда, в силу того, что группа точек w_i рациональна, должно выполняться (с учетом того, что показано в конце раздела VI) равенство

$$\sum w_i = \varepsilon_i\alpha + 3n_i\alpha + \sum p_s(\alpha - \alpha_s). \tag{3}$$

Это выражение должно равняться n-й части периода, т. е. аргумент одной из рациональных точек (в частности, точки $\sum w_i$, если $\varepsilon_i=1$, и точки $2\sum w_i$, если $\varepsilon_i=2$) или разность аргументов двух рациональных точек (в частности, $\sum w_i$, если $\varepsilon_i=0$) должна быть n-й частью периода.

Это условие, с другой стороны, очевидно, является достаточным. Действительно, если, например,

$$\alpha=\frac{\omega}{n},$$

то можно найти три рациональные группы $\sum w_1$, $\sum w_2$, $\sum w_3$, такие, что

$$\sum w_1=q_1\alpha, \qquad \sum w_2=q_2\alpha, \qquad \sum w_3=q_3\alpha,$$

$$q_1+q_2+q_3\equiv 0 \pmod n, \qquad \frac{3\lambda_i}{n}\equiv q_i \pmod 3.$$

Если n не делится на 3, то q_i должны делиться на 3; мы можем тогда положить $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$. Если n делится на 3, то можно снова взять

$$q_1=q_2=q_3 \pmod 3,$$

так как

$$q_1+q_2+q_3=0 \pmod 3.$$

Если бы

$$3\alpha=\frac{\omega}{n},$$

то мы взяли бы опять

$$\sum w_1=q_1\alpha, \qquad \sum w_2=q_2\alpha, \qquad \sum w_3=q_3\alpha,$$

$$q_1+q_2+q_3\equiv 0 \pmod{3n}, \qquad q_1\equiv q_2\equiv q_3\equiv 0 \pmod 3,$$

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3, \qquad \frac{3\lambda_i}{n}\equiv 0 \pmod 3.$$

Я буду различать два случая:

1. Либо разность аргументов двух рациональных точек равна n-й части периода.

В этом случае изучение производных кривых нам действительно дает что-то новое.

Если это условие выполнено для одной кубической кривой, то оно выполнено для всех эквивалентных кубических кривых. Но, вообще говоря, оно не выполнено ни для C, ни, следовательно, для любой эквивалентной кривой, *если только не расширить с помощью присоединения область рациональности.*

2. Либо разность аргументов двух рациональных точек не равна n-й части периода (если только не является периодом). Если это так, то,

в силу только что сказанного, необходимо, чтобы аргумент α одной из рациональных точек равнялся n-й части периода ω.

Тогда

$$3\alpha = \frac{3\omega}{n}$$

равно разности аргументов двух рациональных точек и в то же время равно n-й части периода. Следовательно, необходимо, чтобы эта величина равнялась периоду. А это может быть в двух случаях: если $\omega=0$ или если n делится на 3.

Второй случай легко сводится к первому, так как если n делится на 3 и $3\omega/n$ — период, то α равно трети периода. Но, поскольку аргументы определены только с точностью до трети периода, мы можем положить $\alpha=0$, откуда $\omega=0$.

Если α равно нулю, то

$$\sum w_i = -\sum p_s \alpha_s.$$

Правая часть этого равенства может быть n-й частью периода только в случае, если все p_s равны нулю, поскольку выражение $\sum p_s \alpha_s$, представляющее собой разность аргументов двух рациональных точек, не может равняться n-й части периода. Значит,

$$\sum w_i = 0.$$

Что в этом случае дает нам предыдущий анализ? То, что $X_1^{\lambda_2}/X_1^{\lambda_1}$ является n-й степенью рационального числа. Пусть

$$\frac{3\lambda_1\lambda_2}{n} \equiv -\varepsilon \pmod 3.$$

Мы можем найти две рациональные кривые, $Z_1=0$, и $Z_2=0$, степени $\lambda_1\lambda_2/n+\varepsilon/3$, проходящие ε раз через рациональную точку с аргументом $\alpha=0$; первая, $Z_1=0$, проходит λ_2 раз через каждую из $3\lambda_1/n$ точек w_1; вторая, $Z_2=0$, проходит λ_1 раз через каждую из $3\lambda_2/n$ точек w_2.

Тогда получим

$$\frac{X_1^{\lambda_2}}{X_2^{\lambda_1}} = \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n,$$

что уже достаточно для доказательства того факта, что левая часть равенства есть точная n-я степень.

Обсуждаемый результат, следовательно, иллюзорен, поскольку можно было бы получить чисто алгебраическим путем, не привлекая арифметического доказательства, основанного на невозможности разбить целое число многими способами на простые множители

Рассматривать производные кривые было бы неинтересно в этом случае.

Мы видим, однако, что X_1 должно быть точной n-й степенью, умноженной на целое число, относительно которого можно сделать только конечное число предположений, *если известен наибольший общий делитель* x_0, y_0, z_0. Это ограничение уменьшает важность результата, который, впрочем, не зависит от того, привлекаем ли мы производные кривые или нет.

Значит, изучение производных кривых полезно, когда эллиптические функции, связанные с этими производными кривыми, получаются из функций, связанных с C, с помощью преобразования, *имеющего порядок, отличный от единицы* *.

IX. Кривые высшего рода

Я скажу только несколько слов о кривых рода выше 1. В этом случае более не верно то, что, зная рациональную точку, можно найти бесконечно много других рациональных точек. Но, зная рациональную *группу* (и, следовательно, зная рациональную точку), можно найти бесконечно много других рациональных групп.

Пусть C — рациональная кривая рода p и степени m и пусть на этой кривой существует рациональная группа из p точек. Число двойных точек будет

$$d=\frac{(m-1)(m-2)}{2}-p.$$

Если мы пересечем нашу кривую сопряженной кривой C' степени $q\geqslant m-2$, то число точек пересечения, отличных от двойных, равно

$$mq-2d$$

и притом $mq-2d-p$ из них можно выбрать произвольно.

Пусть u_1, u_2, . . ., u_p — p абелевых интегралов первого рода. Группа

---

* Результаты этого параграфа лежат в основе доказательств Морделла и Вейля (см. примечания на стр. 909 и ниже на стр. 959). Эти авторы для вычисления, немного отличающихся от вычислений А. Пуанкаре, использовали кривые, аналогичные производным кривым (относящимся к целому $n=2$). Они показали, что эти кривые допускают представление фактор-группы группы (аддитивной) рациональных точек C с помощью группы произведений этих точек на $n=2$. Поскольку число производных кривых конечно, как это показал А. Пуанкаре, то отсюда следует, что эта *фактор-группа конечна*. Именно этот результат позволил Морделлу и Вейлю применить метод *бесконечного спуска* к группе фундаментальных рациональных точек. (*Ф. Ш.*).

из p точек определена, когда задано p сумм

$$\sum u_1 = \alpha_1, \quad \sum u_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad \sum u_p = \alpha_p,$$

которые я назову *аргументами этих точек*. Определенную так группу я назову тогда *группой* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$, или просто группой α. Константы интегрирования можно выбрать так, чтобы сумма аргументов была равна нулю для точек пересечения нашей кривой с произвольной сопряженной кривой, не считая двойные точки.

Если группы из p точек α, β и γ рациональны, то это же верно для группы $\beta+\gamma-\alpha$. Действительно, через группы β и γ можно провести сопряженную рациональную кривую степени $q > \frac{3d+3p}{m}$. Она пересечет C в $mq-2d-2p$ других точках, образующих рациональную группу G с суммой аргументов $-(\beta+\gamma)$. Через G и через группу α можно провести сопряженную рациональную кривую степени q, которая пересечет C в p других точках, образующих рациональную группу с суммой аргументов $\beta+\gamma-\alpha$.

Предположим теперь, что группа из p точек α рациональна. Я проведу сначала произвольную сопряженную рациональную кривую степени $q \geqslant m-2$. Она пересечет C в группе G из $mq-2d$ точек, сумма аргументов которых равна нулю.

Пусть δ — наибольший общий делитель m и $2d$; можно найти два целых положительных числа $q' \geqslant m-2$ и β, таких, что

$$m(q'-q)-\beta(mq-2d)=\delta h,$$

где h — произвольное положительное целое. Я хочу теперь, чтобы

$$\delta h=(K+1)p,$$

если δ' — н. о. д. m, $2d$, p и если

$$p=\xi\delta', \qquad \delta=\varepsilon\delta'.$$

Достаточно взять

$$h=\xi, \qquad K+1=\varepsilon.$$

Сделав это, я проведу сопряженную рациональную кривую степени q' : $\beta+1$ раз через группу G и K раз через группу α. Таким образом, эта кривая полностью определена, и она пересечет C еще в p других точках, так как

$$mq'=(K+1)p+(\beta+1)(mq-2d)+2d.$$

Эти p других точек образуют рациональную группу, а сумма аргументов равна $-K\alpha$ или $\alpha-\varepsilon\alpha$.

Из всего этого следует, что рациональные группы из p точек, расположенные на C, задаются формулой

$$\alpha + \varepsilon n\alpha + \sum p_s(\alpha - \alpha_s),$$

аналогичной формулам, относящимся к кривым третьего порядка.

Число ε (которое для кубических кривых равно 3) есть наибольший общий делитель m и $2d$, поделенный на наибольший общий делитель m, $2d$, p.

Можно построить таким образом теорию, аналогичную теории кубических кривых *.

---

* Здесь надо показать, как и для кубических кривых (см. примечание на стр. 911), что существует *конечная* система величин α_i, с помощью которой получаются все рациональные группы из p точек. Доказательство дано А. Вейлем (там же). (*Ф. Ш.*).

КОММЕНТАРИИ

НОВЫЕ МЕТОДЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ
III

Третий том «Новых методов небесной механики» А. Пуанкаре меньше, чем первые два, связан с небесной механикой. Он является, наряду с мемуаром Пуанкаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями», одним из краеугольных камней качественной теории дифференциальных уравнений, основные идеи которой в более или менее готовом виде содержатся у Пуанкаре.

Содержание третьего тома можно разделить на три раздела: интегральные инварианты и их применение к доказательству устойчивости по Пуассону для систем с конечным объемом фазового пространства; периодические решения второго рода; двоякоасимптотические решения и их связь с устойчивостью по Лагранжу.

Теория интегральных инвариантов и ее применение к динамическим системам привлекла наибольшее внимание и приобрела в настоящее время стройность завершенного здания.

Периодические решения второго рода, в отличие от решений первого рода, рассмотренных в первом томе «Новых методов небесной механики», пожалуй, наиболее известных широким кругам прикладников из всего, что сделано Пуанкаре, почти совсем забыты, хотя они могут иметь столь же многочисленные применения.

Вопрос об устойчивости по Лагранжу только поставлен Пуанкаре. Но он и в настоящее время еще ждет своего окончательного решения, хотя на этом пути сделаны весьма важные шаги в работах В. И. Арнольда.

1 (стр. 9). Изложение теории интегральных инвариантов вместе с их приложениями к анализу и аналитической механике можно найти в книге Картана (Э. Картан. Интегральные инварианты. ГИТТЛ. М.—Л., 1940). Там же указана подробная библиография.

2 (стр. 17). Мемуар «О вычетах двойных интегралов» (Sur les Résidus des Intégrales Doubles) напечатан не в VIII, а в IX томе журнала «Acta mathematica» (за 1887 г.). Второй мемуар — это основная работа Пуанкаре по топологии, «Analysis situs», перевод которой помещен в настоящем томе.

3 (стр. 24). Рассуждения Пуанкаре, основанные на геометрических аналогиях, легко заменить следующим строгим доказательством:

Пусть уравнения в вариациях (2) допускают интеграл вида

$$\sum_{i_1 \ldots i_m} A_{i_1 \ldots i_m}(x_1, \ldots, x_n) \begin{vmatrix} \xi_{i_1}^{(1)} \ldots \xi_{i_1}^{(m)} \\ \cdots\cdots \\ \xi_{i_m}^{(1)} \ldots \xi_{i_m}^{(m)} \end{vmatrix} = \mathrm{const} \qquad (m \leqslant n),$$

где суммирование распространено на все сочетания по m чисел $i_1, \ldots, i_m$ из n чисел $1, \ldots, n$; $\xi_{i_j}^{(k)}$ — i_j-я функция k-го решения ($j, k = 1, \ldots, m$). Пусть $x_i = x_i(t; x_1^0, \ldots, x_n^0)$ ($i = 1, \ldots, n$) — общее решение системы (1). Имеем

$$J = \int\limits_F \sum_{i_1 \ldots i_m} A_{i_1 \ldots i_m} dx_{i_1} \ldots dx_{i_m} = \int\limits_{F_0} \sum_{i_1 \ldots i_m} A_{i_1 \ldots i_m} \frac{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})}{D(x_1^0, \ldots, x_m^0)} dx_1^0 \ldots dx_m^0.$$

Так как величины $\partial x_i / \partial x_j^0$ удовлетворяют уравнениям в вариациях (2), то подынтегральная функция постоянна по условию; так как область F_0 не зависит от t, то J есть интегральный инвариант. Обратное утверждение следует, очевидно, из тех же формул.

4 (стр. 36). $\xi_i = \varepsilon X_i$ будут решениями уравнений (2) при любом ε, в чем легко убедиться непосредственным дифференцированием.

5 (стр. 45). Это равенство можно проверить дифференцированием.

6 (стр. 64). J не есть интегральный инвариант; интегральным инвариантом четвертого типа будет

$$J - t\frac{dJ}{dt} = J - (1 - p)\, t\, (C_1 - C_0).$$

7 (стр. 100). Вместо уравнений (4) следует написать такие:

$$-\frac{\partial x_1}{dt} + h_2 \frac{\partial x_1}{\partial y_2} + h_3 \frac{\partial x_1}{\partial y_3} = -2\,(Bx_1 + Cy_1),$$

$$-\frac{\partial y_1}{dt} + h_2 \frac{\partial y_1}{\partial y_2} + h_3 \frac{\partial y_1}{\partial y_3} = +2\,(Ax_1 + By_1).$$

8 (стр. 106). Число l инвариантных соотношений равно числу переменных действия, выраженных в функции угловых переменных, меняющихся вековым образом. Число последних равно $n-q$; следовательно, $l = 2n - (n - q) = n + q$. Число вещественных показателей $\leqslant q$.

9 (стр. 130). Содержание этой главы послужило основой современной общей теории динамических систем (в особенности систем с инвариантной мерой), получившей свое развитие, главным образом, в работах Биркгофа, Хопфа, Каратеодори, Хинчина, Крылова и Боголюбова.

Наиболее интересные результаты этой теории можно кратко сформулировать следующим образом.

Введя аксиоматически абстрактное понятие меры μA множества A, являющееся обобщением понятия объема, Каратеодори строго доказал для случая инвариантной меры, когда $\mu f(A, t) = \mu A$, где $f(A, t)$ — множество точек в момент t, составлявших множество A при $t = 0$ (например, в случае существования интегрального инварианта), следующие две теоремы о возвращении, установленные Пуанкаре.

1. Если $\mu A > 0$, то существуют такие $t > t_0$, что $\mu\,[A \cdot f(A, t)] > 0$, где $A \cdot f(A, t)$ — множество точек, одновременно принадлежащих множествам A и $f(A, t)$.

2. Если мера всего фазового пространства R конечна, то почти все точки (за исключением, может быть, множества нулевой меры) устойчивы по Пуассону.

А. Я. Хинчин дал количественную оценку меры возвращающихся множеств. Именно, он показал в случае $\mu R = 1$, что неравенство $\mu\,[A \cdot f(A, t)] > \lambda\,[\mu A]^2$ при любом $\lambda < 1$ выполняется для относительно плотного множества значений t (т. е. всякий достаточно большой интервал времени содержит такое значение t).

Хопф распространил вторую теорему Пуанкаре—Каратеодори о возвращении точек на случай пространства бесконечной меры. Точнее говоря, он показал при некоторых ограничениях, что почти все точки любого множества конечной меры из этого пространства либо устойчивы по Пуассону, либо дают начало траекториям, не имеющим предельных точек при $t \to \infty$.

Для случая конечной меры Биркгоф доказал так называемую эргодическую теорему о существовании предела отношения части интервала времени T, в течение которого движущаяся точка находится в заданной части фазового пространства, ко всему интервалу T при $T \to \infty$. Этот предел имеет смысл вероятности пребывания точки в заданной части пространства. Эргодическая теорема Биркгофа положила начало обширной литературе, посвященной ее обобщениям, составившим целую статистическую теорию динамических систем.

Наконец, Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов разработали метод построения инвариантной меры для достаточно широкого класса динамических систем, которые в отличие от гамильтоновых не имеют интегрального инварианта. Доказательство этих теорем, так же как и соответствующие литературные ссылки, читатель может найти, например, в главе V монографии В. В. Немыцкого и В. В. Степанова [В. В. Немыцкий и В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений. ОГИЗ. М.—Л., 1947].

10 (стр. 140). Дальнейшие рассуждения доказывают, что эта вероятность равна нулю.

11 (стр. 144). Другое приложение теории интегральных инвариантов к ограниченной задаче трех тел указал Цейпель (V. Zeipel. Sur l'instabilité du mouvement des comètes. — Bull. astron., 1905 XXII).

Он нашел, что вероятность захвата комет Юпитером, т. е. превращения орбиты, гиперболической при $t=-\infty$, в орбиту, эллиптическую при $t=+\infty$, равна нулю. Тем не менее, как показал В. М. Алексеев [Матем. сб., 1968, 77 (119), № 4], в одном вырожденном случае ограниченной задачи движения с захватом возможны и образуют множество мощности континуума.

12 (стр. 154). Таким образом, Пуанкаре показал, что теория интегральных инвариантов в применении к общей задаче трех тел ничего не дает вследствие того, что объем всего фазового пространства $\int dx_1' \ldots dx_6$ бесконечен. Однако, как показал Шази (J. Chazy. Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps. — J. math. pures et appl., ser. 9, 1929, 8), если ввести вместо t новую независимую переменную u по формуле

$$dt = J^n du \quad (n \geqslant 0),$$

где J — момент инерции системы трех тел, в области $n < 0$ этот объем становится конечным, что ведет к устойчивости почти всех движений по Пуассону, или, что то же, к нулевой вероятности захвата при $n < 0$ (т. е. превращения движения, гиперболического при $t=-\infty$, в гиперболо-эллиптическое при $t=+\infty$). При этом возникает проблема существования среди устойчивых по Пуассону так называемых осциллирующих (т. е. неограниченных при $t=\infty$) траекторий, решенная в положительном смысле К. А. Ситниковым (Докл. АН СССР, 1960, 133, № 2).

13 (стр. 157). Как заметил Шази, это рассуждение Пуанкаре, вообще говоря, неприложимо к задаче трех тел, где в рассматриваемом случае (по современной терминологии — гиперболо-эллиптического движения) аналитическое продолжение за значение $t = \infty$, вследствие наличия в соответствующих разложениях членов с $\log \frac{1}{t}$, приводит к комплексным значениям координат. В задаче двух тел (а следовательно, в частных решениях Лагранжа и Эйлера в задаче трех тел) аналитическое продолжение возможно в вещественной области для координат (переход с одной ветви гиперболы на другую), но при этом время меняется на комплексной плоскости, переходя с одной линии, параллельной вещественной оси, на другую. Единственным случаем задачи трех тел, где аналитическое продолжение возможно в вещественной области для всех переменных, является случай прямолинейного движения трех тел (подробнее см.: C h a z y. Ann. École Norm. Super, sér. 3, 1922, 39).

14 (стр. 159). В этой главе Пуанкаре впервые предложил для изучения периодических и асимптотических решений свой метод поверхностей сечения и инвариантных кривых, явившийся основным аппаратом в дальнейших исследованиях Биркгофа (см. главу III упомянутой выше монографии Немыцкого и Степанова).

15 (стр. 216). Для случая двух степеней свободы (или для случая неавтономной системы с одной степенью свободы) Биркгоф предложил другой способ доказательства существования периодических решений второго рода, основанный на использовании так называемого преобразования T, т. е., по существу, на принципах, изложенных в главе XXVII третьего тома «Новых методов небесной механики» А. Пуанкаре (см.: Б и р к г о ф. Динамические системы. М.—Л., 1941). По поводу n-мерного случая см.: В. И. А р н о л ь д. C. R. Acad. Sci., 1965, **261**, 3719—3722.

16 (стр. 219). Неточность. При $\rho \neq 0$ и любом z функция $\rho^3 f(\varphi) - z\rho^2$ имеет два минимакса. Поэтому дальнейшие заключения об устойчивости решений второго рода в этом примере требуют соответствующих очевидных изменений.

17 (стр. 232). Ж. Адамар в своей недавно переведенной на русский язык книге о психологии математического творчества («Исследование психологии процесса изобретения в области математики». М., 1970) указывает на то, что приведенное здесь Пуанкаре условие минимума представляет видоизменение известного условия Вейерштрасса [1]. Ко времени выхода в свет III тома «Новых методов небесной механики» метод Вейерштрасса в вариационном исчислении не был опубликован и был известен лишь узкому кругу тех, кто слушал лекции Вейерштрасса. Однако Пуанкаре приводит свое условие (A) как известный факт и, вместе с тем, не дает никаких ссылок. Должны ли мы считать, пишет Адамар, что рассуждение Вейерштрасса или другое, ему эквивалентное, было открыто Пуанкаре, но осталось совершенно им неосознанным? Адамар обращает внимание и на то странное обстоятельство, что на той же странице «Новых методов . . .» (стр. 261 французского издания) несколькими строками выше Пуанкаре говорит о связи исследуемой им проблемы с трудным вопросом о второй вариации, тогда как в его условие (A), равно как и в условие Вейерштрасса, входит

[1] Это было показано Адамаром и в его «Лекциях по вариационному исчислению» (J. H a d a m a r d. Leçons sur le calcul des variations, t. 1. Paris, 1910, № 323, p. 391).

только первая вариация. «Таким образом, — продолжает Адамар, — на этой странице «Новых методов. . .» получилось любопытное противоречие. Упоминание о второй вариации сделано человеком, который представления не имеет о новой теории. С другой стороны, Пуанкаре показал, что он ее вполне себе представлял, когда он формулировал свое условие (A) (такую форму он придал условию Вейерштрасса). Однако до появления новой теории никто не думал о вещах такого рода, знали лишь классическое, но не столь адекватное условие Лежандра».

18 (стр. 309). Мемуар Дж. Дарвина озаглавлен «Periodic orbits» (Acta math., 1897, **21**, p. 99—242).

19 (стр. 324). Принципы главы III не могут быть применены здесь непосредственно, так как порождающее решение проходит через особую точку правых частей соответствующих дифференциальных уравнений. Для доказательства существования периодических решений второго вида необходимо специальное исследование, опирающееся, например, на регуляризацию переменной Сундмана (см. Karl F. Sundman. Mémoire sur le problème des trois corps. — Acta math., 1913, 36).

20 (стр. 340). Дальнейшие исследования окрестности неустойчивого периодического решения гиперболического типа принадлежат Биркгофу (см.: G. Birkhoff. Novelles recherches sur les systèmes dynamiques. — Memorial Pont. Acad. Scient. Novi Lyncaei Ec., ser. III, 1935, I).

21 (стр. 343). Рассматриваемый здесь вопрос об устойчивости в ограниченной задаче трех тел решен в положительном смысле в работах Колмогорова, Арнольда и Мозера (Докл. АН СССР, 1954, 98, № 4; 1961, **137**, № 2; Gotting. Nachrichten, 1962, II, math.-phys. Kl.). Из этих работ вытекает, что, несмотря на расходимость рядов Линдштедта, последовательность канонических преобразований типа Ньюкома, на которые ссылается Пуанкаре, сходится для значений n_1/n_2, заполняющих всю вещественную ось, за исключением множества меры, малой вместе с μ. Для канонических систем с числом степеней свободы, бо́льшим двух, возможны резонансные зоны с неустойчивыми решениями (В. И. Арнольд. Докл. АН СССР, 1964, **156**, № 1. См. также обзорную статью: Г. М. Заславский, Б. В. Чириков. Статистическая неустойчивость нелинейных колебаний. — УФН, 1971, 105, вып. 1).

22 (стр. 345). Это рассуждение Пуанкаре не имеет точного смысла. Объяснение парадокса следует искать в подлежащих исследованию условиях сходимости ряда $S=S_0+S_1\varepsilon+S_2\varepsilon^2+\ldots$ для случая $F=0$.

Г. А. Мерман

О ПРОБЛЕМЕ ТРЕХ ТЕЛ И ОБ УРАВНЕНИЯХ ДИНАМИКИ

Эта работа Пуанкаре связана с объявленным в 1885 г. (от имени шведского короля Оскара II) конкурсом. Конкурс был организован редакцией первого математического журнала в Скандинавии «Acta mathematica», начатого изданием в Стокгольме в 1882 г. Жюри состояло из трех человек: главного редактора «Acta mathematica» Г. Миттаг-Леффлера, известного своими работами по теории аналитических функций, и двух «патриархов» математики того времени, Карла Вейерштрасса и Шарля Эрмита. Присуждение премий было приурочено к шестидесятилетию короля и состоялось 21 января 1889 г. Конкурсных тем было предложено четыре и разработка любой из них, по мне-

нию жюри, имела большое значение для прогресса науки. Темы были сформулированы следующим образом.

1. Пусть дана система произвольного числа материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. Требуется, в предположении, что не произойдет соударения двух каких-либо точек, представить координаты каждой точки в виде рядов по каким-либо известным непрерывным функциям времени, равномерно сходящихся для всех действительных значений этой переменной.

В обосновании выбора темы было указано, что решение значительно расширило бы наши сведения «о системе мира», а вместе с тем, оно представляется достижимым с помощью наличных средств математического анализа. И тут жюри сослалось на то, что Лежен-Дирихле незадолго до смерти сообщил одному из своих друзей об открытии метода интегрирования дифференциальных уравнений механики, с помощью которого ему удалось вполне строго доказать устойчивость нашей планетной системы [1]. Хотя никаких других сведений о методе Дирихле не сохранилось, жюри выразило уверенность в том, что метод был основан не на длинных и сложных вычислениях, а на какой-то существенно простой идее, и переоткрыть такую идею можно. «Но если бы предложенную проблему нельзя было решить в назначенный срок, то премию можно было бы присудить за работу, в которой указанным образом была бы рассмотрена и полностью решена какая-либо другая проблема механики».

2. Фукс доказал в нескольких мемуарах, что существуют однозначные функции двух переменных, родственные ультраэллиптическим, но более общие. Предлагалось в явном виде получить в достаточно общем случае эти функции, существование которых доказано Фуксом, так, чтобы можно было установить и изучить их самые существенные свойства.

3. Со ссылкой на Брио и Буке, начавших подобные исследования, предлагалось изучить функции, определенные дифференциальным уравнением вида $P(x, y, dy/dx) = 0$, где P — многочлен относительно своих трех аргументов.

4. Жюри обращало внимание на то, что введенные А. Пуанкаре фуксовы функции не изучены еще с алгебраической точки зрения, т. е. для них отсутствует аналог того, что сделано в теории эллиптических функций для изучения трансцендентной зависимости между модулем и отношением периодов. Предлагалось «заполнить этот пробел и получить новые уравнения, аналогичные модулярным, изучив, пусть в каком-либо частном случае, строение и свойства алгебраических зависимостей, связывающих две фуксовы функции, обладающие общей группой» [2].

Впрочем, в условиях конкурса был и такой пункт: если ни одна из работ на одну из предложенных тем не будет признана достойной премии, то премия может быть присуждена и за работу, содержащую решение иного важного вопроса теории функций.

Работы подавались под девизами, и к последнему сроку представления (1 июля 1888 г.) их поступило одиннадцать. Жюри признало достойными премии две работы на равных основаниях. Обе они были опубликованы в «Acta mathematica», (1890,

[1] Об этом рассказал Куммер в своей речи памяти Дирихле. См.: Abhaandl. K. Akad. Wiss. Berlin, 1860, s. 35.

[2] См.: Acta math., 1885, 7, s. I—VI.

13), заняв том целиком. Это был мемуар П. Аппеля «Об интегралах функций со множителями и об их применении к разложению абелевых функций в тригонометрические ряды», объемом в 174 страницы (он связан, очевидно, со второй из конкурсных тем), и помещенный на первом месте комментируемый мемуар Пуанкаре, объемом в 270 стр. В качестве девиза и эпиграфа Пуанкаре выбрал латинский стих:

Nunquam praescriptos transibunt sidera fines [3].

Этот памятный том «Acta mathematica» открывается отзывом Эрмита о работе Аппеля и там в конце мы читаем: «Подводя итог, мы полагаем, что изложенная нами работа является произведением первоклассного математика и что ее включат в список наиболее важных математических произведений, привлекавших в последние годы внимание аналитиков» [4]. К сожалению, отзыв о работе Пуанкаре, который должен был быть написан Вейерштрассом, до нас в полном виде не дошел (Вейерштрасс в те годы постоянно болел и из-за этого откладывал окончательное редактирование этого отзыва). Но были и другие обстоятельства, из-за которых отзыв Вейерштрасса остался неизвестен современникам. С ними стоит познакомиться, так как они имеют прямое отношение к истории задачи трех тел, к Вейерштрассу и к Пуанкаре.

Как пишет Миттаг-Леффлер во введении к опубликованным им материалам о Вейерштрассе [5], последний всегда проявлял исключительный интерес к задаче трех тел. Действительно, в письме к С. Ковалевской от 16 декабря 1874 г. Вейерштрасс напоминает своей ученице, что не раз беседовал с нею об условиях устойчивости солнечной системы и о связанных с этим математических проблемах. Заодно он сообщает, что в течение нескольких недель серьезно работал над ней [6]. В письмах к С. Ковалевской 1875, 1878, 1881 гг. Вейерштрасс снова возвращается к этому вопросу, рассказывает о примененных им методах и встреченных трудностях. 6-го марта 1881 г. Вейерштрасс сообщал, что в том году он прилежно трудился, но успехи не соответствовали приложенным усилиям. «Твое присутствие, — продолжал он, — побудило меня снова взяться за мои старые исследования по интегрированию дифференциальных уравнений динамики, я несколько продвинулся вперед, но все еще вижу перед собою трудности, которые кажутся мне непреодолимыми» [7]. Наконец, в письме от 14 июля 1882 г., очевидно в ответ на сообщение Ковалевской о результатах, полученных Пуанкаре, мы читаем:

«. . .Статьи П. о дифференциальных уравнениях

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}$$

я не знаю. Где она помещена? А что касается заявления Пуанкаре об интегрировании дифференциальных уравнений механики, я могу сказать следующее. Тому две зимы

[3] Никогда не перейдут светила предписанных границ.

[4] Acta math., 1890, **13**, VIII.

[5] G. Mittag-Leffler. Zur Biographie von Weierstrass. — Acta math., 1912, **35**, 29.

[6] Там же, стр. 30.

[7] Там же, стр. 33.

я на семинаре кое-что докладывал по этому предмету и между прочим доказал следующую теорему.

Если материальные точки, в любом числе, взаимодействуют по закону Ньютона или по любому другому, когда вместо r^2 фигурирует аналитическая функция от r, обращающаяся при действительных и положительных значениях r в бесконечность только для $r=0$, и если начальные условия движения таковы, что никакие две точки не встречаются и никакие две точки не расходятся бесконечно, то координаты движущихся точек суть аналитические функции времени t, однозначно определенные не только для всех действительных значений этой величины, но и для всех ее комплексных значений, вторая координата которых по абсолютной величине остается меньше определенного предела. Теорема, из которой, по сообщению Аппеля, исходит Пуанкаре, верна, следовательно, лишь тогда, когда соблюдаются условия устойчивости системы мира. Но установление этих условий составляет, пожалуй, самую трудную часть всего исследования. Если П. в состоянии действительно определить коэффициенты рядов, в которые разлагаются координаты, в предположении устойчивости системы, то вполне возможно, что тогда удалось бы установить условия, при которых такой ряд сходится, и это были бы условия устойчивости. Но и тогда я не верю в то, что этими рядами выражается истинный аналитический характер представляемых ими функций, — этому противоречит уже простейший случай двух точек, каждая из которых движется около общего центра тяжести по эллипсу. Но подождем. . .» [8].

Как видим, еще в 1882 г., в разгар своих исследований по качественной теории дифференциальных уравнений (да и по автоморфным функциям) Пуанкаре занимался вопросами, связанными с задачей трех тел. Он уже тогда, видимо, получил свой результат о существовании разложений искомых функций в ряды, сходящиеся на комплексной плоскости t в полосе, содержащей действительную ось. И этот результат, в основном, был еще раньше получен Вейерштрассом. Вейерштрасс в письме к Миттаг-Леффлеру от 8 марта 1883 г. снова сформулировал приведенную выше теорему, назвав ее главным результатом своих исследований по задаче n тел, и добавил к этому следующее:

«Пуанкаре, как мне сообщили, вывел эту теорему по крайней мере в предположении действия закона Ньютона и извлек из нее как следствие, что можно разложить координаты всех точек в сходящиеся ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n [\varphi(t)]^n,$$

где $\varphi(t)$ — *определенная* функция от t. Это легко видеть. Та область величины t, в которой координаты суть однозначные функции, — это полоса, содержащая прямую действительных значений t, эту полосу можно отобразить на круг, что и дает функцию $\varphi(t)$. Но таким путем мы не выясняем, соблюдается ли сделанное предположение, да и форма, в которой выражаются координаты, не отвечает природе описываемых движений.

---

8 G. Mittag-Leffler. Zur Biographie von Weierstrass. — Acta math., 1912, 35, 33—34.

Для этой задачи я придумал немало построений, но полученные результаты меня еще не удовлетворяют» [9].

Пуанкаре получил через Миттаг-Леффлера копию этого письма и, отвечая (18 апреля 1887 г.), писал, что, конечно, только при условии отсутствия соударений можно быть заранее уверенным в возможности выразить координаты планет в виде рядов по степеням функции [10]

$$\frac{e^{at}-1}{e^{at}+1}.$$

И потому он разлагал в ряды не по степеням этой функции, а по степеням

$$\frac{e^{as}-1}{e^{as}+1}, \qquad \text{(a)}$$

где s — вспомогательная переменная со следующими свойствами:

1) время t представляется в виде ряда по степеням (a);

2) если планеты не соударяются, когда s изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, то t монотонно растет от $-\infty$ до $+\infty$;

3) если планеты сталкиваются в момент t_0 при изменении s от $-\infty$ до $+\infty$, то t монотонно растет от $-\infty$ до t_0. «Формулы ничего не дают с момента t_0, как, впрочем, должно быть» [11]. И Пуанкаре продолжал:

«Пока я не имел в виду именно проблему небесной механики. Моей целью было показать, что всегда можно получить решение алгебраических дифференциальных уравнений в виде рядов, сходящихся для всех вещественных значений переменных. Такая задача имеет бесконечно много решений и данное мною — только пример. Ясно, что в каждом частном случае надо выбрать наиболее целесообразное (zweckmässig) [12]. И я не думаю, что в случае небесной механики мое решение самое zweckmässig, думаю, что надо найти лучшее».

Но надо заметить, вслед за Миттаг-Леффлером, что К. Ф. Сундман добился успеха в задаче трех тел, следуя по сходному пути: он показал, как выбрать вспомогательную переменную (s) так, чтобы разложения в ряды, о которых шла выше речь, сходились для всех значений t даже при наличии соударений, лишь бы не все постоянные в интегралах площадей были равны нулю (последняя оговорка исключает возможность тройного соударения).

Все это показывает, что первая конкурсная тема, предложенная и сформулированная Вейерштрассом, была выдвинута как действительно назревшая и фундаментальная научная проблема, и ссылка на высказывания Лежена-Дирихле, высказывания, возможно, повлиявшие на самого Вейерштрасса, была далеко не единственным ее обоснованием. И в период подготовки конкурса Вейерштрасс, уже имея достаточ-

---

[9] Там же, стр. 35—36.

[10] Он здесь выписал функцию $\varphi(t)$ явно.

[11] Les formules ne donnent plus rien à partir du temps t_0 et c'est d'ailleurs ce qu'elles ont de mieux à faire. (См.: «Lettres d'Henri Poincaré a M. Muttag-Leffler concernant le mémoire couronné du prix de S. M. Le roi Oscar II». — Acta math., 1921, 3, 162).

[12] Пуанкаре здесь вставляет немецкое слово, примененное Вейерштассом.

ное представление о возможностях и результатах Пуанкаре, оставался при мнении, что получить в виде сходящихся рядов интегралы дифференциальных уравнений движения n точек, при условии устойчивости системы, — проблема целесообразная, разработка которой может дать прекрасные результаты [13].

Но, как это ни странно сейчас, само предложение такой темы на конкурс вызвало возражения и противодействие некоторых ученых. И Вейерштрасс в последовавшей переписке с Миттаг-Леффлером должен был снабжать своего бывшего ученика необходимой контраргументацией.

В обширном письме от 7-го августа 1885 г.[14] Вейерштрасс воспроизвел свой упоминавшийся выше доклад на семинаре, дав полное доказательство основной теоремы, еще раз остановился на значении условия устойчивости системы, а под конец указал, что привел ссылку на Дирихле и для того, чтобы оправдать введение в постановку темы, в качестве предпосылки, условия устойчивости.

Дошедшие до Вейерштрасса критические замечания по поводу самой постановки задачи были, видимо, двоякого рода. Одни считали поставленную задачу неразрешимой, но это Вейерштрасса мало беспокоило. Иначе обстояло дело с возражением относительно оговорки: «в предположении, что никогда не произойдет соударения двух каких-либо точек» [15]. По этому поводу Вейерштрасс писал Миттаг-Леффлеру, что ввел эту оговорку предусмотрительно и с полным основанием. «А именно, я провел доказательство того, что, в предположении закона Ньютона, столкновение в определенный момент двух точек может произойти только при совершенно особых условиях, вероятность которых бесконечно мала.

Следовательно, такой случай вполне можно не рассматривать. А тогда координаты движущихся точек действительно являются однозначными аналитическими функциями времени и возможно их разложение в ряды требуемого вида.

Но это доказательство достаточно сложное; я его забыл, а при попытке его восстановить, у меня, как обычно бывает, возникли различные сомнения. Короче, только после больших усилий мне удалось строго доказать требуемое, по крайней мере, для системы трех точек.

Доказательство основано на следующем. Допустим, что в системе n материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона, происходит в момент t_0 столкновение каких-то двух (не более) точек. Тогда координаты всех точек можно разложить по целым положительным степеням

$$(t_0-t)^{1/3},$$

и в самые общие выражения этих координат входят не $6n$, а только $6n-2$ произвольных постоянных. Отсюда следует, что если произвольно выбрать в момент t_0 начальные значения координат и их первых производных по времени, вероятность столкновения двух точек бесконечно мала. Для $n=3$ удается далее легко показать, что все три точки могут встретиться только в том случае, когда три постоянные интегрирования в теореме площадей обращаются в нуль. Поэтому мне кажется несомненной справедливость рассматриваемой теоремы в общем случае.

---

[13] Письмо к Миттаг-Леффлеру от 1 января 1885 г.

[14] Там же, стр. 37—46.

[15] См. выше, стр. 968.

Но следует, конечно, заметить, что эта теорема не исключает возможности того, что по истечении бесконечно большого времени две точки, не сталкиваясь, окажутся сколь угодно близкими. Но как дело обстоит в действительности, я не смог установить»[16].

Указанное Вейерштрассом условие тройного соударения было найдено также профессором Московского университета Ф. А. Слудским, который опубликовал его без доказательства в 1878 г.[17] Это же условие впоследствии нашел и К. Ф. Сундман, у которого мы находим следующую теорему: «Если постоянные площадей не все равны нулю, то величина R (введенная Лагранжем величина R^2 равна $r_0^2/m_0+r_1^2/m_1+r_2^2/m_2$, где r_0 — расстояние между точечными массами m_1 и m_2, r_1 — расстояние между m_2 и m_0, r_2 — расстояние между m_0 и m_1) не может стремиться к нулю, когда t стремится к конечному значению t»[18]. Сундман в своих исследованиях использовал вспомогательную переменную (u), в ряды по целым положительным степеням которой, сходящиеся для всех значений времени (при отсутствии тройного соударения, через момент двойного соударения ряды Сундмана могут быть аналитически продолжены), ему удалось разложить координаты планет и время t. Разложение t имеет вид

$$t-t_1=\frac{m_0+m_1}{6}(u-u_1)^3+\ldots.$$

Теорему Вейерштрасса, приведенную им в процитированном выше письме, доказал П. Пенлеве в 1897 г.[19]

Таким образом, все, сказанное Вейерштрассом, подтверждено дальнейшими исследованиями, и теперь мы можем вернуться к событиям 1888—1889 гг.

Предложенная Вейерштрассом конкурсная тема вызвала возражение и нападки не только со стороны некоторых астрономов. Коллега Вейерштрасса по Берлинскому университету и по Прусской академии наук известный математик Л. Кронекер, в свое время ученик Дирихле и близкий ему человек, выступил публично с указаниями на неточности в ссылке на Дирихле, приведенной в условиях конкурса. Цель этого выступления Кронекера и различных критических замечаний в адрес жюри, сделанных им и некоторыми другими лицами в переписке с Миттаг-Леффлером, была несомненно не чисто научного характера. Кронекер и некоторые другие представители немецкой науки хотели отвести работы на выдвинутую Вейерштрассом тему, так как вряд ли подлежало сомнению, что добиться значительного успеха в этой области при такой постановке вопроса мог только Пуанкаре: он, конечно, владел всеми средствами новой теории функций, говоря словами Вейерштрасса; он до объявления конкурса получил серьезные результаты в этой проблеме; он своими блестящими работами по качественной и аналитической теории дифференциальных уравнений уже доказал свое превос-

---

[16] Acta math., 1912, 35, 57—58.

[17] Ф. А. Слудский. К задаче многих тел. — Математический сборник, 1878, 9, 536—545.

[18] Karl F. Sundman. Mémoire sur le problème des trois corps. — Acta math., 1913, 36, 151.

[19] P. Painlevê. Leçons sur la théorie analytique des equations différentielles, professées à Stockholm. Paris, 1897.

ходство над другими возможными конкурентами в этой области. А так как в полной тайне намечаемое присуждение премии Пуанкаре и Аппелю, двум французам, не могло оставаться, то в месяцы, предшествовавшие объявлению результата (Кронекер выступил публично в мае 1888 г.), дали себя знать и шовинистические настроения некоторых немецких ученых. Вейерштрасс очень болезненно воспринимал такой ход дел, чувствуя себя задетым и лично. После опубликования решения жюри он писал Миттаг-Леффлеру: «Как оно (решение) было воспринято в известных кругах, можете себе представить. А теперь еще и широкая публика узнает, каких математиков король пригласил в жюри и каких не пригласил. Но я, щадя Вас, не касаюсь той трескотни, что поднимается» [20]. А несколько позже тому же адресату Вейерштрасс сообщал: «Ваше письмо секретарю Парижской академии [в котором Миттаг-Леффлер поздравил с успехом на конкурсе двух молодых французов] здесь многих обозлило и, удивительным образом, за все, с этим связанное, делают ответственным не Вас, а меня» [21].

Эти обстоятельства делают вполне понятным то, что Вейерштрасс с особой тщательностью готовил к публикации свой отзыв о работе Пуанкаре. К тому же, высоко ее оценив, считая ее безусловно достойной премии, он имел несколько основательных претензий к автору.

Вейерштрасс считал изложение во многих местах трудным, некоторые из приведенных доказательств недостаточно строгими. Он высказал пожелание, чтобы до публикации Пуанкаре тщательно пересмотрел свою работу и устранил по возможности недостатки. Пуанкаре ответил на эти пожелания добавлением к первоначальному тексту нескольких заметок, он исправил также допущенную им ошибку (на нее ему указал входивший в редакционную коллегию журнала «Acta mathematica» известный шведский математик Э. Фрагмен). Добавления и исправления вошли затем органически в опубликованный текст, анализ же текста под таким углом зрения здесь вряд ли уместен.

Но вернемся к отзыву Вейерштрасса. Примерно с 1890 г. и до своей кончины в 1895 г. он уже никогда не чувствовал себя вполне здоровым, и для скрупулезного редактирования — в этом отзыве он считал необходимым взвешивать каждое слово — у него так и не хватило времени и сил. Законченная им и опубликованная в 1912 г. первая часть отзыва занимает две страницы и касается только обоснования выбора темы. Аргументация читателю уже знакома, и эти страницы здесь не приведены.

Все же можно достаточно полно представить себе, что должен был содержать отзыв Вейерштрасса по существу. В письме от 15 ноября 1888 г. Вейерштрасс сообщал Миттаг-Леффлеру, что хотя работа под латинским девизом «Никогда светила не перейдут предписанных границ» не содержит решения общей проблемы, она безусловно весьма значительна. Даже если бы она содержала только проведенное в ней доказательство устойчивости в частном случае задачи трех тел (имелась в виду «ограниченная задача»), то и тогда она могла бы притязать на премию ввиду важности такого достижения — первого доказательства подобного рода. Но в работе содержится много больше. Правда, продолжал Вейерштрасс, астрономов она не очень-то ободрит, и не только потому, что

[20] P. Painlevê. Leçons sur la théorie analytique des equations différentielles, professées à Stockholm. Paris, 1897, p. 56.

[21] См. там же, стр. 63—65.

она ничего не дает для практической астрономии, а потому, что она уничтожает некоторые их давнишние иллюзии и опровергает многое из того, что им казалось обоснованным выводом из прежних исследований. Перечисляя такие отрицательные результаты, Вейерштрасс выделил, в частности, доказательство расходимости рядов, к которым приводят методы Ньюкома, Линдштедта и др. Но именно в этих отрицательных результатах Вейерштрасс видел главную ценность работы, ибо они доказывали необходимость искать в задаче трех тел совершенно иные пути. Что касается положительных результатов, Вейерштрасс высоко оценил изложенную в первой главе мемуара Пуанкаре теорию интегральных инвариантов и данную им во второй главе теорию периодических решений, как исследования, имеющие и общее значение для выявления аналитического характера функций, определяемых обыкновенными алгебраическими дифференциальными уравнениями. Особенно же он выделил данную во второй части теорию асимптотических движений. «Она учит нас, — писал Вейерштрасс, — что даже тогда, когда взаимно притягивающиеся по закону Ньютона или по какому-либо другому закону тела в числе, большем двух, движутся так, что расстояние между любыми двумя из них всегда остается в конечных границах, все же могут существовать формы движения, о которых мы до сих пор едва ли подозревали, и для них мы не знаем подходящего (действительного от $t=-\infty$ до $t=+\infty$) аналитического выражения, установленным же можно считать только то, что они не могут быть представлены тригонометрическими рядами».

«Поэтому я без колебаний признаю эту работу достойной премии. . . Рассматриваемую работу нельзя, правда, считать решением поставленной конкурсной проблемы, но эта работа настолько значительна, что с ее опубликованием, по моему убеждению, начнется новая эпоха в истории небесной механики» [22]. Цитируемое письмо заканчивалось критическими замечаниями относительно стиля изложения и нестрогости некоторых доказательств, о которых мы уже упоминали.

Надо признать, что прошедшие с тех пор десятилетия заставляют внести существенные изменения в оценки Вейерштрасса.

В 1952 г., комментируя исследования Пуанкаре, Жак Леви, тогда астроном Парижской обсерватории, писал, что созданные Пуанкаре методы «. . . до сих пор не стали основой для новых исследований относительно движения планет. По-видимому, оставить традиционные переменные мешает то, что трудно сопоставлять разложения, сделанные с помощью различных переменных» [23]. С другой стороны, описание того, какое развитие получили в связи с этим мемуаром Пуанкаре теория интегральных инвариантов, теория характеристических показателей, «теорема о возвращении» (эргодические теоремы!), аналитическая и качественная теории дифференциальных уравнений, составило бы очень заметную часть в истории математики и механики XX столетия. И собственно на исследования по задаче трех и большего числа тел эта работа Пуанкаре наложила неизгладимый отпечаток.

Создавалась же она, если учесть ее объем и многообразие заключенных в ней идей и методов, в очень сжатые сроки. 16 июля 1887 г. Пуанкаре писал Миттаг-Леффлеру, что он не забыл о премии короля Оскара и что конкурсная тема его исключи-

---

[22] H. Poincaré. Oeuvres, t. VII. Paris, 1952, p. 624.

[23] Там же, стр. 51—52.

тельно занимает уже месяц или два [24]. К этому времени Пуанкаре уже располагал рядом результатов, главным образом по ограниченной задаче трех тел, включенных потом в мемуар. Основываясь на них, он уже тогда пришел к выводу, «. . . что не следует пытаться проинтегрировать задачу в функциях известных или сколько-нибудь с ними схожих. Ибо неожиданные свойства, которые обнаруживаются у функций, к которым я пришел, делают их весьма далекими от всех известных функций.

«Теперь я надеюсь, — продолжал Пуанкаре, — что смогу приступить к общему случаю и до 1 июня (1888 года — последний срок для представления конкурсных работ) я, если и не решу задачу полностью (на это я не надеюсь), то найду достаточно полные результаты, чтобы их можно было представить на конкурс» [25]. Это письмо достаточно точно определяет место знаменитого мемуара в научной биографии Пуанкаре: все, в него входящее, было создано в течение примерно года, от лета 1887 до лета 1888 года.

И. Б. Погребысский

«ANALYSIS SITUS» И ДОПОЛНЕНИЯ

Появление в 1895 г. «Analysis situs» открывает историю топологии как науки. Из предшественников Пуанкаре следует назвать прежде всего Бернхардта Римана. Однако Риман в своей знаменитой лекции 1854 г. и в фрагменте, опубликованном посмертно, в сущности лишь указал на существование новой математической дисциплины. «После Римана пришел Бетти, — пишет Пуанкаре, — за Бетти уже не последовал никто». И действительно, наступило затишье, во время которого, если не считать известных теорем о двумерных многообразиях, было сделано так мало, что этот период трудно даже назвать временем накопления фактов. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять известную статью о топологии Дена и Хегора в «Enzyklopädie der mathematischer Wissenschaften» и прочитать ее, опуская изложение результатов Пуанкаре. То, что остается, производит сегодня весьма скудное впечатление.

Как видно из приводимых ниже слов самого Пуанкаре, он рассматривал Analysis situs прежде всего как удобный геометрический язык, общий для всех частей математики, имеющих дело с пространствами большого числа измерений, — язык, роль которого примерно та же, что и роль чертежей при изучении обычного пространства. Эта служебная роль топологии многообразий со временем стала существенно более важной. Теперь топология — фундамент современного анализа и современной геометрии. Но с появлением Analysis situs она стала также и самостоятельной частью математики.

Важнейшие результаты Пуанкаре прошли через всю ее последующую семидесятипятилетнюю историю, многократно возрождаясь в новом виде и каждый раз, вплоть до настоящего времени, оказываясь необходимым инструментом при решении ее задач. Достаточно упомянуть, например, формулу Хопфа о векторных полях, двойственность «типа двойственности Пуанкаре» в современных гомологических теориях, наконец, фундаментальную группу, поистине фундаментальная роль которой с новой силой

---

[24] Acta math., 1912, 35, 162.
[25] Там же, стр. 163.

проявилась в связи с последними бурными событиями в топологии многообразий. Но наиболее значительный вклад, сделанный в математику топологическими работами Пуанкаре, — это создание основ алгебраической топологии. Хотя «числа Бетти» и были введены впервые еще Риманом и Бетти и хотя свое настоящее лицо эта часть топологии приобрела много позже, лишь выйдя из рамок топологии многообразий и соприкоснувшись с идеями теоретико-множественной топологии и через нее с аксиоматическим методом, читателя «Analysis situs» и его Дополнений поражает совершенно неожиданная для периода младенчества новой науки законченность данного здесь построения основ теории гомологий и вместе с тем обилие разнообразных идей, вплоть до введения когомологий посредством интегрирования дифференциальных форм, рассмотрения гомологий с рациональными коэффициентами, схемы доказательства инвариантности чисел Бетти, основанной на гладкой сингулярной теории гомологий, — идей, которые питали развитие топологии на протяжении десятилетий.

Заметим, впрочем, как курьез, что для современников «Analysis situs» воспринимался, по-видимому, среди других созданий Пуанкаре, как работа второго сорта, — примером служит доклад Пикара о работах Пуанкаре, сделанный в 1913 г., где он не упоминает «Analysis situs» сколько-нибудь по существу ни единым словом.

Здесь не место для подробного анализа ни истории возникновения этого труда, ни его влияния на современную математику (читатель найдет в этом томе статью П. С. Александрова «Пуанкаре и топология»), мы ограничимся двумя цитатами, в которых резюмированы, так сказать, генеалогия и наследие «Analysis situs».

Первая цитата взята из того описания работ Пуанкаре, которое он сам составил в 1901 г. и которое опубликовано в «Acta mathematica» (1921, т. 38).

«Метод, который дал бы нам возможность понять качественные соотношения в пространстве более чем трех измерений, оказал бы услуги, аналогичные тем, какие оказывают нам чертежи. Таким методом может быть лишь Analysis situs более чем трех измерений. Однако эта ветвь науки до сих пор мало культивировалась. После Римана пришел Бетти, который ввел некоторые фундаментальные понятия, но за Бетти уже не последовал никто. Что касается меня, то все различные пути, на которых я последовательно находился, вели меня к Analysis situs. Данные этой науки мне были нужны для проведения исследований кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, и для распространения их на дифференциальные уравнения высшего порядка, в частности, относящиеся к проблеме трех тел. Они мне были нужны для изучения многозначных функций двух переменных. Они мне были нужны для изучения периодов кратных интегралов и для его применения к разложению пертурбационной функции. Наконец, в Analysis situs мне виделось средство для подхода к важной проблеме теории групп: отысканию дискретных или конечных групп, содержащихся в данной непрерывной группе».

В предисловии к французскому изданию «Analysis situs» его редактор Ж. Лере пишет: «. . . Брауэр был вдохновлен непосредственно Пуанкаре, когда он придал топологии полиэдров и многообразий ее комбинаторный аспект, который Александров и Чех должны были затем применить даже к топологическим пространствам; когда теория зацеплений получила благодаря Бруэру и Лебегу такое весомое значение, когда Александер вывел на ее основе свою теорему двойственности, а Хопф свой инвариант,

определение пересечений, идущее от Пуанкаре, служило отправной точкой, а его теорема двойственности была наиболее цитируемым результатом; когда Биркгоф и Келлог, затем Шаудер выявили важность теории неподвижных точек в анализе, а Лефшец открыл свою знаменитую формулу — это дали свои плоды последний мемуар Пуанкаре и первые теоремы Брауэра; когда Морс обновил вариационное исчисление, когда Analysis situs способствовал новому взлету алгебраической геометрии — это также произошло под влиянием Пуанкаре; думали, что когомологии были совершенно новым понятием, но лишь до того дня, когда Э. Картан объяснил их суть, исходя из одной страницы у Пуанкаре, до того не понятой. . .»

В переводе терминология и обозначения Пуанкаре в основном сохранены, так, например, вместо современного $\partial x = y$ используется $x \equiv y$, вместо «ориентируемое» говорится «двустороннее». Однако термин «непрерывное многообразие» заменен современным «связное многообразие», а «мериедрический изоморфизм» и «голоэдрический изоморфизм» современными «гомоморфизм на» и «изоморфизм». Отметим, что у Пуанкаре числа Бетти на единицу больше современных, а частная производная $\partial F/\partial x$ обозначается dF/dx.

1 (стр. 461). Основные понятия, относящиеся к многообразиям, были уже достаточно выработаны ко времени написания «Analysis situs», но окончательная форма этому предварительному материалу была придана именно Пуанкаре. Особо следует отметить работы Дика (Math. Ann., 32 и 37), где рассматривалось, в частности, аналитическое представление многообразий. Термин «гомеоморфизм» вводит впервые Пуанкаре, хотя идея рассмотрения группы взаимнооднозначных и взаимнонепрерывных преобразований была, конечно, известна и раньше. Пуанкаре вводит этот термин сначала в ограниченном смысле гладкого гомеоморфизма. Согласно этому определению, квадрат не гомеоморфен кругу или треугольнику. Однако в дальнейшем Пуанкаре говорит, например, о просто связном полиэдре как о полиэдре, гомеоморфном кубу, но с произвольным числом граней.

2 (стр. 468). Понятие ориентации было хорошо изучено Мёбиусом, Клейном (который указал на внутренний характер этого свойства) и др. В частности, Дик доказал (Math. Ann., 37) неориентируемость четномерных проективных пространств, пользуясь при этом знаком детерминанта, но для линейных преобразований координат. По-видимому, лишь Пуанкаре дает окончательное определение во всей общности.

3 (стр. 471). Таким образом, числа Бетти, введенные Пуанкаре, на единицу отличаются от ранга гомологической группы, т. е. от нынешних чисел Бетти. Это изменение было сделано около 1930 г. Лефшецем и Александером. Определение Пуанкаре не совпадает с определением Бетти, как это разъясняется в первом дополнении (см. стр. 550). Заметим, что терминология и обозначения Пуанкаре сохранились до 1930 г., т. е. до появления книги Лефшеца «Topology». Данное здесь определение, как и значительная часть последующего изложения, идет по пути, намеченному Риманом и Бетти, и направлено, как и в работе Бетти, к построению теории многомерного интегрирования (нахождению периодов интегралов). Лишь в дополнениях Пуанкаре встает на полностью оригинальный путь — комбинаторного построения топологии, при котором роль гомологий стала определяющей. По-видимому, основную роль в переходе

Пуанкаре на новую точку зрения сыграло доказательство им обобщенной формулы Эйлера.

Идея рассматривать многомерные числа, обобщающие понятие чисел связности поверхности, возникла впервые у Римана, который, однако, не оставил сколько-нибудь подробного развития своих идей, за исключением отрывочных заметок, опубликованных после его смерти. Бетти испытал сильное воздействие со стороны Римана, особенно в период длительного пребывания Римана на лечении в Италии.

Как видно из данного Пуанкаре определения, он представлял себе цикл в виде замкнутого подмногообразия объемлющего многообразия. Однако в дальнейшем ему приходится считать, что цикл есть объединение ограниченных многообразий, общая граница которых равна нулю (см. стр. 552, ответ на первое возражение Хегора). Это, в сущности, совпадает с точкой зрения современной сингулярной теории (промежуточным звеном с которой послужил взгляд Брауэра на цикл как на отображенное псевдомногообразие). Желание вернуться к первоначальной геометрической точке зрения Пуанкаре (и также Римана и Бетти) не исчезало на протяжении всей последующей истории топологии. Один из примеров — проблема Стинрода о реализации циклов подмногообразиями. Что это в полной мере не осуществимо, показал впервые Р. Том (в сб. «Расслоенные пространства», ИЛ, 1962). Однако в самое последнее время такой возврат все же произошел, хотя и не в прямом смысле. Именно, рядом с обычной теорией гомологий построена новая (одна из целого ряда обобщенных гомологических теорий), в которой гомологические классы состоят из отображений многообразий, приведенных по некоторому отношению эквивалентности. Эта теория имеет все свойства обычной, за исключением того, что гомологиями точки служат группы кобордизмов Рохлина—Тома (см.: П. Коннер, Э. Флойд. Гладкие периодические отображения. «Мир», 1969). В последнее время представление обычных гомологий в виде теории указанного типа (основанной на отображениях «многообразий с сингулярностями») предложили Сулливан и Баас.

4 (стр. 472). Этот параграф занимает центральное место в первой половине мемуара. Однако его суть была понята лишь много позже — после введения Э. Картаном дифференциальных форм, доказательства теоремы де Рама и, наконец, введения когомологий. Современное изложение см., например: Х. Уитни. Геометрическая теория интегрирования. Л., 1960.

5 (стр. 473). Предполагая, что $X_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}$ заданы во всем R^m.

6 (стр. 481). Для многообразия первого типа касательное расслоение стабильно тривиально и в частности эйлерова характеристика должна быть четной. Это замечание было сделано впервые Шенфлисом (Comm. Math. Helv., 1936, 8, 353). Например, комплексная проективная плоскость ориентируема, но не может быть задана первым способом.

7 (стр. 481). Первоначальное доказательство теоремы двойственности, содержащееся в этом § 9, неудовлетворительно, и в первом дополнении Пуанкаре дает новое доказательство, основанное на другой идее. Однако вводимая здесь техника рассмотрения пересечения подмногообразий данного многообразия послужила исходной точкой почти для всех работ по гомологическому строению многообразий, вплоть до открытия инварианта Хопфа. Доказательство двойственности Пуанкаре, основанное на этом подходе, было дано Лефшецем в рамках его теории пересечений.

8 (стр. 487). Это утверждение предполагает, что U не имеет (n—1)-мерного кручения, что, конечно, верно для ориентируемого U без особенностей, но теряет силу при переходе к общему случаю.

9 (стр. 488). Здесь по существу вводятся циклы относительно края. Таким образом, в последующей формулировке содержится (хотя и в несовершенной форме) то обобщение двойственности Пуанкаре, которое известно как двойственность Лефшеца.

10 (стр. 489). Это, вообще говоря, невозможно, если считать, что v_i—замкнутые многообразия, так как их нормальные расслоения окажутся тривиальными. По поводу этого места высказал свои сомнения Хегор. Отвечая ему в первом дополнении (стр. 552), Пуанкаре разъяснил, что v_i считаются здесь ограниченными (т. е. в сущности, играют роль симплексов сингулярной цепи). В таком случае это рассуждение может быть сделано вполне строгим.

11 (стр. 489). Однако U' нельзя выбрать так, чтобы оно было замкнутым многообразием без особенностей, так как V_i могут образовывать цикл, определяющий кручение (например, окружность в линзовом пространстве, негомологичная нулю). Даже если в U' и возможно провести окружность, однократно пересекающую V_i, то эту окружность уже нельзя получить как пересечение с $U'p$-мерного многообразия. В этом состояло второе возражение Хегора, с которым Пуанкаре согласился (см. стр. 552).

12 (стр. 503). Ошибка на хорошо известном крутом повороте (средняя линия двойного тора ограничивает, но не стягивается на нем в точку). В пятом дополнении Пуанкаре исправляет эту ошибку (стр. 690, 704).

13 (стр. 504). Т. е. алгебраическую структуру группы.

14 (стр. 505). Пуанкаре формулирует здесь теорему о том, что одномерная группа гомологий есть фактор-группа фундаментальной группы по ее коммутанту. Этот простой факт заставил искать такое обобщение фундаментальной группы на высшие размерности, при котором гомологии оказывались бы прокоммутированными группами таких групп. Убеждение, что правильное обобщение должно непременно обладать таким свойством, было столь велико, что когда на конгрессе в Цюрихе (1932 г.) Э. Чех дал впервые современное определение гомотопических групп, они были признаны «ненастоящими» и только фундаментальные работы Гуревича вывели топологов из их заблуждения. Любопытно, впрочем, что с современной точки зрения гомологии все же являются в некотором смысле результатом коммутирования групп Чеха—Гуревича (см.: К а н. Сборник переводов «Математика», 1962, 6, вып. 6).

15 (стр. 519). Ответ на первый вопрос положителен, если $n \geqslant 4$ (см.: З е й ф е р т и Т р е л ь ф а л л ь. Топология. 1936, стр. 208, упражнение 2). Для n=3 ответ отрицателен, уже прямая сумма четырех бесконечных циклических групп может, как заметил Дж. Столлингс (Fund. Math., 1962, 51, 191), служить примером, так как многообразие с такой группой должно быть асферичным, а гомологии этой группы нетривиальны в размерности четыре. Ответ на третий вопрос отрицателен. Первый пример указан Дж. Александером (линзовые многообразия (5, 1) и (5, 2), см: З е й ф е р т и Т р е л ь ф а л л ь. Топология, стр. 320). Конечно, произведения сфер дают более тривиальные примеры, но Пуанкаре подразумевает, что гомологии многообразий тоже совпадают.

16 (стр. 523). На самом деле V является многообразием без особенностей лишь при q=3. При $q > 3$ получаются многообразия с особенностями, которые имеют отно-

сительно малую размерность, что и отмечает ниже Пуанкаре. Но двойственность Пуанкаре здесь неприменима. Например, гомологии симметрического квадрата шестимерной сферы таковы: $H_0=Z$, 0, 0, 0, 0, 0, Z, 0, Z_2, 0, Z_2, 0, $Z=H_{12}$. Вообще гомологии симметрического квадрата сферы легко вычислить с помощью точной последовательности Смита. Относительно вычисления гомологий симметрических и циклических степеней полиэдров имеется довольно значительная литература (см. например: S. D. L i a o, Trans. A. M. S., 1954, **77**, 520—551, R. G. S w a n, там же, 1960, **95**, 27—68 и M. R i c h a r d s o n, Duke M. J., 1935, I, 50—69).

17 (стр. 536). Имеется в виду граница симплекса.

18 (стр. 549). Пикар формулирует теорему двойственности с ссылкой на Пуанкаре и с указанием недостаточности в общем случае данного Пуанкаре доказательства. Он сам дает доказательство лишь для случая (известного уже Бетти) двух крайних чисел.

19 (стр. 579). В сущности здесь содержится идея гомологий с рациональными коэффициентами, которые были введены Лефшецем в 1930 г. Напомним, что гомологии по модулю два были введены Титце в 1908 г., а по произвольной области коэффициентов — Александровым только в 1933 г.

20 (стр. 588). Данное здесь доказательство Пуанкаре недостаточно. Первая попытка дать полное доказательство была сделана Лефшецем в его книге «Topology» (1930). Однако оно также содержит ошибочные места. Доказательство было дано А. Брауном и Б. Купменом (Trans. A. M. S., 1932, **34**, 231). Триангулируемостью гладких многообразий много занимались С. Кэрнс, Дж. Уайтхед и др. (см. Х. У и т н и. Геометрическая теория интегрирования, 1960, стр. 175).

21 (стр. 618). На самом деле совпадают q-е и $(n-q-1)$-е кручение, это следует из рассуждения, приведенного выше в тексте.

22 (стр. 622). Этот вопрос, насколько нам известно, никто в его буквальной постановке не рассматривал и доказательство высказанного утверждения по-видимому неизвестно. Если же иметь в виду тривиальность, кроме чисел Бетти, еще и кручений (которая, как показано в тексте, следует из условия двусторонности матриц инциденций), то Пуанкаре сам дал свой хорошо известный противоречащий пример в пятом дополнении.

23 (стр. 677). Идея изучения многообразия посредством расслоения его на множества уровней некоторой функции встречается еще у Римана в его лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (см: «Об основаниях геометрии». Сборник 1956, стр. 313), где, в частности, говорится о «случаях исключения, исследование которых существенно», т. е. об особых точках. Такое исследование, начатое ниже Пуанкаре, послужило основой для нового подхода к вариационному исчислению в работах М. Морса, а в последние два десятилетия для крупнейших достижений современной топологии — теории кобордизмов, теорем Ботта, Смейла и др. (см. современное изложение в книге Дж. Милнора («Теория Морса»). Ср. также примечание 17 на стр. 750 первого тома настоящего издания).

24 (стр. 704). Пуанкаре не доводит своих рассуждений до получения настоящего алгоритма. Такой алгоритм был построен на пути, указанном здесь, Рейнхартом в 1962 г. (Ann. Math., 1962, **75**, 203). Чисто алгебраический алгоритм дан Х. Цишангом (H. Z i e s c h a n g. Math. Scand., 1965, **17**, 17).

25 (стр. 716). Это утверждение, оставленное Пуанкаре без доказательства, очевид-

ным образом неверно, как и следующие утверждения о разворачиваемых многообразиях. Лишь в 1924 г. Александер доказал справедливость этого утверждения для случая, когда поверхностью служит сфера или (для одной из дополнительных областей) тор. Уже поверхность кренделя (двойной тор) может быть вложена в трехмерную сферу так, что ни одна из дополнительных областей не гомеоморфна полному кренделю.

26 (стр. 721). Это утверждение, известное теперь под названием леммы Дена, оказалось совсем не простым. Ошибочное доказательство было дано Деном в 1910 г. Ошибку Дена заметил Кнезер в 1929 г. Правильное доказательство дано Папакирьякопулосом только в 1957 г. (см.: сборник переводов «Математика». 4, вып. 1).

27 (стр. 734). Это — постановка знаменитой проблемы Пуанкаре. Она была распространена в 1936 г. на высшие размерности Гуревичем и в такой обобщенной форме (т. е. для гомотопических сфер) решена, начиная с размерности 5, С. Смейлом, А. Уоллесом и Дж. Столлингсом (см.: сборник переводов «Математика», 6, вып. 3). Для размерностей 3 и 4 проблема остается нерешенной. Известно только, что ответ положителен для некоторых классов трехмерных многообразий (см., например: F. Waldhausen. Ann. Math., 1968, 88, 272).

А. В. Чернавский

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ НА ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

1 (стр. 735). Пуанкаре говорит здесь о мемуаре Адамара «Поверхности отрицательной кривизны и их геодезические линии» [1]. В этом мемуаре дана классификация геодезических линий на поверхностях отрицательной кривизны, у которых нет особых точек на конечном расстоянии.

2 (стр. 737). Эта теорема доказана Адамаром в мемуаре «О некоторых свойствах траекторий в динамике» [2]. В этом мемуаре Адамар изучал также свойства геодезических линий на поверхностях положительной кривизны.

3 (стр. 754). В предыдущем параграфе и в следующем изложен основной метод, с помощью которого Пуанкаре получает свои результаты — метод заключений «по непрерывности». Рассматриваемая выпуклая поверхность включается в некоторое семейство выпуклых аналитических поверхностей, непрерывно зависящих от параметра таким образом, что одному значению параметра ($\mu=0$) соответствует сфера или эллипсоид, другому ($\mu=1$) — изучаемая поверхность. Надо обосновать по непрерывности применимость выводов, законных при достаточно малых изменениях параметра, для конечных изменений последнего.

Такой метод, использованный Пуанкаре, в первую очередь для доказательства существования по крайней мере одной замкнутой геодезической линии на выпуклой

[1] Hadamard. Les surfaces a courbures opposées et leurs lignes geodésiques. — J. math., serv. V, 1898, IV; см. также в «Selecta. Jubile scientifique de M. Jacques Hadamard». Paris, 1935, p. 167—213.

[2] Hadamard. Sur certaines proporietés des trajectoires en dynamique. — J. math., sér. V, 1897, III, 347.

поверхности, вызвал обоснованные возражения. Как указал М. Морс [3], следует учитывать, что на эллипсоиде существуют замкнутые геодезические линии, отличающиеся от главных эллипсов и, если полуоси эллипсоида разной длины, но достаточно мало отличаются от единицы, то такие замкнутые геодезические линии могут быть произвольно большой длины. И нельзя заранее исключить возможность того, что «продолжение» главных эллипсов совпадает с продолжением таких сколь угодно длинных геодезических линий на эллипсоиде.

Наконец, метод Пуанкаре имеет и явные ограничения. Например, при переходе от двумерного эллипсоида к n-мерному он ничего не дает тогда, когда в соответствии с n число главных эллипсов четно.

Как известно, строгое и полное решение многих возникающих здесь проблем было получено с помощью методов вариационного исчисления «в целом», составляющего важный раздел современной математики [4]. В исследовании замкнутых геодезических линий на выпуклых поверхностях, геомеоморфных сфере пространства трех и больше измерений, основные достижения после Пуанкаре связаны с именами Дж. Биркгофа, Л. А. Люстерника и Л. Шнирельмана (см. книгу этих авторов: «Топологические методы в вариационных проблемах». М., 1930), М. Морса и др. А возвращаясь к Пуанкаре, «достаточно будет сказать (вместе с Морсом), что он был первым, кто сознательно создавал теорию макроанализа и, несомненно, он был тем математиком, кто наиболее эффективно применял эту теорию» [5].

4 (стр. 758). Последнее утверждение было сформулировано впервые Якоби (см.: К. Якоби. Лекции по динамике. М.—Л., 1936, стр. 41—42), который не привел развернутого доказательства. Как указал Р. Гарнье, его легко доказать, исходя из известной формулы О. Бонне.

5 (стр. 767). Пуанкаре имеет в виду данное Гильбертом обоснование принципа Дирихле.

И. Б. Погребысский

---

[3] M. Morse. The Calculus of Variations in the Large. N. Y., 1934, стр. 305 и далее.

[4] Кроме монографии Морса, указанной в предыдущем примечании, см.: H. Seifert, W. Threlfall. Variationsrechnung im Grossen. N. Y., 1951; Дж. Милнор. Теория Морса, М., 1967.

[5] См.: М. Morse. Указ. выше соч.

ОБ ОДНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ

1. Об этой работе Пуанкаре следует говорить не только в математическом плане, но и в плане биографическом и, можно сказать, человеческом. Дж. Б. Гучча, редактор журнала, где она была напечатана, поместил вместе с нею следующее адресованное ему письмо Пуанкаре:

«Мой дорогой друг, во время вашего последнего посещения я говорил вам о работе, которая удерживает меня вот уже два года. Я не продвинулся дальше и решаюсь пока оставить ее, чтобы дать ей время созреть. Было бы хорошо, если бы я был уверен, что смогу снова взяться за нее. Но в моем возрасте я не могу за это поручиться, а полученные результаты могут направить исследователей на новые и неизведанные пути и кажутся мне слишком многое обещающими, несмотря на причиненные мне ими разочарования, чтобы я ими пожертвовал. В таких условиях сочтете ли вы подходящим опубликовать незаконченный мемуар, где я изложил бы цель, которую преследовал, задачу, которую себе поставил, и результаты моих усилий ее решить? Это было бы несколько необычно, но, быть может, полезно. Что меня затрудняет, так то, что мне придется поместить много рисунков именно из-за того, что я не мог получить общее правило, а только собрал частные решения. Пожалуйста, сообщите мне, что вы думаете об этом деле и что вы советуете».

Всякому ученому, а тем более Пуанкаре, занимавшему совершенно исключительное положение в науке того времени, сделать такое предложение — дело очень трудное. Приведенное выше письмо (его фотокопия будет помещена в III томе настоящего издания) — волнующий человеческий документ. И он доказывает нам, что для Пуанкаре сделанное им в свое время заявление — нет ничего, чего было бы жаль отдать за истину — составляло его настоящее «исповедание веры».

Обратимся теперь к математической стороне дела. Хотя Пуанкаре не дал доказательства своей теоремы, он глубоко проник в сущность вопроса. Существенна геометрическая интерпретация той модельной динамической задачи, которую дал Пуанкаре, производит сильное впечатление его изобретательность и, можно сказать, острота геометрического зрения, которые проявлены им при анализе частных случаев. Мемуар поучителен и своей незаконченностью, он позволяет читателю представить себе приемы работы его творца в борении с трудностями проблемы. Он дал импульсы для многих дальнейших исследований и здесь, в первую очередь, надо назвать Дж. Д. Биркгофа[1]. Вскоре после смерти Пуанкаре он дал доказательство теоремы, составляющей предмет рассматриваемого мемуара.

Видный американский математик Марстон Морс, на которого мы ссылались в примечаниях к предыдущему мемуару, заметил, что «настоящим учителем Биркгофа был Пуанкаре». Приведя эти слова в своей статье о Биргкофе, другой американский математик Оскар Веблен пишет, что Биркгоф в беседах на математические темы часто

---

[1] George D. Birkhoff. Proof of Poincaré's geometric theorem. — Trans. Amer. Math. Soc., 1913, 14, January, p. 14—22 (см. во французском переводе: Demonstration du dernier théorème de Poincaré. — Bull. Soc. Math. France, 1914, 40, p. 1—12.

ссылался на «Новые методы небесной механики» и что Биркгоф усердно изучал все работы Пуанкаре по динамике [2]. Знание методов Пуанкаре и постоянный интерес к тому кругу вопросов, которые представлены в «Новых методах небесной механики», были, конечно, важными предпосылками для того, чтобы Биркгоф смог дать доказательство последней геометрической теоремы Пуанкаре, притом вполне в духе своего (заочного) учителя.

Несколько измененный вариант этого доказательства вошел в книгу Биркгофа о динамических системах [3]. Биркгофу же принадлежит ряд результатов, обобщающих теорему Пуанкаре и показывающих ее значение [4].

С теоремой Пуанкаре связан еще поучительный эпизод, о котором Биркгоф рассказал в небольшой заметке, полный перевод которой мы здесь помещаем. Для того, кто прочел несколько первых страниц работы Пуанкаре, комментарии к этой заметке не требуются [5].

«В Bulletin des Sciences Mathématiques (février, 1917) г-н Данциг (Dantzig) попытался дать простое и элементарное доказательство этой теоремы Пуанкаре . . .

По поводу этого доказательства я переписывался с г. Данцигом. В июне 1916 г. он мне прислал свой первый опыт. Это было почти то же самое доказательство, которое он привел в Bulletin, с тем отличием, что он тогда не учитывал такой возможности: кривая нулевого углового отклонения может несколько раз встречаться с тем или иным радиусом. . .

Отвечая Данцигу, я старался доказать ему, что он рассмотрел только кривую L самого простого вида. Я указал ему также, что мой друг и коллега Э. Б. Вильсон (E. B. Wilson) сообщил мне то же самое доказательство несколько лет тому назад. Я воспроизведу здесь (с разрешения г. Вильсона) несколько строк из его письма, адресованного мне в ноябре 1912 г.

Не будете ли вы в претензии за предложение найти смешную ошибку, допущенную в той штуке, которая вчера пришла мне в голову?

Пусть имеем преобразование

$$r' = f(r, \varphi), \qquad \varphi' = g(r, \varphi)$$

(r, φ — полярные координаты), при соблюдении условий

$$r_1 = f(r_1, \varphi), \qquad r_0 = f(r_0, \varphi),$$
$$\varphi' = g(r_1, \varphi) > \varphi, \qquad \varphi' = g(r_0, \varphi) < \varphi.$$

---

[2] O. Veblen. George David Birkhoff. In: G. D. Birkhoff. Collected Mathematical papers, v. I, N. Y., 1968, p. XVII—XVIII.

[3] G. D. Birkhoff. Dynamical systems. N. Y., 1927. (См. в русском переводе: Г. Биркгоф. Динамические системы. М—Л., 1941, стр. 140—143 и примечания переводчика Е. М. Ливенсона на стр. 306—308).

[4] G. D. Birkhoff. Collected mathematical papers, I, II. N. Y., 1950 (2-d Ed. 1968) (section «Dynamics»).

[5] G. D. Birkhoff. Sur la démonstration directe du dernier theoreme de Henri Poincare par M. Dantzig. — Bull. sci. math., 1918, 42, p. 41—43 (воспроизведено в: G. D. Birkhoff. Collected mathematical papers, v. 2, p. 103—105).

Строим над рассматриваемым кольцом поверхность $z=\varphi'-\varphi=g\ (r,\ \varphi)-\varphi$, чтобы отложить значительные изменения величины φ по вертикали, где они выглядят не столь запутанными. Эта поверхность связана с внутренней окружностью $r=r_0$ *под* плоскостью $z=0$, с внешней окружностью $r=r_1$ *над* этой плоскостью и она везде непрерывна. Рассмотрим какую-либо непрерывную кривую

$$r=r\ (t),\qquad \varphi=\varphi\ (t),\qquad t_0\leqslant t\leqslant t_1,\qquad r\ (t_0)=r_0,\qquad r\ (t_1)=r_1,$$

идущую от какой-либо точки внутренней окружности к какой-то точке внешней окружности, а также кривую на поверхности $z\ (t)=g[r\ (t),\ \varphi\ (t)]-\varphi(t)$, высекаемую цилиндром, построенным на плоской кривой. Имеем $z\ (t_0)<0$, $z\ (t_1)>0$ и $z\ (t)$ непрерывно. Следовательно, существует по крайней мере *одна* точка на этой кривой, в которой $\varphi'-\varphi=0$, т. е. где движение от точки к ее преобразованной точке направлено или во вне или во внутрь по радиусу. Конечно, пересечение

$$z=\varphi'-\varphi=g\ (r,\ \varphi)-\varphi$$

с $z=0$ может быть очень сложным и содержать овалы или овалы внутри овалов в кольце. Но так как это пересечение должно содержать все свои предельные точки и через него не может пройти никакая непрерывная кривая, проведенная от внутренней к внешней окружности, не пересекаясь с ним по крайней мере в одной точке, то это пересечение должно включать в себя по крайней мере одну непрерывную кривую, обходящую кольцо, быть может, вложенную в непрерывную область в пересечении, что меня не интересует. А на этой кривой (это почти кривая L Данцига. — *Дж. Б.*) сдвиг $r'-r$ непрерывен и не может быть всегда положителен или всегда отрицателен без того, чтобы описанная кривая сжалась или растянулась, что противоречит предположению об инвариантности площадей или интегралов. Следовательно, должны быть по крайней мере две точки, в которых имеем $r'=r$ равно как $\varphi'=\varphi$ ...

Как видим, доказательство Данцига отличается от доказательства Вильсона только в самом конце (loc. cit., 57—58). . .

Затем г. Данциг пытался убедить меня в том, что всегда существует кривая L, встречающаяся с любым радиусом не более чем в одной точке. Во втором письме я построил почти что фигуру на стр. 57 его статьи. Тогда он допустил указанную мною раньше возможность. . .

Теперь г. Данциг сделал только один шаг вперед. Он рассмотрел следующий случай: 1) L не встречается ни с одним радиусом более чем в трех точках; 2) не существует других ветвей кривой нулевого отклонения. Я заключаю, что Данциг применил свой метод только в весьма частном случае.

По сути этот метод весьма близок к методу Пуанкаре, последний рассматривал кривые L' нулевого *радиального* отклонения. Пуанкаре установил, что его метод достаточен для всех кривых L', какие он придумал. Данциг рассмотрел только две самые простые возможности. Мне кажется вполне вероятным, что Пуанкаре рассматривал и кривые L. . .

В заключение я хочу сказать, что не исключена возможность достичь цели как путем рассмотрения кривых L', так и путем рассмотрения кривых L. Но Данциг

в своей попытке, как мне кажется, оставил в стороне все настоящие трудности. И г. Вильсон тоже такого мнения. . .»

1 (стр. 799). В заключительном параграфе своей статьи 1913 г., где дано доказательство теоремы Пуанкаре, Биркгоф сделал, в связи с этим рассуждением Пуанкаре, следующее замечание: «Интересно отметить что Пуанкаре использует только одно свойство, вытекающее из существования интегрального инварианта, а именно, что никакой континуум в R (т. е. в рассматриваемом кольце. — *И. П.*) не может перейти в свою часть при преобразовании T. Кажется невероятным, чтобы это условие было эквивалентно условию, что существует интегральный инвариант. Существование интегрального инварианта — факт, который более существенно входит в данное мною выше доказательство. Мне неизвестно, верна ли та модификация теоремы Пуанкаре, которая получается, когда условие существования интегрального инварианта заменяется указанным более слабым условием». Этому замечанию о существенности в данном вопросе наличия интегрального инварианта или, иначе говоря, условия, что рассматриваемое преобразование сохраняет площади, Биркгоф придал форму точного математического утверждения в работе 1928 г. «О динамической роли последней геометрической теоремы Пуанкаре» [6].

И. Б. Погребысский

2. С «геометрической теоремой» Пуанкаре связан ряд доказанных и недоказанных предложений о неподвижных точках симплектических (или, как говорил Пуанкаре, канонических) диффеоморфизмов симплектических многообразий более общего вида, чем круговое кольцо (или, еще более общим образом, о пересечениях так называемых лагранжевых подмногообразий симплектического многообразия).

В простейшем из этих обобщений кольцо заменяется тором. Рассмотрим тор T с угловыми координатами $(\varphi_1, \varphi_2) \bmod 2\pi$ и с элементом площади $d\varphi_1 d\varphi_2$. Отображение $A : T^2 \to T^2$, гомотопное тождественному преобразованию, задается формулой

$$A(\varphi_1, \varphi_2) = (\psi_1, \psi_2) = ((\varphi_1 + f_1(\varphi_1, \varphi_2), (\varphi_2 + f_2(\varphi_1, \varphi_2)),$$

где f_1 и f_2 — периодические функции с периодом 2π. Мы скажем, что A — *сохраняющий площади* (или *симплектический*) *диффеоморфизм тора*, если якобиан ψ по φ везде равен 1. Мы скажем, что A *оставляет на месте центр тяжести тора*, если средние значения функций f_1 и f_2 равны нулю.

Теорема Пуанкаре вытекает тогда из следующего предложения:

Всякий диффеоморфизм тора, сохраняющий площади и оставляющий на месте, центр тяжести, имеет по меньшей мере четыре неподвижных точки (считая с кратностями); из них по меньшей мере три геометрически различны.

(Чтобы вывести отсюда теорему Пуанкаре о кольце, нужно, слегка расширив кольцо по краям, склеить его со вторым таким же кольцом, чтобы получился тор.)

К сожалению, доказательство наталкивается на такие же затруднения, как те, что встретил Пуанкаре. При некоторых дополнительных ограничениях доказательство

[6] Имеется в русском переводе. См.: Г. Биркгоф. Динамические системы. М—Л., 1941, стр. 254—258.

можно получить из теории Морса (которую следует применить к производящей функции отображения A). Например, достаточно, чтобы собственные числа матрицы Якоби $\partial\psi/\partial\varphi$ ни в одной точке не обращались в -1.

Чтобы перенести приведенную выше формулировку на более общие многообразия, нужно проанализировать условие сохранения центра тяжести.

Пусть (M, ω) — компактное *симплектическое многообразие*, т. е. M — гладкое четномерное многообразие, а ω — замкнутая невырожденная дифференциальная вторая форма на нем (в терминологии Пуанкаре, ω — это интегральный инвариант $\sum dp_i dq_i$).

Будучи невырожденной, форма ω задает изоморфизм между касательным и кокасательным пространством к M в каждой точке. Обозначим этот изоморфизм через $i : TM \to T^*M$.

Каждой вещественной функции H на M соответствует векторное поле $i^{-1}dH$ на M. Это поле называется гамильтоновым, с функцией Гамильтона H.

Отображение $A : M \to M$ назовем *гомологичным единице симплектическим диффеоморфизмом* M на себя, если A можно соединить с тождественным преобразованием гладкой гомотопией, A_t, производная которой в каждый момент времени t задает гамильтоново векторное поле.

(Можно показать, что гамильтоновы поля образуют коммутант алгебры Ли всех сохраняющих ω, т. е. локально гамильтоновых, векторных полей; гомологичные единице симплектические диффеоморфизмы образуют коммутант связной компоненты единицы в группе всех симплектических, т. е. сохраняющих ω, диффеоморфизмов M.)

В частном случае тора диффеоморфизмы, гомологичные единице, — это в точности оставляющие на месте центр тяжести сохраняющие площади отображения.

Мы приходим таким образом к следующему обобщению теоремы Пуанкаре о кольце.

Гомологичный единице симплектический диффеоморфизм компактного симплектического многообразия M на себя имеет по меньшей мере столько неподвижных точек, сколько критических точек имеет гладкая функция на M.

В предположении, что диффеоморфизм A не слишком далек от тождественного преобразования, доказательство снова можно извлечь из теории Морса.

В частности, в случае, когда M — поверхность рода g, число ожидаемых неподвижных точек равно $2g+2$, а в случае, когда M — тор четной размерности n, число ожидаемых неподвижных точек 2^n.

Возможно, впрочем, что геометрическая теорема Пуанкаре связана с существенно двумерными эффектами, подобно следующему ее обобщению, высказанному в виде гипотезы А. И. Шнирельманом.

Всякий сохраняющий площади и ориентацию диффеоморфизм двумерной сферы на себя имеет по меньшей мере две геометрические разные неподвижные точки.

Заметим, что одна неподвижная точка есть у всякого диффеоморфизма двумерной сферы на себя по чисто топологическим соображениям и что легко построить диффеоморфизм, не сохраняющий, разумеется, площади, всего с одной неподвижной точкой.

Доказательство использует производящие функции и следующее элементарное соображение двумерной топологии.

Индекс изолированной особой точки поля градиента гладкой функции на плоскости не превосходит единицы.

(В пространстве трех и более измерений легко построить функцию с изолированной критической точкой, в которой индекс поля градиента равен любому целому числу, а на плоскости — любому числу ряда 1, 0, —1, —2, —3. . .)

В. И. Арнольд

ПИСЬМО ПУАНКАРЕ К БРАУЭРУ

К сожалению, мы не располагаем письмом Л. Брауэра, на которое отвечает А. Пуанкаре, но с содержанием его все-таки можно с достаточной степенью доказательности, а потому и уверенности, судить, с одной стороны, по письму А. Пуанкаре, а с другой — по тематике работ Л. Брауэра[1], относящихся к этому периоду.

Ключом здесь может служить доклад Л. Брауэра[2], сделанный им 27 сентября 1911 г. на заседании Немецкого математического общества и посвященный обоснованию «метода непрерывности» (Kontinuitätsmethode) в теории автоморфных функций. Л. Брауэр говорит:

«. . . Пуанкаре[3] (стр. 368—370) проводит доказательство существования линейно-полиморфной функции на римановой поверхности методом непрерывности, молчаливо предполагая выполненными следующие два утверждения.

Теорема 1. Классы (по конформной эквивалентности. — *В. З.*) римановых поверхностей рода g образуют ($6g$—6)-мерное многообразие без особенностей. . .

Теорема 2. Взаимно однозначный и непрерывный образ n-мерной области в n-мерном многообразии снова является областью.

Благодаря небольшому видоизменению метода можно избежать применения теоремы 1 . . . и, таким образом, свести все к обоснованию теоремы 2 — теоремы об ин-

---

[1] L. E. J. Brouwer. Über die topologischen Schwierigkeiten des Kontinuitätsbeweises des Existenztheoreme eindeutig umkehrbar polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen. — Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, 1912, H. 5, 603—606; L. E. J. Brouwer. Über die Singularitätenfreiheit der Modulmannigfaltigkeit.— Nachr. Akad. Wiss. Gottingen, 1912, H. 7, 803—806; см. также работы, указанные ниже, в примечаниях 2 и 4.

[2] L. E. J. Brouwer. Über der Kontinuitätsbeweis für das Fundamentaltheorem der automorphen Funktionen im Grenzcreisfalle. — Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1912, 21, 154—147.

[3] A. Poincare. Sur les groupes des équations linéaires. Oeuvres, t. I. Paris, Gauthier-Villars, 1916, 300—401.

вариантности областей, доказательство которой я опубликую в ближайшем будущем [4]».

Таким образом, очевидно, Л. Брауэр обратился к А. Пуанкаре за разъяснениями по поводу метода непрерывности, которым он пользовался в работе [5].

Чтобы пояснить ответ А. Пуанкаре, целесообразно предварительно сказать несколько слов о методе непрерывности.

Этот метод, отличающийся геометрической наглядностью и в то же время большой общностью, родился на вершинах теории автоморфных функций одного комплексного переменного. К нему пришли одновременно Ф. Клейн и А. Пуанкаре.

В работе [6] Р. Фрике пишет по этому поводу:

«Клейн развил свои идеи о доказательстве по непрерывности в работе [7] (стр. 704). С другой стороны, Пуанкаре [8] обсуждает тот же вопрос, и при первом же близком рассмотрении существа дела вскрывает исключительное значение, глубину и трудности такого рода доказательств и вместе с тем указывает идеи для преодоления этих трудностей».

Вот ясное изложение идеи метода непрерывности, принадлежащее А. Пуанкаре [9].

«Пусть каждой точке m (многообразия) S поставлена в соответствие точка m' (многообразия) S' таким образом, что координаты m' являются аналитическими функциями координат m, если m не лежит на краю многообразия S в случае, когда S им обладает. Предположим, что каждой точке S' поставлено в соответствие не более одной точки S. Если S — *замкнутое многообразие*, то можно быть уверенным, что каждой точке S' соответствует точка S. Если же S — открытое многообразие с краем-границей, то нельзя ничего утверждать . . . Это как раз то обстоятельство, которым Клейн пренебрег. Тут имеются трудности, с которыми нельзя расправиться в двух словах».

В качестве одной их таких трудностей для применения метода непрерывности в теории автоморфных функций Ф. Клейн [10] отмечает доказательство *аналитичности* конструируемого им соответствия. Он пишет: «Для дальнейшего мне понадобится утверждение, в справедливости которого я не сомневаюсь, но которое не может иметь совсем короткое доказательство. Речь идет о том, что связь между многообразиями M_1 и M_2 является аналитической. Я не сомневаюсь, что это будет доказано при дальнейшем развитии таких доказательств существования . . . Если же тут возникнут затруднения, то можно воспользоваться установленными Пуанкаре формулами связи между M_1 и M_2».

L. E. J. Brauwer. Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets. — Math. Ann., 1911, **71**, 3, 305—313.

A. Poincare. Sur les groupes des équations linéaires. Oeuvres, t. I, Paris, Gauthier-Villars, 1916.

[6] R. Fricke. Beitrage zum Kontinuitätsbeweis der Existenz linear-polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen. — Math. Ann., 1904, 59, 449—513.

[7] F. Klein. Neue Beitrage zur Riemannschen Funktionentheorie. — Ges. math. Abhandl., Bd. III, Berlin, 1923, 631—670.

[8] A. Poincare. Указ. выше соч., стр. 329.

[9] Там же, стр. 330.

[10] F. Klein. Указ. соч., стр. 704.

Сопоставляя приведенные выше выдержки из доклада Л. Брауэра с высказываниями А. Пуанкаре и Ф. Клейна, можно понять, что основным вопросом, с которым Л. Брауэр обратился к А. Пуанкаре, был вопрос об аналитичности отображения; ответу на этот вопрос посвящена первая часть письма А. Пуанкаре. С точки зрения топологии это, в сущности, и есть вопрос об открытости отображения, используемого в методе непрерывности.

Что же касается второй части письма Пуанкаре (впрочем, тесно связанной с первой), где он поясняет сформулированную выше Л. Брауэром теорему 1, то, следуя Клейну и самому Пуанкаре, любую риманову поверхность S можно конформно отобразить на фактор-пространство K/Γ, где K — круг, плоскость или сфера, а Γ — группа дробно-линейных преобразований K, изоморфная $\pi_1(S)$. При этом пространства K/Γ_1 и K/Γ_2 тогда и только тогда конформно эквивалентны, когда Γ_1 и Γ_2 — сопряженные подгруппы группы дробно-линейных преобразований K. Пользуясь таким представлением римановой поверхности, уже нетрудно подсчитать, что число различных классов конформно неэквивалентных компактных римановых поверхностей рода g зависит от $(6g—6)$ действительных параметров.

Вместо употребляемого А. Пуанкаре термина «подстановка» теперь часто говорят «линейное» или «дробно-линейное преобразование». «Фундаментальные подстановки» Пуанкаре — это образующие данной группы Γ дробно-линейных преобразований, по которой проводится факторизация K/Γ.

Заметим в заключение, что чисто топологический вопрос об инвариантности области и числа измерений, безупречно решенный лишь в 1911—1912 гг. Л. Брауэром [11], зародился в рамках геометрической теории аналитических функций при попытках дать логически законченное обоснование метода непрерывности.

В. А. Зорич

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ. О ТЕРНАРНЫХ И КВАТЕРНАРНЫХ КУБИЧЕСКИХ ФОРМАХ

1. Работа «Об арифметических свойствах алгебраических кривых» оказала большое влияние на развитие арифметических методов и приложений алгебраической геометрии. В ней подчеркнута важность систематического учета алгебро-геометрических инвариантов диофантовых уравнений; изучены канонические формы для уравнений кривых рода 0 и 1; сформулирована гипотеза о конечности числа образующих группы рациональных точек на кривых рода 1 и доказана (с небольшим пробелом) конечность ее фактор-группы по модулю любого целого n; указано, что естественным обобщением группы точек для кривых рода > 1 является группа классов дивизоров; введены главные однородные пространства над эллиптическими кривыми («производные кривые»).

Каждая из этих тем интенсивно разрабатывалась впоследствии. Важнейшие достижения арифметической геометрии связаны с доказательством гипотез или развитием идей, сформулированных в этой работе. Л. Морделл в 1922 г. доказал теорему о конечности числа образующих группы точек на кривой рода 1, добавив к идее

[11] L. E. J. Brouwer. Указ. соч. (см. примечание 4 на стр. 990).

Пуанкаре оценки «высоты» точек. А. Вейль в 1928 г. обобщил это доказательство на группы классов дивизоров кривых любого рода над произвольными полями алгебраических чисел. К. Зигель в 1929 г., соединив теорему А. Вейля со своим результатом о диофантовых приближениях, доказал конечность числа целых точек на любой кривой рода $\geqslant 1$. Нагелль, Биллинг, А. Нерон и многие другие авторы занимались вопросом Пуанкаре о том, насколько велика может быть группа точек эллиптической кривой над полем рациональных чисел, но окончательный ответ здесь до сих пор не получен. А. Нерон и С. Ленг перенесли результаты А. Вейля и К. Зигеля на любые основные поля конечного типа.

Ф. Шателе и Зельмер начали систематическое изучение «производных кривых» А. Пуанкаре на языке главных однородных пространств. Это изучение было продолжено И. Р. Шафаревичем, Дж. Тэйтом и Дж. Касселсом. В частности, И. Р. Шафаревич доказал, что над полем рациональных чисел существуют кривые сколь угодно большой степени рода 1 без точек. И. Р. Шафаревич и Дж. Тэйт ввели фундаментальный арифметический инвариант — группу всюду локально травиальных главных однородных пространств, еще очень слабо изученную. Круг интереснейших открытых вопросов арифметики, связанных с этой группой, дзета-функциями и униформизацией в стиле А. Вейля, продолжает нести на себе отпечаток фундаментальных идей Пуанкаре, жизнь которых далека от завершения.

Работа «О тернарных и кватернарных кубических формах» вызывает сейчас меньший интерес. Часть ее результатов поглощена теорией проективной классификации эллиптических кривых и кубических поверхностей; по этой причине мы комментируем ее совместно с предыдущей статьей. Нужно отметить, однако, что основное внимание в последнее время уделялось структуре гладких многообразий(или схем над Z с гладким общим слоем). По этой причине часть результатов этой статьи Пуанкаре осталась не понятой до конца и не включенной в нынешний круг интересов. Это относится, например, к классификации тернарных «форм четвертого семейства», т. е. «кривых над Z с общим слоем $3x_1^2 2x_3+x_2^3=0$. Еще меньше информации о проективных свойствах кубических поверхностей, т. е. кватернарных форм, вошло в математический обиход, хотя интерес к ним в последнее время возобновился.

2. Ниже мы изложим некоторые результаты самого Пуанкаре и других авторов по геометрической теории диофантовых уравнений. Общие принципы, намеченные Пуанкаре, состоят в следующем:

1) Пусть задана система полиномиальных уравнений, скажем, с целыми коэффициентами. Прежде всего, она задает некоторое алгебраическое многообразие над C. Его дискретные инварианты — это важнейшие, хотя и самые грубые, свойства системы: размерность, группы гомологий (род, если размерность равна 1) и т. п.

2) Фиксировав дискретные инварианты, следует рассмотреть проективные модели этого многообразия, возможно более простые, скажем, наименьшей степени. Их вариация даст непрерывные инварианты.

3) Получив какую-то классификацию систем уравнений (многообразий над C), следует разобраться в структуре множества форм данного многообразия над незамкнутым подполем K. С современной точки зрения, это приводит к дополнительным инвариантам, лежащим в одномерных когомологиях Галуа (А. Вейль, Ж. П. Серр). Производные кривые Пуанкаре являются такими формами.

4) Первые шаги собственно арифметического исследования состоят в изучении многообразия над локальными полями, т. е. конечными расширениями полей p-адических чисел. Это — современный подход к оформлению соображений делимости, спуска и т. п.

5) В первую очередь нужно исследовать те арифметические объекты, которые допускают дополнительную алгебраическую структуру, например группы. Это очень нетривиальная мысль, потому что множество рациональных или целых точек многообразия — традиционно первый объект интереса для теоретика-числовика — обычно этому условию не удовлетворяет. Акцент Пуанкаре на группе классов дивизоров, которая не имеет прямой теоретико-числовой интерпретации, является замечательной идеей, позже оцененной по достоинству.

Вот некоторые конкретные результаты исследования кривых по этой программе.

3. *Кривые рода* 0. Любая гладкая проективная кривая рода 0 над замкнутым полем $\bar{K}$ изоморфна проективной прямой.

Над незамкнутым полем K существует еще целый класс кривых без точек, изоморфных кривым второго порядка в P^2. Их классификация совпадает с проективной классификацией тернарных квадратичных форм и тесно связана с классификацией простых алгебр над основным полем. Действительно, все они являются формами P^1 и классифицируются элементами множества $H^1(\mathrm{Gal}\,\bar{K}/K,\ \mathrm{Aut}_{\bar{K}}\,(P\otimes\bar{K}))$. Последнее множество вкладывается в группу классов простых алгебр (группу Брауэра) периода два над K.

Если на кривой рода 0 есть рациональная точка над K, то она изоморфна P^1, и, значит, все ее рациональные точки описываются одним параметром (пример: $x^2+y^2=1$; классическая параметризация: $x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $y=\frac{2t}{t^2+1}$. Эти результаты были доказаны Гильбертом и Гурвицем в 1891 году; Пуанкаре, кажется, не знал их работы, и часть их утверждений передоказал.

Если основное поле K является полем алгебраических чисел, что рациональная точка на кривой X рода 0 существует тогда и только тогда, когда она есть над всеми пополнениями K (теорема Лежандра—Минковского—Хассе).

Кривые рода 1. Если основное поле K алгебраически замкнуто, то любая гладкая проективная кривая рода 1 изоморфна неособой кубике в P^2. Такие кривые классифицируются с точностью до (бирационального) изоморфизма своим абсолютным инвариантом j, который может принимать все значения $j\in\bar{K}$. Если $j\neq 0{,}1728$, то инвариант j имеет кривая

$$(x_1x_2+x_2^2)\,x_3-x_1^3+\frac{36}{j-1728}\,x_1x_3^2+\frac{1}{j-1728}\,x_3^3=0.$$

Если поле K незамкнуто, то кривые X сначала делятся на два класса: с непустым и пустым множеством K-точек.

Первые — *эллиптические кривые* — по-прежнему изоморфны кубикам в P^2. Их абсолютные инварианты принадлежат K. Дополнительный инвариант Хассе h принимает все значения в группе $K^*/(K^*)^m$, где $m=2$, если $j\neq 0{,}1728$ и $m=6{,}4$ для $j=0{,}1728$ соответственно (в характеристиках 2, 3 дело обстоит несколько сложнее). Число m здесь — это порядок группы автоморфизмов любой из K-кривых X с инва-

риантом j; автоморфизм должен сохранять точку. Группа значений инварианта Хассе — это группа $H^1(\mathrm{Gal}\,\bar{K}/K,\ \mathrm{Aut}_{\bar{K}} X \otimes \bar{K})$. Пара (j, h) определяет кривую первого класса однозначно.

Для каждой кривой рода 1 без K-точек X однозначно строится ее якобиева кривая X_0 рода 1, множество K-точек которой непусто и изоморфно группе K-классов дивизоров нулевой степени для X. Если X имеет K-точку, то она сама для себя является якобиевой кривой, так что на множестве ее K-точек вводится естественная структура группы, при которой сумма трех коллинеарных точек не зависит от соединяющей их прямой. Кривая X_0 или ее инварианты (j, h) являются также инвариантами X. Кроме того, X является главным однородным пространством над X_0, т. е. существует морфизм действия X_0 на X: $X_0 \times X \to X$ с обычными свойствами. Это действие описывается элементом $f \in H^1(\mathrm{Gal}\,K/\bar{K},\ X_0(\bar{K}))$, который доставляет третий и последний инвариант кривой рода 1. В терминах (j, h, f) можно получить дальнейшую информацию о свойствах X, например о наименьшей степени проективного погружения X. Следует отметить, однако, что, в то время как j и h вычислимы в разумном смысле слова, вопрос о вычислимости f сводится к проблеме эффективной разрешимости диофантовых уравнений рода 1, не решенной до конца, хотя продвинутой настолько, что проведены обширные машинные вычисления для кривых типа $x^3+y^3=D$ и т. п.

Классификация всех кривых рода 1 с точками над K и части кривых без точек равносильна проективной классификации тернарных кубических форм над K с не нулевым дискриминантом. Поэтому описанные выше результаты можно интерпретировать и на этом языке. Отметим тут же, что классификация кватернарных кубических форм аналогично интерпретируется как классификация кубических поверхностей. Здесь, однако, заранее совершенно неочевидно, что проективная классификация совпадает с бирациональной и, вообще говоря, это не так: над замкнутым полем, например, все кубические поверхности бирационально эквивалентны друг другу и проективной плоскости. Но над незамкнутым полем для важного класса минимальных поверхностей (например, $x_0^3+x_1^3+x_2^3+ax_3^3=0$, $a \notin (K^*)^3$) бирациональная классификация совпадает с проективной. Это было доказано Ю. И. Маниным. В проективных терминах описывается также группа бирациональных автоморфизмов минимальных кубических поверхностей. Однако простого набора проективных инвариантов даже над замкнутым полем не существует, как показывают соображения размерности.

Вернемся теперь к эллиптическим кривым X над K. Высказанное Пуанкаре утверждение о конечности числа образующих группы в случае числового поля K было доказано Морделлом. Доказательство состоит из двух частей. Первая часть — конечность $X(K)/2X(K)$ (или $X(K)/nX(K)$ при $n \geqslant 3$), — по существу, содержится уже в статье Пуанкаре. Для вывода теоремы конечности отсюда нужно еще доказать отсутствие безгранично делимых элементов (группа Q не имеет конечного числа образующих, хотя $Q/2Q=0$). Л. Морделл установил это, введя понятие высоты K-точки и проследив за ее поведением при групповой операции. Если точка на P^2 имеет целые однородные взаимно простые координаты (x_0, x_1, x_2), то ее высота равна $\max(|x_0|, |x_1|, |x_2|)$. Определение закона композиции через коллинеарность позволяет написать явные формулы для высоты удвоенной точки: она быстро растет. Отсюда легко получить невозможность безграничной делимости.

Понятие высоты затем стало важнейшим инструментом диофантовой геометрии в работах А. Вейля, Дж. Тэйта и А. Нерона.

Кривые рода > 1. Кривые рода $g > 1$ классифицируются точками алгебраического многообразия размерности $3g - 3$. Их группы автоморфизмов конечны и в общем случае тривиальны. Предполагается, что над числовым полем K множество K-точек любой такой кривой конечно, но эта гипотеза Морделла в общем случае не доказана (кривая формы $x_0^n+x_1^n+x_2^n=0$ имеет род $(n-1)(n-2)/2 > 1$ при $n \geqslant 4$). Доказан лишь ее аналог над числовыми полями (Ю. Манин, Г. Грауэрт, А. Паршин) и некоторое утверждение о крайней редкости рациональных точек (Д. Мамфорд). Кроме того, доказана конечность числа рациональных точек на специальных кривых, униформизируемых модулярными функциями (Ю. Манин).

Все эти результаты основаны на теореме Морделла—Вейля о конечности числа образующих групп рациональных точек на якобиевых многообразиях кривых. Эта теорема, роль которой предвосхитил Пуанкаре, непосредственно обобщает теорему Морделла об эллиптических кривых.

Доказательства ряда упомянутых здесь результатов и ссылки на дальнейшую литературу можно найти в работах: S. Lang. Diophantine Geometry. N. Y. 1962; Д. Мамфорд. Абелевы многообразия. М., «Мир», 1971 (см. добавление переводчика «Теорема Морделла—Вейля»); Ю. И. Манин. Кубические формы. М., «Наука», 1972; Дж. Касселс. Диофантовы уравнения со специальным рассмотрением эллиптических кривых. — Сборник переводов «Математика», 1968, **12**, 113—160; 1968, **12**, 3—48.

Ю. И. Манин

СОДЕРЖАНИЕ

От редакции 5

НОВЫЕ МЕТОДЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ
III

Глава XXII. **Интегральные инварианты** 9
Установившееся движение потока 9
Определение интегральных инвариантов 11
Связь инвариантов с интегралами 14
Относительные инварианты 15
Связь инвариантов с уравнением в вариациях 20
Преобразование инвариантов 24
Другие соотношения между инвариантами и интегралами 30
Замены переменных 34
Различные замечания 36

Глава XXIII. **Построение инвариантов** 44
Применение последнего множителя 44
Уравнения динамики 46
Интегральные инварианты и характеристические показатели 51
Применение кеплеровых переменных 63
Замечание об инварианте п. 256 66
Случай приведенной задачи 68

Глава XXIV. **Использование интегральных инвариантов** 70
Методы проверки 70
Связь с одной теоремой Якоби 77
Приложение к задаче двух тел 79
Приложение к асимптотическим решениям 83

Глава XXV. **Интегральные инварианты и асимптотические решения** . . . 85
Возвращение к методу Болина 85
Связь с интегральными инвариантами 106
Другой способ анализа 110
Квадратичные инварианты 119
Случай ограниченной задачи 123

Глава XXVI. **Устойчивость по Пуассону** 130
Различные определения устойчивости 130
Движение жидкости 131

Вероятности 139
Обобщение предыдущих результатов 142
Приложение к ограниченной задаче 144
Приложение к задаче трех тел 151

Глава XXVII. **Теория последующих** 159
Инвариантные кривые 162
Обобщение предыдущих результатов 168
Приложение к уравнениям динамики 171
Приложение к ограниченной задаче 176

Глава XXVIII. **Периодические решения второго рода** 180
Случай, когда время не входит явно 184
Приложение к уравнениям динамики 190
Решения второго рода уравнений динамики 201
Теоремы о максимумах 205
Существование решений второго рода 213
Замечание 217
Частные случаи 218

Глава XXIX. **Различные формы принципа наименьшего действия** 221
Кинетические фокусы 231
Фокусы по Мопертюи 236
Приложение к периодическим решениям 239
Случаи устойчивых решений 240
Неустойчивые решения 242

Глава XXX. **Построение решений второго рода** 261
Прямое построение решений 262
Анализ 275
Исследование частных случаев 284
Приложение к уравнениям п. 13 286

Глава XXXI. **Свойства решений второго рода** 292
Решения второго рода и принцип наименьшего действия . . . 292
Устойчивость и неустойчивость 301
Приложение к орбитам Дарвина 309

Глава XXXII. **Периодические решения второго вида** 317

Глава XXXIII. **Двояко-асимптотические решения** 325
Различные способы геометрического представления 325
Гомоклинные решения 335
Гетероклинные решения 341
Сравнение с п. 225 343
Примеры гетероклинных решений 345

О проблеме трех тел и об уравнениях динамики. II 357
Глава I. Изучение случая, когда имеются две степени свободы . . 359
Глава II. Исследование асимптотических поверхностей 371
Глава III. Различные результаты 410
Глава IV. Попытки обобщения 442

Задача трех тел 445

ТОПОЛОГИЯ

Analysis situs 457

Дополнение к «Analysis situs» 549

Второе дополнение к «Analysis situs» 594

О некоторых алгебраических поверхностях (Третье дополнение к «Analysis situs») 623

О циклах алгебраических поверхностей (Четвертое дополнение к «Analysis situs») 641

Пятое дополнение к «Analysis situs» 676

О геодезических линиях на выпуклых поверхностях 735

Об одной геометрической теореме 775

П. С. Александров. Пуанкаре и топология. 808

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

О тернарных и кватернарных кубических формах 819

Об арифметических свойствах алгебраических кривых 901

Комментарии 961

Анри Пуанкаре

Избранные труды, том II

Утверждено к печати
Редакционной коллегией серии «Классики науки»

Редактор *В. А. Никифоровский*
Редактор издательства *В. П. Сироткина*
Художественный редактор *Н. Н. Власик*
Технический редактор *П. С. Кашина*

Сдано в набор 18/I 1972 г.
Подписано к печати 23/VI-1972 г.
Формат 70×90$^1/_{16}$. Бумага № 1.
Усл. печ. л. 73,26. Уч.-изд. л. 59,2.
Тираж 11500. Тип. зак. 838.
Цена 4 р. 51 к.

Издательство «Наука»
Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

1-я типография издательства «Наука»
Ленинград, В-34, 9-я линия, д. 12

АНРИ ПУАНКАРЕ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

II

